Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102218**

ID профиля: **293435**

Вариант 24

Чистовик Вариант 24

1. 1) Пусть разность прогрессии d, тогда
$a_n = a_1 + (n-1)d$, получаем, что
$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+8d) =$
$= 9 \cdot a_1 + d(1+2+\ldots+8) = 9a_1 + d \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} = 9a_1 + 36d$

2) $a_5 = a_1 + 4d \quad a_{18} = a_1 + 17d$

$a_5 \cdot a_{18} = (a_1+4d)(a_1+17d) = a_1^2 + 4a_1d + 17a_1d + 68d^2 =$
$= a_1^2 + 21a_1d + 68d^2$

3) $a_{10} = a_1 + 9d \quad a_{13} = a_1 + 12d$

$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2 + 9a_1d + 12a_1d + 108d^2 = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2$

4) $a_5 \cdot a_{18} > S - 4$, значит $\quad a_{10} a_{13} < S + 60$
$a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > S - 4 \quad a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < S + 60$
домножим обе части нер-ва на -1, тогда знак нер-ва поменяется,

получаем $\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > S - 4 \\ -a_1^2 - 21a_1d - 108d^2 > -S - 60 \end{cases}$ сложим оба нер-ва

получаем $a_1^2 - a_1^2 + 21a_1d - 21a_1d + 68d^2 - 108d^2 > S - S - 4 - 60$
$-40d^2 > -64 \quad 64 > 40d^2 \quad d^2 < \frac{64}{40}$ ~~$d^2 < 2$, значит~~

$1 < \frac{64}{40} < 2$, значит $d^2 < 2$ и $d < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < 2$, значит $d < 2$,

5) т.к. арифметическая прогрессия состоит из целых чисел, значит и разность прогрессии - целое число ($a_2 - a_1 = d$, при этом a_2 и a_1 - целые, значит d - целое), значит $d \leq 1$ и $d \in \mathbb{Z}$, но т.к. прогрессия возрастающая, значит $0 < d \leq 1$ и $d \in \mathbb{Z}$, значит $d = 1$

6) значит $S = 9a_1 + 36$
$a_5 \cdot a_{18} > S - 4 \sim a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 36 - 4$
$a_1^2 + 12a_1 + 34 > 0 \quad a_1^2 + 12a_1 + 36 - 2 > 0$
$(a_1+6)^2 - 2 > 0$, $(a_1+6)^2 > 2$

1

Чистовик Вариант 24

7) Из того, что $a_{10}\cdot a_{13} < S+60$ следует, что

$a_1^2+21a_1+108 < 9a_1+36+60$

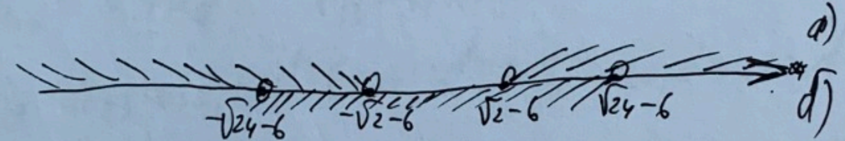
$a_1^2+12a_1+12<0$

$a_1^2+12a_1+36-24<0$

$(a_1+6)^2<24$, то есть мы получим систему:

8) $\begin{cases}(a_1+6)^2>2\\(a_1+6)^2<24\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a_1+6>\sqrt2\\a_1+6<-\sqrt2\end{array}\right.\\-\sqrt{24}<a_1+6<\sqrt{24}\end{cases}$ $\begin{cases}а)\left[\begin{array}{l}a_1>\sqrt2-6\\a_1<-\sqrt2-6\end{array}\right.\\б)\ -\sqrt{24}-6<a_1<\sqrt{24}-6\end{cases}$

Отметим на числовой прямой подходящие промежутки



значит $a_1\in(-\sqrt{24}-6;-\sqrt2-6)\cup(\sqrt2-6;\sqrt{24}-6)$, рассмотрим количество целых a_1 в этом промежутке

а) $-\sqrt{24}-6<a_1<-\sqrt2-6$ $-1-6<-\sqrt2-6<-2-6$, значит $a_1<-8$

$-\sqrt{16}-6>-\sqrt{24}-6>-\sqrt{25}-6$, то есть $a_1>-11$, $-11<a_1<-8$,

подходящие $a_1=-9$; $a_1=-10$

б) $\sqrt{24}-6>a_1>\sqrt2-6$, то есть $-1>a_1>-5$,

т.е. $a_1=-2$; $a_1=-3$; $a_1=-4$

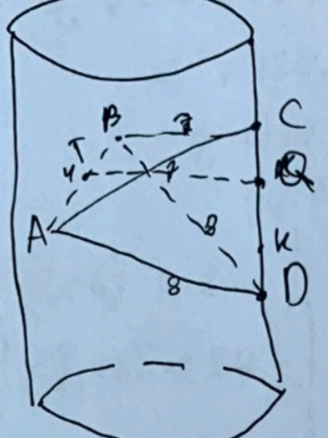
Все возможные варианты a_1: $a_1=-2$; $a_1=-3$; $a_1=-4$; $a_1=-9$; $a_1=-10$

Ответ: $a_1=-10$; $a_1=-9$; $a_1=-4$; $a_1=-3$; $a_1=-2$

2

Чистович Вариант 24

2.



