Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102194**

ID профиля: **825986**

Вариант 24

Чистовик   Вариант 24.

№1. $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9$ $a_1 - ?$ $a_1 = q$ $S = q + q+d + q+2d + \ldots + q+8d = 9q + \frac{8\cdot 9}{2}d =$

$a_5 a_{18} > S - 4$ $a_2 = q+d$ $= 9q + 36d$

$a_{10} a_{13} < S + 60$ $a_3 = q + 2d$

$\ldots$

$a_5 a_{18} = (q+4d)(q+17d) = q^2+21qd+68d^2 > 9q+36d-4 \quad (=(S-4)) \quad (1)$

$a_{10} a_{13} = (q+9d)(q+12d) = q^2+21qd+108d^2 < 9q+36d+60 = S-60$, т.е.

$q^2+21qd+68d^2 < 9q+36d+60-40d^2 \quad (2)$

Составим одно неравенство из (1) и (2): $9q+36d+60-40d^2 > q^2+21qd+68d^2 > 9q+36d-4$

(избавимся от одинаковых слагаемых)

$60-40d^2 > -4$

$64 > 40d^2$

$\Rightarrow d^2 < \frac{8}{5}$, но т.к. прогрессия возрастающая и все члены целые, то

$d = 1$

(иначе $a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$ и $a_2 - a_1 = d$)

Тогда запишем ещё раз условия: $\begin{cases} q^2+21q+68 > 9q+36-4 \\ q^2+21q+108 < 9q+36+60 \end{cases}$

$\begin{cases} q^2 + 12q + 36 > 0 \\ q^2 + 12q + 12 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (q+6)^2 > 0 \\ q^2+12q+12 < 0 \end{cases}$ $q \neq -6$

$q_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36-12} = -6 \pm \sqrt{24}$

$\Rightarrow q \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24})$

Проверка: $(-6+\sqrt{24}+6)^2 > 0$ - верно

$(-6-\sqrt{24}+6)^2 > 0$ - верно

$-2 < -6+\sqrt{24} < -1$ $-11 < -6-\sqrt{24} < -10$

$4 < \sqrt{24} < 5$ $-5 < -\sqrt{24} < -4$

$16 < 24 < 5$ $4 < \sqrt{24} < 5$ (+)

Таким образом, нам подходят все „q" из промежутка $[-10; -2]$, кроме $q = -6$

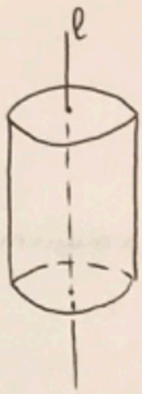
Ответ: $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$.

1

21102194 (U825986 M1301632)

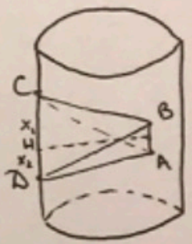
Чистовик

№2.



Пусть ось цилиндра - это прямая l.
Проведем плоскость, проходящую через середину AB и перпендикулярную ей. В ней лежат (·)C, (·)D, т.к. они по условию равноудалены от AB ($AC = CB = 7$ и $AD = DB = 8$).
Для того, что бы A и B лежали на боковой поверхности цилиндра, прямая l должна лежать в этой плоскости.
Тогда AB лежит в плоскости кругового сечения цилиндра, перпендикулярного l.

Тогда d (диаметр кругового сечения) $\geq AB \Rightarrow r \geq 2$, иначе тетраэдр будет невозможно вписать в цилиндр. Но цилиндр с радиусом 2 существует, а т.к. нам нужен наименьший радиус (по условию), то возьмем его.



Обозначим точку, в которую падает высота из середины AB на CD за (·)H. Тогда пусть $CH = x_1$, а $DH = x_2$.

Тогда по теореме Пифагора мы можем записать:

$$AC^2 = x_1^2 + 2^2 + 2^2 = 25$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{17}$$

$$BD^2 = x_2^2 + 2^2 + 2^2 = 49$$

$$\Rightarrow x_2 = \sqrt{41}$$

Тогда $CD = \sqrt{41} + \sqrt{17}$ (если (·)H лежит на CD)
$CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$ (если (·)H лежит за (·)C)

Ответ: $CD = \sqrt{41} + \sqrt{17}$; $CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$.

2

Чистовик.

№3. $M: \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10 & (1) \\ a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b, 10) & (2) \end{cases}$

В (1) ~~уравнении~~ неравенстве получается круг с центром (a, b) и радиусом $\sqrt{10}$.

