Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101988**

ID профиля: **86748**

Вариант 24

$$\frac{a_1+a_9}{2}\cdot 9 = S$$
$$a_5 a_{18} > S-4$$
$$a_{10} a_{13} < S+60$$
$$\Rightarrow \frac{2a_1+8d}{2}\cdot 9 = S$$
$$(a_1+4d)(a_1+17d) > S-4$$
$$(a_1+9d)(a_1+12d) < S+60$$
$$a^2+21ad+4\cdot 17d^2 \geq S-4$$
$$a^2+21ad+9\cdot 12d^2 \leq S+60$$

$4\cdot 17 = 68d^2$
$108d^2$

$m + 68d^2 > S-4$
$m + \cancel{108}\, d^2 < S+60$
$40d^2 \in [0;64]$
$d^2 \in [0;\frac{64}{40})$

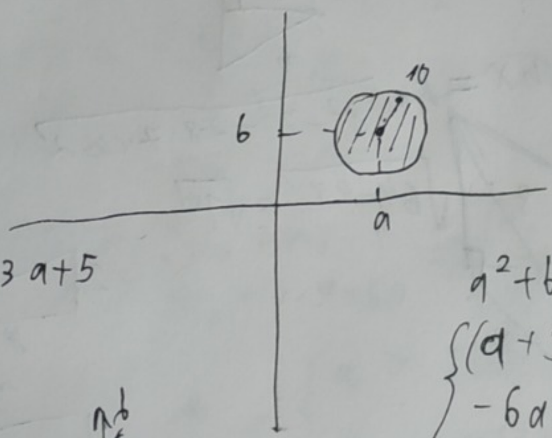
$\frac{64}{40} = \frac{16}{10} = d^2 \leq 1{,}6$

$d = 1$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10$
$a^2+b^2 \leq \min(-(6a+2b), 10)$

$-2(3a+b) = 10$

108
-96
12



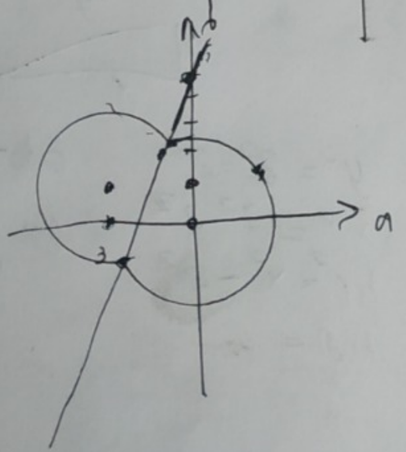
$3a+5$

$a^2+b^2+6a+2b+1+9 \leq 10$

$\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10 \\ -6a-2b \leq 10 \Rightarrow 3a-b \geq -5\end{cases}$

$\begin{cases}a^2+b^2 \leq 10 \\ 3a-b \leq -5\end{cases}$

68
-32
36

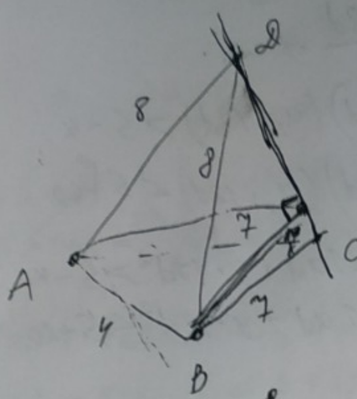


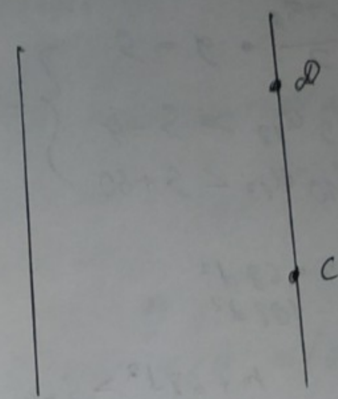
$(a_1+6)^2 > 0$
$a_1^2+12a_1+36 > 0$

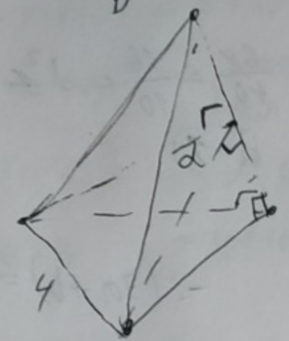
$a_1^2+12a_1+108-36-60 < 0$
$a_1^2+12a_1+12 < 0$

≈ 5

$a_1 = \frac{-12+\sqrt{144-48}}{2} = -6+\sqrt{24} \in [-2; \boxed{-1}]$
$= -6-\sqrt{24} \in (\boxed{-10}; -11$