Дано: ABCD - тетраэдр,
AB = 4, AC = CB = 7, AD = BD = 8
A,B,C,D ∈ ~~цилиндру~~ бок.п. цил.
Найти: минимальный радиус цилиндра и CD, при котором достигается

Решение:

1) т.к. CD ∥ параллельно оси цилиндра, при этом и C, и D принадлежат боковой поверхности, значит и ~~все~~ весь отрезок CD принадлежит цилиндру

2) рассмотрим на стороне CD произвольную точку K,
т.к. AC = BC = 7, AD = BD = 8, значит $\triangle ACD = \triangle BCD$ по 3 сторонам (AC = BC, AD = BD, CD - общая), откуда следует, что и все соответственные углы равны, $\angle ACD = \angle BCD$
тогда $\triangle ACK = \triangle BCK$, по 2 сторонам и углу между ними (AC = BC, CK - общая, $\angle ACK = \angle BCK$), значит и отрезок AK = BK, откуда получаем, что как бы мы не выбрали K, $\triangle ABK$ - равнобедренный, ~~значит серединный перпендикуляр из AB~~

3) тогда построим серединный перпендикуляр к AB так, что он будет перпендикулярен главной оси цилиндра, он пересечет прямую, которая принадлежит CD, пусть это пересечение произошло в точке Q, тогда $\triangle ABQ$ перпендикулярен оси цилиндра, значит плоскость ABQ отсекает окружность в цилиндре. Радиус этой окружности равен $\frac{AB}{2\sin\angle AQB} = R$, то есть R будет минимальным, когда $\sin\angle AQB$ будет максимальным

3

Чистовик Вариант 24

4) $\sin\angle AQB$ может принимать максимальное значение, если $\angle AQB = 90^\circ$, тогда $\sin\angle AQB = 1$, и $R = \frac{AB}{2\sin\angle AQB} = \frac{4}{2} = 2$

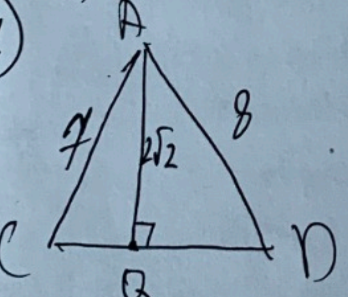
5) ~~AB~~ чтобы это выполнялось в $\triangle ABQ$, ~~BQ и AQ~~ нужно чтобы $AB^2 = BQ^2 + AQ^2$, $BQ = AQ$, значит $AB^2 = 2BQ^2 = 2AQ^2 = 16$, $BQ = 2\sqrt{2} = AQ$

6) рассмотрим $\triangle ACD$, т.к. серединный перпендикуляр из AB перпендикулярен оси цилиндра, а $CD \parallel$ оси цилиндра, значит $TQ \perp CD$, по теореме о 3х перпендикулярах т.к. $AT \perp TQ$, $TQ \perp CD$, значит $QA \perp CD$, где TQ – проекция AQ на плоскость осевого сечения, проходящего через T и Q.

в $\triangle ACD$, AQ - высота, $AC = 7$, $AD = 8$, $AQ = 2\sqrt{2}$

есть 2 случая а) когда высота падает внутрь отрезка CD и б) когда вне отрезка CD

а)



по теореме Пифагора $QD = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \sqrt{64-8} = \sqrt{56}$, $CQ = \sqrt{AC^2 - AQ^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$, тогда $CD = CQ + QD = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

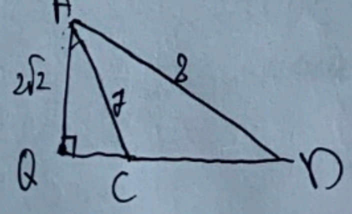
Проверка на возможность такого $\triangle$:

1) $AC + CD > AD$, $7 + \sqrt{56} + \sqrt{41} > 7 + \sqrt{49} + \sqrt{36} = 7 + 7 + 6 > 8$,

2) $AD + CD > AC$; $AD > AC$, значит $AD + CD > AC$

3) $AC + AD > CD$ $\quad 7 + 8 > \sqrt{56} + \sqrt{41}$ $\quad \sqrt{56} < \sqrt{64}$, $\sqrt{41} < \sqrt{49}$, значит $\sqrt{56} + \sqrt{41} < \sqrt{49} + \sqrt{64} = 15$ ч.т.д., $CD = \sqrt{41} + \sqrt{56}$

б)



по теореме Пифагора: $QC = \sqrt{AC^2 - AQ^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

по теореме Пифагора: $QD = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \sqrt{64-8} = \sqrt{56}$

4

Чистовик Вариант 24

$CD = QD - QC = \sqrt{56} - \sqrt{41}$, проверка:

1) $AC + AD > CD$ $\sqrt{56} - \sqrt{41} < \sqrt{56} + \sqrt{41}$, а по вышедоказанному