Во ~~2~~ (2) ~~уравнении~~ неравенстве получается тоже круг с центром в точке (a, b) и радиусом в квадрате – $\min(-6a-2b, 10)$.

То есть их пересечение – это всегда круг.

1° Если $\min(-6a-2b, 10) = 10$, то в обоих неравенствах получился один и тот же круг с радиусом $\sqrt{10}$.

2° Если $\min(-6a-2b, 10) = -6a-2b$, то пересечением будет круг с радиусом $\sqrt{-6a-2b}$.

$S = \pi r^2$: 1° $S = \pi \cdot r^2 = \pi 10$

2° $S = \pi r^2 = \pi(-6a-2b)$

Ответ: $S = 10\pi$, если $-6a-2b \geq 10$ и $S = (-6a-2b)\pi$, если $-6a-2b < 10$.

3

Черновик

№1. $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9$

$a_1 - ?$

$a_5 a_{18} > S - 4$

$a_{10} a_{13} < S + 60$

$a_1 = a$
$a_2 = a + d$
$a_3 = a + 2d$
$\vdots$
$a_9 = a + 8d$

$S = 9a + \frac{8 \cdot 9}{2} d = 9a + 36d$

$17 \cdot 4 = 68$

$(a+4d)(a+17d) = a^2 + 21ad + 68d^2 > 9a + 36d - 4$

$(a+9d)(a+12d) = a^2 + 21ad + 108d^2 < 9a + 36d + 60$

$a^2 + 21ad + 68d^2 + 9d + 36d + 60 > 9a + 36d - 4 + a^2 + 21ad + 108d^2$

$64 > 40d^2$

$16 > 10d^2$

$8 > 5d^2$

$d^2 < \frac{8}{5} \Rightarrow d \in \left(0; \sqrt{\frac{8}{5}}\right)$ $\boxed{d=1}$

$a^2 + 9a(\ldots d - \ldots) + 68d^2 - 36d + 4 > 0$

$a_{1,2} = \frac{-21d + 9 \pm \sqrt{441 - 378d + 81 - 4 \cdot 68d^2 + 144d - 16}}{2}$

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$

$81d^2 - 2 \cdot 9 \cdot 2d + 4 = (9d-2)^2$

$81 - 68 = 13$

$13 \cdot 8 = 104$ $21 \cdot 4 = 84$ $21 \cdot 9 = 189$ 380

$a^2 + 21ad + 68d^2 > a^2$

$9a + \frac{36\sqrt{50}}{5} - 4 > 9a + 36d - 4$

$\begin{cases} a^2 + 21a + 68 > 9a + 36 - 4 \\ a^2 + 21a + 108 < 9a + 36 + 60 \end{cases}$

1) $a^2 + 12a + 36 = (a+6)^2 > 0$

2) $a^2 + 12a + 12 < 0$

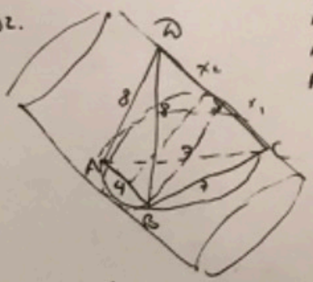
$a = -6 \pm \sqrt{24}$

$36 \quad 108 - 96 = 12$

$a_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 12} = -6 \pm \sqrt{24}$

$\sqrt{24} < 5$

№2.



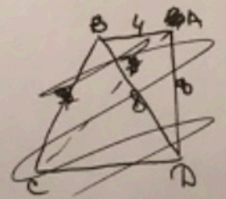
$AB = 4$
$AC = CB = 7$
$AD = DB = 8$
$CD - ?$

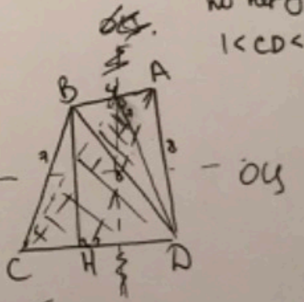
$\angle C: 16 = 2 \cdot 49 - 2 \cdot 49 \cdot \cos\alpha$

$98 \cos\alpha = 82$

$\cos\alpha = \frac{41}{49}$

по нер-ву Δ-ов:
$1 < CD < 15$





$d \geq AB \Rightarrow r \geq 2$

Тогда $r = 2$.