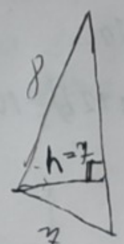




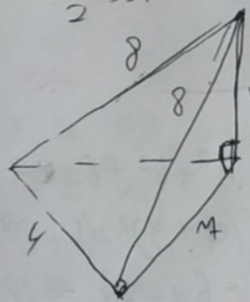


$\frac{4}{\sin\alpha} \to \min$

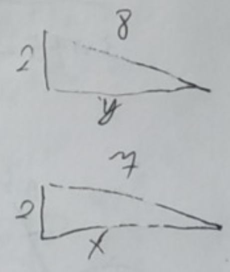
$\sin\alpha \to \max$



$\frac{8\cdot 7}{2}\sin x = h\cdot\sqrt{8^2+7^2-2\cdot 8\cdot 7\cdot\cos\alpha}$



$\sqrt{64-49}=\sqrt{15}$



$y^2 = 8^2-2^2$ $\quad 64-8=56$

$x^2 = 7^2-2^2$ $\quad 49-8$

$HC^2 = x^2-2^2$

$HD =$

Вар 24 Чистовик

№1

$S = \frac{a_1+a_9}{2}\cdot 9 = \frac{2a_1+8d}{2}\cdot 9$, где d - разность прогрессии

$\begin{cases} a_5 a_{18} > S-4 \\ a_{10} a_{13} < S+60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+4d)(a_1+17d) > S-4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d) < S+60 \end{cases}$ (*)

$\begin{cases} a_1^2 + 21ad + 4\cdot 17 d^2 > S-4 \\ a_1^2 + 21ad + 9\cdot 12 d^2 < S+60 \end{cases} \Rightarrow (\overset{108}{9\cdot 12} - \overset{68}{4\cdot 17})d^2 \in (0;64)$

Т.к $108d^2 \geq 68d^2 \Rightarrow$ $\max(40d^2) = S+60-(S-4) = 64$, $\min(40d^2) = S-4-(S-4) = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 40d^2 \in (0;64) \Rightarrow d^2 \in (0;\frac{16}{10}) \Rightarrow d^2 \in (0;1{,}6)$

По усл: $a_1, a_2 \ldots$ - целые $\Rightarrow$ d - целое, $d > 0$ (возраст прогр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d=1}$ Подставим в (*):

$\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17) > \frac{2a_1+8}{2}\cdot 9 - 4 \\ (a_1+9)(a_1+12) < \frac{2a_1+8}{2}\cdot 9 + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 4\cdot 8 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 4\cdot 9 + 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{(a_1+6)^2}{a_1^2+12a_1+36} > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a \in R \setminus \{-6\} \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 > \frac{-12-\sqrt{12^2-4\cdot 12}}{2} \\ a_1 < \frac{-12+\sqrt{12^2-4\cdot 12}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 > -6-\sqrt{24} \\ a_1 < -6+\sqrt{24} \end{cases}$

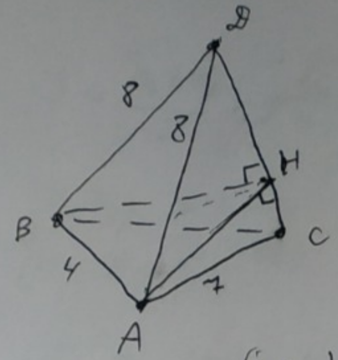
$a_1 \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24})$

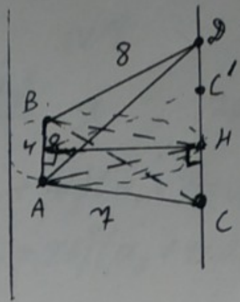
$\sqrt{24} \in (4;5) \Rightarrow a_1 \in [-10;-2]$ для целых a_1

имеем: $\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ a_1 \in [-10;-2] \end{cases} \Rightarrow a_1 = \{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2\}$

Ответ: $\{-10;-9;-8;-7;-5;-4;-3;-2\}$

№2 чистовик





Дано: $AC = CB = 7$; $AD = DB = 8$

$AB = 4$

Найти: CD

Решение: ($HO \perp AB$)

ось цилиндра параллельна $CD \Rightarrow CD$ – лежит на боковой поверхности цилиндра.

Построим пл-ть $ABH \perp DC$ (в ней сечение) цилиндра – окружность. По th sin $\triangle ABH$:

$\frac{4}{\sin(\angle AHB)} = R$, где R – радиус цилиндра.

в силу симметрии данной композиции тел отн пл-ти HOD ($AC = CB$; $AD = DB$): $BH = HA$

$R = R_{min} \Rightarrow \frac{4}{\sin(\angle AHB)} \to min \Rightarrow \sin(\angle AHB) = \sin_{max}(\angle AHB) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AHB = 90° \Rightarrow$ он опирается на диаметр $\Rightarrow R = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow HO = R = 2 \Rightarrow DC = DH + CH$ (*)

По th Пифагора
$\triangle BOD: OD = \sqrt{8^2 - 2^2}$
$\triangle BOC: OC = \sqrt{7^2 - 2^2}$
$\triangle OHC: OC^2 - OH^2 = HC^2$
$\triangle OHD: OD^2 - OH^2 = DH^2$
(оба – половинки равнобедр) $\Rightarrow$

(*)

$\Rightarrow DC = \sqrt{8^2 - 2^2 - 2^2} + \sqrt{7^2 - 2^2 - 2^2} = \sqrt{64 - 8} + \sqrt{49 - 8} = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