$7 + 8 > \sqrt{56} - \sqrt{41}$

$\sqrt{56} + \sqrt{41} < 7 + 8$, значит $\sqrt{56} - \sqrt{41} < 7 + 8$

2) $AD + CD > AC$, $8 + CD > 7$, $8 > 7$, значит $8 + CD > 7$

3) $AC + CD > AD$

$7 + \sqrt{56} - \sqrt{41} > 8$

$\sqrt{56} - \sqrt{41} > 1$

$\sqrt{56} > \sqrt{41} + 1$ Возведём в квадрат

$56 > 41 + 2\sqrt{41} + 1$ $14 > 2\sqrt{41}$ $\sqrt{196} > \sqrt{164}$ – верно, значит такой вариант возможен

Ответ: $R = 2$, $CD = \sqrt{56} + \sqrt{41}$ или $CD = \sqrt{56} - \sqrt{41}$

5

Чистовик Вариант 24

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10) \end{cases}$

$a^2+b^2 \le -6a-2b$, если $-6a-2b \le 10$

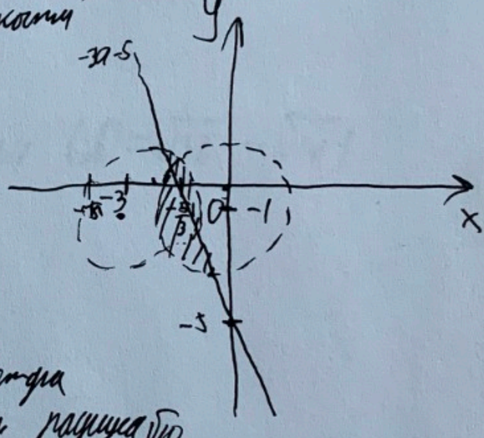
$a^2+6a+b^2+2b \le 0$

$a^2+6a+9 \cancel{+b} -9+b^2+2b+1-1 \le 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$, либо $a^2+b^2 \le 10$, если

$-6a-2b \ge 10$

1) пусть a - переменная по x, b - переменная по y, тогда $-6a-2b \le 10$, значит, что $b \ge -5-3a$, то есть a и b принадлежат ~~пло~~ части плоскости выше прямой $b=-3a-5$,



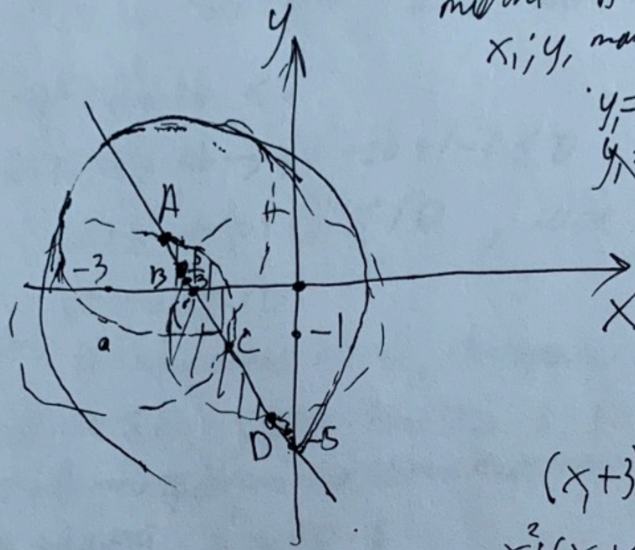
в этом случае a и b должны быть такими, что $(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$

2) ~~а~~ это графически можно представить как круг радиуса $\sqrt{10}$ и вершина которого $(-3; -1)$, при этом расстояние от ~~это~~ центра до $(-\frac{5}{3}; 0)$ меньше $\sqrt{10}$, значит окружность радиуса $\sqrt{10}$ 2 раза пересекает прямую $b=-3a-5$, подходящее решение a и b - заштриховано, аналогично если ~~а~~ $-6a-2b \ge 10$, тогда a и b принадлежат ~~открытой~~ части плоскости ниже прямой $b=-3a-5$, $a^2+b^2 \le 10$ - график круга с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$, т.к. расстояние от $(0;0)$ до $(-\frac{5}{3};0)$ больше расстояния от $(0;0)$ до прямой и при этом оно меньше ~~р~~ $\sqrt{10}$ ($\sqrt{\frac{25}{9}} < \sqrt{\frac{90}{9}}$) значит окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$ пересекает прямую в 2х точках, то есть a и b - такие числа, что они принадлежат закрашенной области

6

Кистович Вариант 24

3) при этом $(x-a)^2+(y-b)^2\leq 10$ — график круга радиусом $\sqrt{10}$ и с центром в $(a;b)$, то есть площадь фигуры М - ~~площадь~~ равна площади фигуры образованой ~~окру~~ кругами с центрами в $(a;b)$ и с радиусом $\sqrt{10}$



точки А и В имеют координаты $x_1; y_1$ такие что

$y_1=-3x_1-5$

$y_1=\sqrt{10-(x_1+3)^2}-1$

$\sqrt{10-(x_1+3)^2}-1=-3x_1-5$

$10-x_1^2-6x_1-9=9x_1^2+24x_1+16$

$10x_1+30x_1+15=0$

$x_1+2x_1+1{,}5=0$

$(x_1+3)^2+(y_1+1)^2=10$

$x_1^2+6x_1+9+9x_1^2+24x_1+16=10$

$10x_1^2+30x_1+15=0$

$x_1^2+3x_1+1{,}5=0$

$(x_1+1{,}5)^2-2{,}25+1{,}5=0$

$(x_1+1{,}5)^2=\cancel{0{,}7}\,\frac{3}{4}$

$x_1+1{,}5=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $x_1+1{,}5=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{3}-3}{2}$ $\quad x_1=\frac{-\sqrt{3}-3}{2}$