$AC^2 = x_1^2 + 2^2 = 2^2 + 25$

$x_1 = \sqrt{17}$

$x_2^2 = 8 \cdot 49 \ldots \Rightarrow x_2 = \sqrt{41}$

$CD = \sqrt{41} \pm \sqrt{17}$

Черновик

$\sqrt{10} \approx 3,\dots$

$-6a - 2b > 0$

$-3a > b$

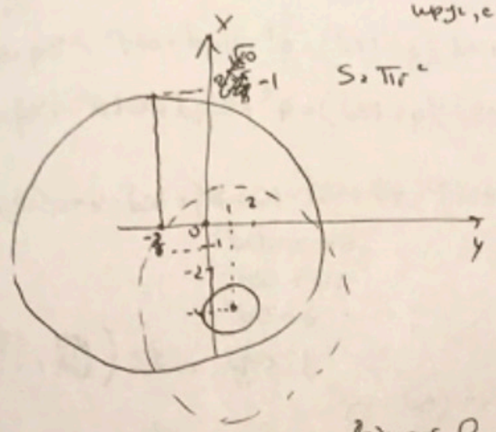
M: $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 10 & (1) \\ a^2 + b^2 \leq \min(-6a-2b, 10) & (2) \end{cases}$ — круг, с радиусом

круг, с ради

a, b не могут быть обе > 0

$1^\circ\ a > 0 : b < 0$

$2^\circ\ a < 0 : b$ - люб.



$S = \pi r^2$

Пусть $a = 1 : b = -4$

$-6a - 2b = 2$

$S = 3,14 \cdot 2 = 6,28$

$a = 1,\ b = -1$

(2) круг всегда $\leq$ (1), т.к. есть ограничение на радиус $\sqrt{10}$.

(1) и (2) круги с одинаковым центром => их пересечение тоже всегда будет кругом

$\Rightarrow \underline{S = \pi \cdot \min(-6a-2b, 10)}$ (если $-6a-2b < 10 : S = \pi \cdot (-6a-2b)$
если $-6a-2b \geq 10 : S = \pi \cdot 10$))

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102194**

ID профиля: **825986**

Вариант 24

Чистовик

№4. (a, b, c): $\begin{cases} НОД(a; b; c) = 33 & (1) \\ НОК(a; b; c) = 3^{13} \cdot 11^{15} \end{cases}$, т.е. a, b и c состоят только из „3" и „11"

из (1) можем сделать вывод: $a = 33 \cdot a_1$, $b = 33 \cdot b_1$, $c = 33 \cdot c_1$, где $\begin{cases} НОК(a_1, b_1, c_1) = 3^{16} \cdot 11^{12} \\ НОД(a_1, b_1, c_1) = 1, \end{cases}$

то есть обязательно найдется число $\not\vdots 3$ и число $\not\vdots 11$.

Тогда посмотрим, в каких степенях x и y могут входить 3 и 11 в другие два числа:

$\vdots 3$: $x_1 + y_1 = 16$, т.е.

x_1	0	1	2	3	...	15	16
y_1	16	15	14	13		1	0

17 вариантов и выбрать число, которое $\not\vdots 3$ из a, b и c - 3 варианта

итого: $17 \cdot 3 = 51$

$\vdots 11$: $x_2 + y_2 = 12$, т.е.

x_2	0	1	2	...	10	11	12
y_2	12	11	10		2	1	0

13 вариантов и 3 варианта числа $\not\vdots 11$

итого: $13 \cdot 3 = 39$

Получается, что при каждом варианте вхождения „11" в число a, b и c, есть 51 вариант вхождения „3". То есть всего троек a, b, c может быть $39 \cdot 51 = 1989$, и все они будут различные.

Ответ: 1989.

1

Чистовик.

№5. Обозначим: $p = 29 - x$, $q = \frac{x}{7} + 7$, $r = -x - 1$.

$\log_{\sqrt{p}} q = 2\log_p q$; $\log_{r^2} p = \frac{1}{2}\log_r p$; $\log_{\sqrt{q}} r = 2\log_q r$ – логарифмы из условия, два из которых равны, а третий больше на 1

Перемножим их: $(2\log_p q)\cdot\left(\frac{1}{2}\log_r p\right)\cdot(2\log_q r) = 2\cdot\underline{\log_p q\cdot\log_r p}\cdot\log_q r =$

$= 2\log_r q\cdot\log_q r = 2\cdot 1 = 2$

Пусть два из них равны A, а третье $(A+1)$: $A\cdot A\cdot(A+1) = 2$

$A^3 + A^2 - 2 = 0$

$(A-1)(A^2+2A+2) = 0$

$D = 4 - 2\cdot 4 < 0 \Rightarrow$ корней нет

$\Rightarrow A = 1$

Тогда $\log_{\sqrt{p}} q = 1$ или $\log_{\sqrt{p}} q = 2$, т.е. $\sqrt{p} = q$ или $p = q$, если $p<0$, то корень неопределён