$A\left(\frac{-\sqrt{3}-3}{2};\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$ $\quad B\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2};\frac{-3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

4) точки В и D имеют координаты $\quad x_2^2+y_2^2=10$

$y_2=-3x_2-5$

$x_2^2+9x_2^2+30x_2+25=10$

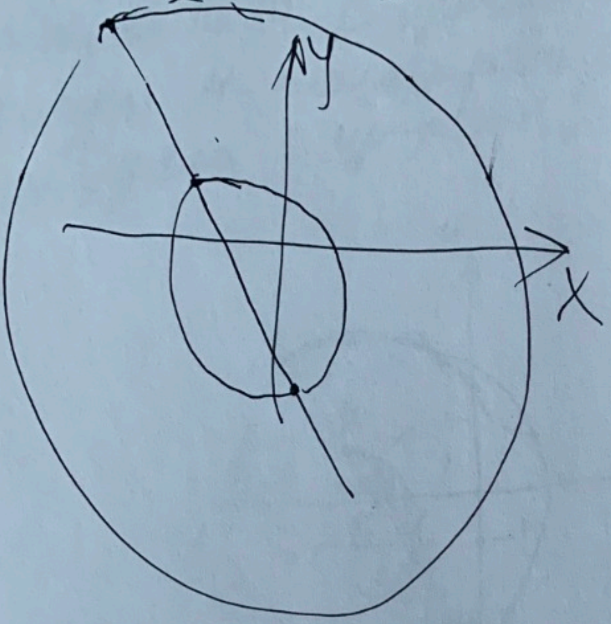
$10x_2^2+30x_2+15=0$, то же уравнение, значит

А совпадает с В, С с D

7

21102218 (U293435 M1295799)

Чистовик Вариант 24



фигура M – ~~окруж~~ ~~круг~~ ~~радиусом~~

2 ~~полу~~ сектора,

Черновик

Вариант 24

2) $(a_1+\cancel{10}^{9})(a_1+12) < 9a_1 + 36 + 60$

$a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 96$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$(a_1+6)^2 - 24 < 0$

$(a_1+6)^2 < 24$

$(a_1+6)^2 > 2$

$2 < (a_1+6)^2 < 24$

$\sqrt{2} < (a_1+6) < \sqrt{24}$

$-\sqrt{24} < (a_1+6) < -\sqrt{2}$

$68 - 32 = 34$

$108 - 96 = 12$

$-4 \le \qquad \le -2$

$1,4 - 6$

$-4,6$

$-\sqrt{24} \qquad a_1$

$4,9 - 6 =$

$= -1,9$

-4

$\cancel{t > 2} \qquad \cancel{2 < t < 24}$

$\cancel{t < 2}$

$|a_1+6| > 2$

$-\sqrt{24} < a_1+6 < \sqrt{24}$

$a_1+6 > 2$

$a_1+6 < -2$

-2

21102218 (U293435 M1295799)

Черновик

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$$

$(-3x_1-4)^2$

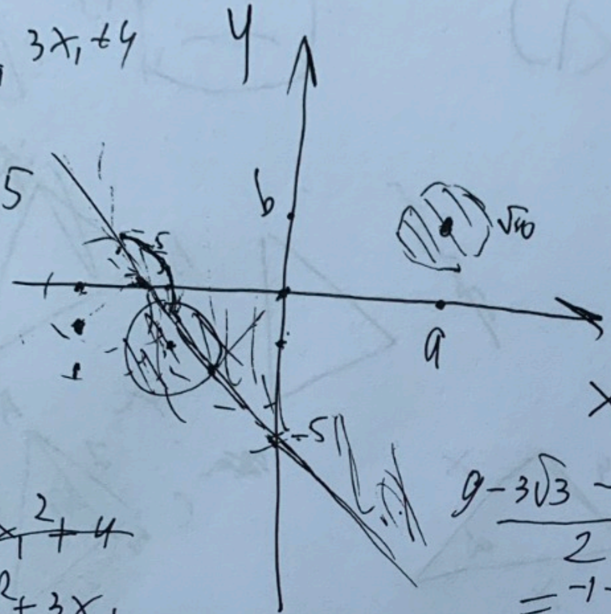
$9x_1^2$

$\cancel{4x_1}$ $3x_1+4$

$$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;10)$$

$\frac{3\sqrt{3}+9}{2}-5$

$\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$



$a^2+b^2 \le 10$

$a^2+b^2 \le -6a-2b$

$a^2+6a+b^2+2b \le 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2-1-9 \le 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$

$a^2+b^2 \le 10$

$\frac{9-3\sqrt{3}-10}{2} =$

$= -1-$

$\cancel{2x_1^2+4}$

$x_1^2+3x_1$

$10 \ge -6a-2b$

$5 \ge -3a-b$

$2{,}25-1{,}5=$

$=1{,}25-0{,}5=0{,}25$

$2b \ge -10-6a$

$b \ge -5-3a$

$(-\frac{5}{3};0)$

$(-3;-1)$

$0=-5-3a$

$3a=-5$

$a=-\frac{5}{3}$

$(y+1)^2=10-(a+3)^2$

$y+1=\sqrt{10-(a+3)^2}$

$y=$

$\sqrt{\frac{16}{9}+1}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$

$3-\frac{5}{3}=\frac{9-5}{3}=\frac{4}{3}$

$\sqrt{\frac{5}{2}}$

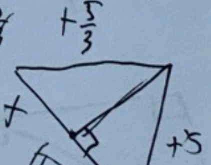
$-\frac{5}{3}$ $+\frac{5}{3}$

$\frac{25}{9}-\frac{10}{36}=$

$=\frac{100-10}{36}=\frac{90}{36}=$

$=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=$

$=2{,}5$



$(t-\frac{5}{3}\sqrt{10})$

$x^2-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}$ $\frac{5}{3}$

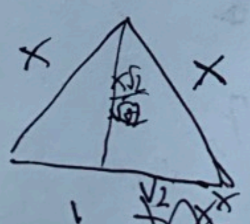
$\sqrt{10}$

$\frac{25}{9}<10$

$25<90$

$\frac{25}{9}+25=$

$\frac{5}{3}\sqrt{10}$ $\sqrt{\frac{250}{9}}$



$25(\frac{1}{9}+1)=\frac{250}{9}$

$\frac{25}{9}-t^2=25-\frac{250}{9}+\frac{10t}{3}\sqrt{10}-t^2$

$\frac{10t}{3}\sqrt{10}=\frac{25}{9}+\frac{250}{9}-25=$

$\frac{25}{9}-$

$t=\frac{5\sqrt{10}}{...}$ $\frac{5\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{...}=25(\frac{11}{9}-1)=25\cdot\frac{2}{9}=\frac{50}{9}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102218**

ID профиля: **293435**

Вариант 24

Шифр: Листовец   Вариант 24

4. 1) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$, т.к. $НОД(a;b;c)=33$, значит a; b и $c \vdots 33$, то есть

$a=3^{\alpha_1}\cdot 11^{\beta_1}\cdot k_1$, где ~~$k \neq 3$~~, $k_1 \not\vdots 3$, $k_1 \not\vdots 11$, $k_1 \in N$, аналогично

$b=3^{\alpha_2}\cdot 11^{\beta_2}\cdot k_2$ при этом если α_1; α_2 и $\alpha_3>1$,

$c=3^{\alpha_3}\cdot 11^{\beta_3}\cdot k_3$, ~~но т.к.~~

тогда $НОК(a;b;c)\vdots 9$, значит какое-то из α_1; α_2 и $\alpha_3=1$,

аналогично какое-то из β_1; β_2 и β_3 равно 1

т.к. $НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15}$, значит ни одно из чисел a; b и c не может делиться на что-то кроме $3^{r}\cdot 11^{L}$, где $0\leq r\leq 19$, $0\leq L\leq 15$ r и $L\in Z$, значит $k_1=k_2=k_3=1$

при этом т.к. $НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15}$ значит среди α_1; α_2 и α_3 нет ни одного числа больше 19, а среди β_1; β_2 и β_3 нет ни одного больше 15, при этом точно среди α_1; α_2 и α_3 есть одно равное 19, потому что если все меньше 19, тогда $НОК(a;b;c)=3^{k}\cdot 11^{15}$, где $k<19$, оно будет равно наибольшему из α_i, аналогично одно из β_1; β_2; β_3 равно 15.

2) Рассмотрим случай когда только $\alpha_i=1$, $\alpha_j=19$, $\alpha_k\neq 1$; $\alpha_k\neq 19$, тогда $1<\alpha_k<19$, α_k может принимать значение от 2 до 18, то есть 17 вариантов для α_k, тогда всего различных вариантов степеней $17\cdot C_3^1\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, потому что единицей может быть α_i; α_j или α_k, 19 может быть одно из двух оставшихся и свободным может быть только 1 вариант, тогда всего таких случаев $17\cdot 3\cdot 2\cdot 1=102$.

3) ~~теперь $\alpha_k=1$, таких вариантов 3.~~
теперь $\alpha_k=1$, ~~и~~ $\alpha_i=1$, $\alpha_j=19$, если попереставлять k; j и i местами, получим 3 различных варианта, аналогично если $\alpha_k=1$; $\alpha_i=19$; $\alpha_j=19$ ~~и~~ тоже 3 варианта. значит различных α_1; α_2 и α_3 может быть $102+6=108$ вариантов

1

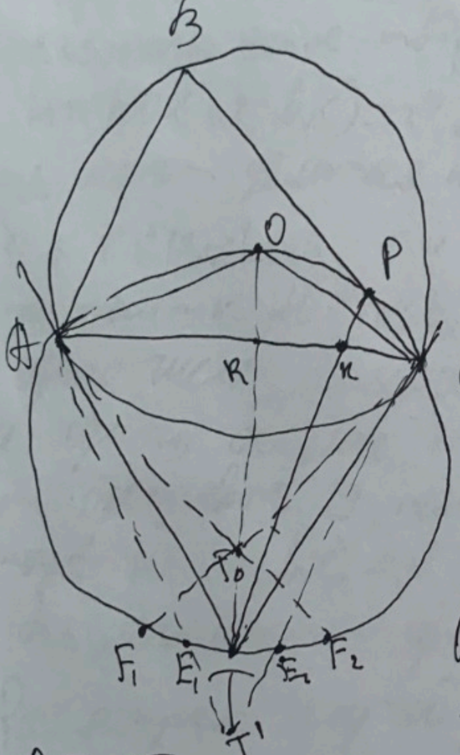
4) Аналогичные рассуждения для $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ — Учетвин Вариант 24