$\Downarrow$

$p = q^2$

$p = q^2 \Rightarrow 29 - x = \left(\frac{x}{7} + 7\right)^2$

$\frac{x^2}{49} + 3x + 20 = 0 \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} -7 \\ -140 \end{array}\right.$

$p = q \Rightarrow 29 - x = \frac{x}{7} + 7$

$x = 22\cdot\frac{7}{8} = \frac{77}{4}$

Проверка: $x = \frac{77}{4} \Rightarrow p = \frac{39}{4}, q = \frac{39}{4}, r = -1 - \frac{77}{4} < 0$?! – не может быть

$x = -7 \Rightarrow p = 36, q = 6, r = 6$ – подходит

$x = -140 \Rightarrow p = 169, q = -13, r = 141$, но $q<0$?! – не может быть

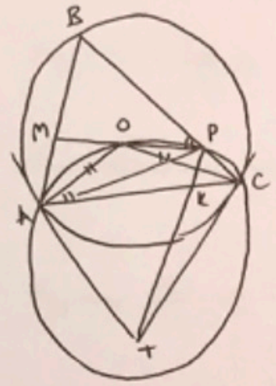
Ответ: $x = -7$.

2

21102194 (U825986 M1301633)

Чистовик

№6.



S_{ABC} - ?

а.) $\angle AOC = 2\angle ABC$

$\Rightarrow \angle OAC = 90^\circ - \frac{\angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC$, т.к. O - центр окр ($AO = OC$)

$\angle OPB = \angle OAC = 90^\circ - \angle ABC$

$\Rightarrow OP$ - сер.пер к AB

(.) M - середина $AB \Rightarrow AP = BP$

$\frac{AP}{CP} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle PTC}$ (точки одной окр.) $= \frac{AK}{KC}$ ($\triangle ATC$ - р/б)

$\frac{AP}{CP} = \frac{AK}{KC} = \frac{16}{14}$, т.к. $S_{APK} = 16$ и $S_{CPK} = 14$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{16}{14} \Rightarrow S_{ABP} = \frac{16}{14}(16+14)$

($BP = AP$)

$\Rightarrow S_{ABC} = 30 + S_{ABP} = 30 + \frac{16}{14}(16+14) = 30 + \frac{240}{7}$

Ответ: $30 + \frac{240}{7}$.

3

Черновик

4. (a,b,c): $\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=33=3\cdot 11 \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{18}\cdot 11^{15} \end{cases}$

НОК$\left(\frac{a}{33};\frac{b}{33};\frac{c}{33}\right)=3^{16}\cdot 11^{12}$

$\begin{array}{r} 39 \\ \times 51 \\ \hline 39 \\ 195 \\ \hline 1989 \end{array}$

0,16
1,15
...
8,8
...
16,0 $\Big\}$ 17 · 3

0,0,12
0,1,11
0,2,10,
...
0,6,6
0,11,1
0,12,0 $\Big\}$ 13 · 3

пар: 0,12
1,11
2,10
3,9
4,8
5,7
6,6 $\Big\}$ 7

Ответ: 39 · 51 = 1989

$\log_{\sqrt{28-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{\sqrt{28-x}}(x+1)^2=2$

$\left(\frac{x}{7}+7\right)(x+1)^2=(28-x)\cdot 2\cdot 7$

$(x+49)(x^2+2x+1)=x^3+51x^2+99x+49=1946-14x$

$x^3+51x^2+113x-1854=0$

$\frac{2}{\log_{\sqrt{28-x}}\sqrt{\frac{x}{7}+7}}+1=\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

5. $\log_{\sqrt{28-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(28-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$-x-1>0$

$\boxed{-49<x<-1}$

$\frac{x}{7}+7>0$

$x>-49$

$\log_a b=x$

$a^x=b$

$\frac{x}{7}+7\neq 1$

$x\neq -42$

1° ~~...~~] $\sqrt{28-x}=p$

$(-x-1)=r$ $x=22\cdot\frac{7}{8}=\frac{77}{4}$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}=q$ / $p=q^2$