получаем, что когда $\beta_1; \beta_2$ и β_3 — попарно различны вариантов $13 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1 = 78$, а когда две из трех совпадают, вариантов 6, значит трех вариантов для различных $\beta_1; \beta_2; \beta_3$ $78+6=84$

Всего вариантов $108 \cdot 84 = 9072$

Ответ: 9072

3.



Дано: ΔABC вписан в окр. ω, O — центр ω, AT и CT — касат., P — пересечение окр. около A, O и C, и BC

K — пересечение TP и AC

a) $S_{APK}=16$, $S_{CPK}=14$,

б) $\operatorname{arctg} \frac{3}{5} = \angle ABC$

Найти:

a) S_{ABC} б) AC

Решение:

a) 1) т.к. CT и AT — касательные к ω, O — центр окружности, значит $\angle OCT = \angle OAT = 90°$ т.к. $AO=OC$ как радиусы, $AT=CT$ как касательные к одной окружности, тогда $\Delta OCT = \Delta AOT$, значит $\angle AOT = \angle COT$, а т.к. ΔAOC — равнобедренный, тогда и $\angle AOR = \angle ROC$, значит OR — медиана

2) высота и биссектриса в ΔAOC, значит RT — серединный перпендикуляр к AC, значит ~~диаметр принадлежит~~ центр принадлежит прямой OT но при этом $\angle OCT = \angle OAT = 90°$, значит эти углы опираются на диаметр

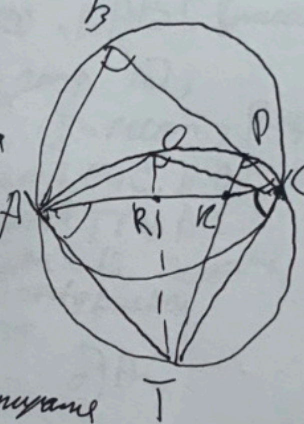
~~и T и A находятся на окружности~~

2

21102218 (U293435 M1295800)

Чистовик Вариант 24 4

3) Допустим, что T не находится на окружности,
пусть T лежит внутри окружности - точка T_0, тогда продлив CT_0 и AT_0 мы получим, что ~~их диаметры~~ центр не на OT, ~~аналогично~~ $OF_1 \notin OT$, $OF_2 \notin OT$, при этом $\angle OCF_1 = \angle OAF_2 = 90°$, значит OF_1 и OF_2 - диаметры - невозможно
пусть T' находится вне окружности, тогда AT' и CT' пересекают окр в точках E_1 и E_2, тогда E_1O и E_2O - диаметры, но ~~так~~ они пересекают OT в точке O, а O - не центр окр., ч.т.д.
значит T принадлежит этой окружности



4) пусть $\angle TPC = \alpha$, тогда $\angle TAC = \alpha$,
т.к. оба этих угла вписаны и опираются на одну дугу, т.к. AT - касательная, значит AC - хорда в ω, значит
$\angle TAC = \frac{1}{2} \smile AC$ по теореме об угле между хордой и касательной, $\angle ABC$ опирается на дугу AC, значит $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$, значит $\angle ABC = \angle TAC = \alpha$, значит $\triangle ABC \sim \triangle PKC$ по 2 углам ($\angle ABC = \angle KPC = \alpha$, $\angle ACB = \angle KCP$ т.к. заключены одной прямой), значит $\frac{CK}{CA} = k$, $\frac{S_{CKP}}{S_{ABC}} = k^2$

5) т.к. $S_{APK} = 16$, $S_{PKC} = 14$, у них общая высота PK,
значит $\frac{S_{PKC}}{S_{APK}} = \frac{\frac{1}{2} h \cdot CK}{\frac{1}{2} h \cdot AK} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$, значит $\frac{CK}{AC} = \frac{7}{15} = k$,

$\frac{S_{CKP}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{49}{225}$ $\quad S_{ABC} = \frac{225}{49} \cdot S_{CKP} = \frac{225}{49} \cdot 14 = \frac{450}{7}$

Д

3

Чистовик Вариант 24.

б) т.к. мы знаем уже, что $\angle ABC = \angle TOC = \angle TPC = \angle TCA = \alpha$,
значит $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$, тогда $\frac{RC}{OR} = \frac{RT}{RC} = \frac{CT}{OC} = \frac{3}{5}$, пусть
$CK = 7x$, тогда $AK = 8x$, тогда $RC = \frac{8x+7x}{2} = 7,5x$, тогда
$OK = \frac{5}{3}RC = 12,5x$, $RT = \frac{3}{5}RC = 4,5x$, $CT = \sqrt{7,5^2x^2 + 4,5^2x^2} = \frac{\sqrt{306}}{2}x$,
тогда $\cancel{OC = \frac{3}{5}}$ $OC = \frac{5}{3}CT = \frac{5\sqrt{306}}{6}x$

Ответ: а) $\frac{45^\circ}{7}$

Чистовик Вариант 24.

5. ~~log~~ $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ (x+1)^2\neq 0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ -x-1>0 \end{cases} \quad x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$$

тогда пусть $29-x=a$, $\frac{x}{7}+7=b$, $-x-1=c$

$\log_{a^{\frac{1}{2}}} b$; $\log_{c^2} a$; $\log_{b^{\frac{1}{2}}} c$

$\quad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel$

$2\log_a b \qquad \frac{1}{2}\log_c a \qquad 2\log_b c$

1) $2\log_a b = 2\log_b c = \frac{1}{2}\log_c a - 1$

$\log_a b = \log_b c = t$, то есть

$a^t = b$, $b^t = c$, $(a^t)^t = b^t = c$, $a^{t^2} = c$, то есть

$\log_a c = t^2$, тогда $\log_c a = \frac{1}{\log_a c} = \frac{1}{t^2}$

$2t = \frac{1}{2t^2} - 1$, т.к. $a, b, c \neq 1$, значит все 3 эти $\neq 0$

$4t^3 + 2t^2 - 1 = 0$, $t = \frac{1}{2}$ $4t^3+2t^2-1 =$

$= (2t-1)(2t^2+2t+1) = 0$, $2t^2+2t+1>0$, т.к.

$D = 4 - 4\cdot 2 < 0$, значит

$t = \frac{1}{2}$, то есть

$\log_a b = \log_b c = \frac{1}{2}$

5

Чистовик Вариант 24

$\sqrt{29-x} = \frac{x}{7}+7 = \cancel{\frac{x}{7}+7}$ $\quad 29-x = \frac{x^2}{49}+2x+49$

$\cancel{29-x = \frac{x^2+98x+7^4}{7^2}}$ $\quad \cancel{\frac{x^2}{49}+147x}+20=0$ $\quad \frac{x^2}{49}+3x+20=0$

$x=-7$

$\cancel{x^2+147x+980=0}$

$\cancel{D = 7^4\cdot 9 - 80\cdot 7^2 = 7^2(441-80) = 7^2\cdot 321}$

$\cancel{x_{1,2} = \frac{-147\pm 7\sqrt{321}}{2}}$ $\quad \cancel{\frac{-147-7\sqrt{321}}{2} < -49}$, знач

$\cancel{x = \frac{7\sqrt{321}-147}{2}}$

$x^2+147x+980=0$

$(x+7)(x+140)=0$

$x=-140<-49$, знач

$x=-7$

2) $2\log_a b = \frac{1}{2}\log_c a = 2\log_b c - 1$

$\cancel{\log_a b = \log}$

$\log_a b^4 = \log_c a = k$

$a^k = b^4 \quad c^k = a$

$(c^k)^k = b^4$

$c^{k^2} = b^4$, тогда $\log_c b = \frac{k^2}{4}$, знач

$\frac{k}{2} = \frac{2}{\frac{k^2}{4}} - 1$

$\frac{k}{2} = \frac{8}{k^2} - 1$

$k^3+2k^2-16=0$

$(k-2)(k^2+4k+8)=0$ $\quad k^2+4k+8>0$, т.к. $D=16-32<0$, знач

$k=2$, $\log_c a = 2$, $\log_{x+1}(29-x)=2$

$(x+1)^2 = 29-x$

$x^2+2x+1 = 29-x$

$x^2+3x-28=0$

6

Чистякова Вариант 24

$D = \cancel{9+784=} = 9+112=121$

$x_{1,2}=\dfrac{-3\pm 11}{2}$ $x=\dfrac{-3+11}{2} > -1$, значит подходит

$x=-7$

3) $2\log_b c=\frac{1}{2}\log_c a=2\log_a b-1$, тут аналогичный прием, который приводит к тому что $\log_c a=2$, значит $x=-7$

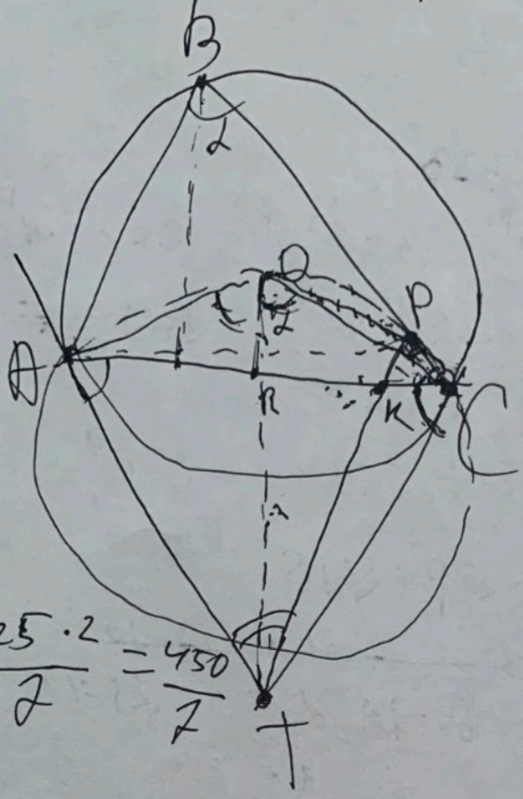
Ответ: $x=-7$; $\cancel{x=\frac{7\sqrt{321}-147}{2}}$