$p=q$

1° $\log_p q^2=\log_r p^2$, $\log_q r$

$1=2=3-1$

1° $\log_c c^2=\log_c b=\log_{c^2}(a^2-b^2)$

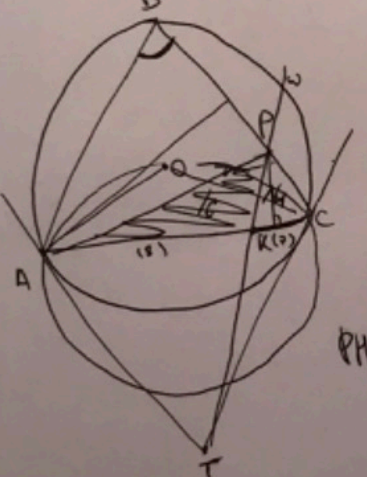
$\log_{(x+1)^2}(28-x)=\frac{\log_{\sqrt{28-x}}(28-x)}{\log_{\sqrt{28-x}}(x+1)^2}=\frac{2}{\log\ldots}$

$p=9y+15x+3\sqrt{25x^2-y^2}$

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{(9y+15x+3\sqrt{25x^2-y^2})(5y+15x)(9y+3\sqrt{25x^2-y^2})(4y+15x+3\sqrt{25x^2-y^2})}$

$AH=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{BC}$

6.



$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$

а) S_{ABC} – ?

б) $\angle ABC=\operatorname{arcctg}\frac{3}{5}$

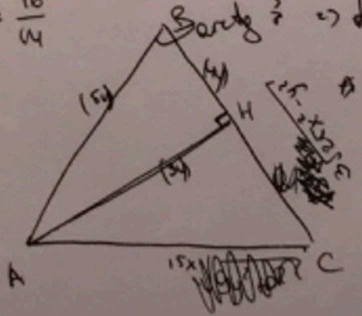
AC – ?

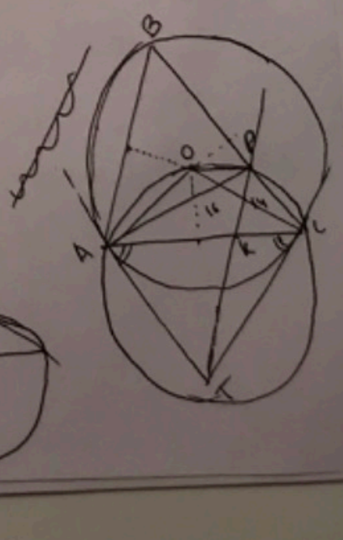
$\angle OAP+\angle OPA=\angle ABP$

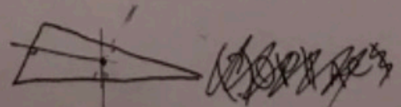
$\frac{AK}{KC}=\frac{16}{14}$ (8x, 7x)

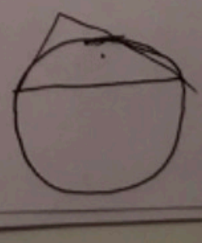
$PH=4x$

$B=\operatorname{arcctg}\frac{3}{5}\Rightarrow \operatorname{ctg} B=\frac{3}{5}$

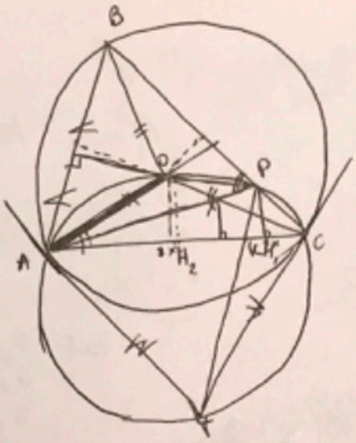








21102194 (U825986 M1301633)



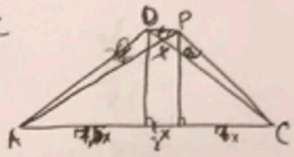
$S_{APK} = 16$ S_{ABC} - ?

$S_{CPK} = 14$ $S_{APC} = 30$

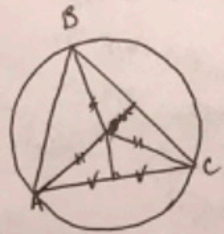
AO = OC

$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC$

$H_1H_2 = 0,5$



AXC = 30 - a



$$2^\circ \quad \frac{2}{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}} \sqrt{28-x}} = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}} (-x-1)$$

$$2 = \log_{\sqrt{\dots}} (-x-1) \log_{\sqrt{\dots}} (\sqrt{28-x})$$

$$2 \cdot \frac{x}{7} + 14 = (-x-1)(\sqrt{28-x})$$