7

21102218 (U293435 M1295800)

5x

S_{ABC}



$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$

$\frac{1}{2}PK\cdot CP\cdot\sin\alpha=14$

$\cancel{PK\cdot CP\cdot\sin\alpha=28}$

CK

$\frac{CR}{RO}=\frac{3}{5}$

$\frac{225\cdot 2}{7}=\frac{450}{7}$

$\frac{CK}{KT}=\frac{PK}{AK}$

$\cancel{CK\cdot AK=PK}$

$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\alpha$

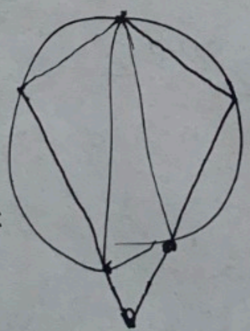
$\frac{CK}{AK}=\frac{7}{8}$

$OC=$

$\frac{CT}{CO}=$

$\frac{CT}{OC}=\frac{3}{5}$

$\frac{AC}{\sin\alpha}=2R$



$\frac{RC}{OR}$

$OR=12,5x$

$CR=2,5x$

$\frac{850}{4}=\frac{425}{2}=$

$=212,5$

$\frac{CR}{OR}=\frac{3}{5}$

$x=2y$

$y=\frac{x}{2}$

$\cancel{5\cdot 8}\cdot\ 25y$

$\cancel{25}\ \cancel{15y}$

$R=\sqrt{625y^2+225y^2}=$

$=\sqrt{850y^2}=$

$=\sqrt{\frac{850}{4}x^2}$

$CK=7x$

$AK=8x$

$CR=7,5x$

$\cancel{2,5\cdot 3}$

$\cancel{OR}$ $2,5\cdot 5$

$425\,|\,25$

$-25\quad 17$

175

$\frac{7,5x}{h}=\frac{3}{5}$

$h=\frac{5\cdot 7,5x}{3}=2,5$

$\sqrt{\frac{17\cdot 25\cdot 2}{4}}x$

$2,5\sqrt{34}x$

$12,5x$

21102218 (U293435 M1295800)

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$x > -49$

$x \neq -42$

$-x-1>0$ $\quad$ $\cancel{x<-1}$

$\cancel{2\log}$

$\frac{x}{7}+7\neq 1$ $\quad$ $29-x>0$ $\quad$ $29-x\neq 1$ $\quad$ $\frac{x}{7}+7>0$ $\quad$ $(x+1)^2\neq 0$ $\quad$ $(x+1)^2\neq 1$

$x=0$ $\quad$ $x=-2$

$$\begin{cases} x<-1 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\quad$ $\frac{1}{2}\log_{x+1}(29-x)$ $\quad$ $2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$2\log_a b$ $\quad$ $\frac{1}{2}\log_c a$ $\quad$ $49\cdot 3=$ $\quad$ $2\log_b c$

$120+27$

$x^2+147x+980=0$

$\cancel{x^2+147x}$

1) $2\log_a b = 2\log_b c$

$\cancel{2\log_c \frac{b}{c}=1}$

C_3^2 $\quad$ E^3

$x^2+147x+980 \mid x+7$

$-\; x^2+7x \quad\quad x+140$

$\quad 140x+980$

$\cancel{\log_a b}$

$x=29-a$

$\frac{29-a}{7}+7=b$

$\log_a b=\log_b c$

$a^t=b$ $\quad$ $b^t=c$

$b=\frac{29-a+49}{7}$

$(a^t)^t=c$ $\quad$ $\log_a c = t^2 = \log_a^2 b$

$a^{t^2}=c$

$b=\frac{78-a}{7}$

$\frac{1}{2}\log_a c = 2\log_a b+1$

$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2+\sqrt{6}$

$\frac{1}{2}\log_a^2 b=2\log_a b+1$

$\cancel{29-x)}$

$t^2-4t-2=0$

$(t-2)^2-6=0$

$t=1$

$\cancel{t-2=\sqrt{6}}$

$t-2=\sqrt{6}$ $\quad$ $t-2=-\sqrt{6}$

$t=\frac{1}{2}$ $\quad$ $1=\frac{1}{\frac{1}{2}}-1$

$t=2+\sqrt{6}$ $\quad$ $t=2-\sqrt{6}$

$1=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}-1$ $\quad$ $1=2-1=1$

$\cancel{AB}^2 \; AB^2$

$$\frac{AC \cdot BC}{2} \cdot \sin\angle \cancel{ABB}$$

β

$$\frac{AC \cdot AB}{2} \cdot \sin$$

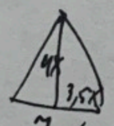
$$\frac{h \cdot 15x}{2} = 30x^2$$

$$h = \frac{60}{15}x = 4x$$

15 9

~~225 81~~

$\cancel{10z?}$
$2,6 \cdot 5 =$
$= 1$



$225 + 81 =$

$$\cancel{\frac{15}{2}} \; \frac{225}{4} + \frac{81}{4} = \frac{306}{4} = \cancel{32} \; \frac{306}{4} = \frac{153}{2}$$

21102218 (U293435 M1295800)