Ответ: $\sqrt{56} + \sqrt{41}$; $\sqrt{56} - \sqrt{41}$

Или же $\sqrt{56} - \sqrt{41}$, если C и D находятся по 1 сторону от (·)H Аналогично с по разные сторона

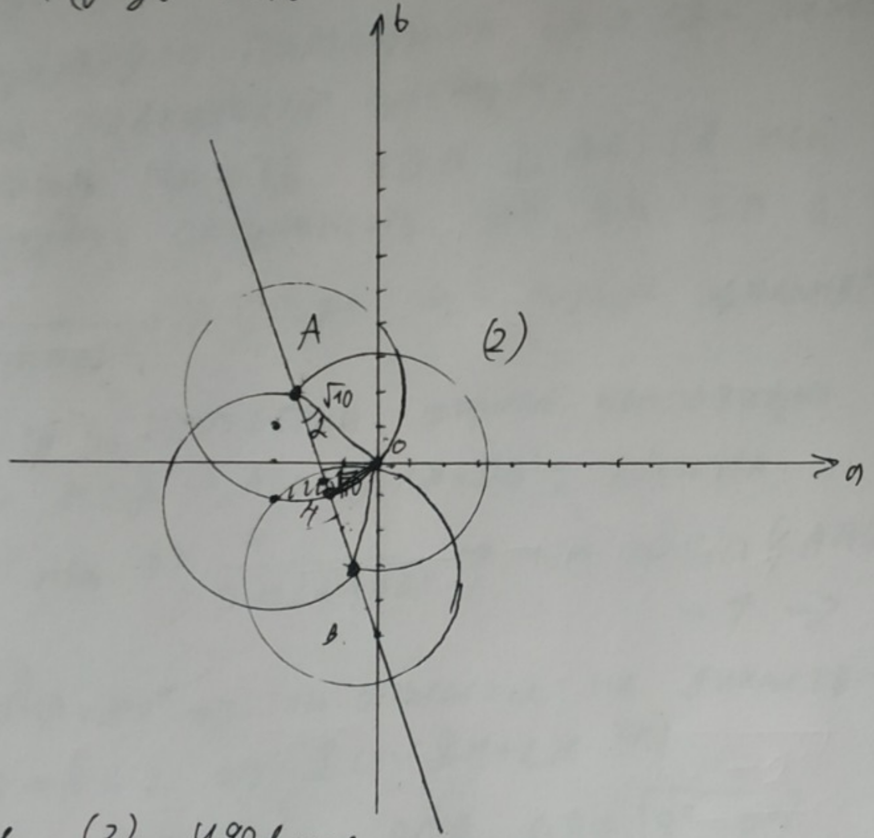
Лист 2

N3 чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10) & (2)\end{cases}$$

(2) $\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10, & -6a-2b \le 10 \Rightarrow b \ge -3a-5 \quad (b=-3a-5)\\ a^2+b^2 \le 10, & -6a-2b \ge 10 \Rightarrow b \le -3a-5\end{cases}$

(1) $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 10$



системе (2) удовлетворяют лишь 2 точки A, B $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$ – два круга с центрами в A и в B, радиуса $\sqrt{10}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = 2\pi\cdot 10 - S_{\text{пересеч}}$; $OH \perp AB$; $OH = \dfrac{1\frac{2}{3}\cdot 5}{\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+5^2}}$

$\sin\alpha = \dfrac{OH}{\sqrt{10}}$; $S_{\text{пересеч}} = 2\cdot 10\cdot 2\alpha - \frac{10}{2}\sin 2\alpha$

ЛИСТ 3

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101988**

ID профиля: **86748**

Вариант 24

$a = 33x$ $\quad a = 5 \cdot 3 \cdot 11$

$b = 33y$ $\quad a = 3^x \cdot 11$

$c = 33z$

$xy + x + y + 1$

$x(y+1)$

$(x+1)(y+1) = xy + x + y + 1$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right), \quad \frac{1}{\log_{\sqrt{29-x}}(x+1)}$

$x \qquad y$

$xy = \log_{(x+1)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)}$

$xy = \log_{(x+1)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\frac{1}{z} = \log_{(-x-1)}\left(\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right) = \frac{1}{2}xy$

$2 = xyz$

$x = 1$ – корень

$324 \times 2 =$

648×14

2592

6480

9072

$xx(x+1) = 2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0$

$x^3 + x^2 - 2 \mid x - 1$

$x^3 - x^2 \mid x^2 + 2x + 2$

$2x^2 - 2$

$2x^2 - 2$

$(x^2+2)(x-1) = 0$

$3^x \cdot 11^y = a$ $\qquad 33 \quad 33 \cdot 3^{19} \cdot 11^{75}$

$3^a \cdot 11^b$ $\qquad 3 \cdot 11^2$

$3^c \cdot 11^z$ $\qquad 3^2 \cdot 11$

$36 \cdot 17 \cdot 13$ $\quad 18 \cdot 17 \cdot 2$

$3^x \cdot 11^y$; $3^7 \cdot 11^7$; 2; 18

$18 \cdot 2 \cdot 13$ $\quad 9 \cdot 2 \cdot$

3^x

11^y

3

11

3^{19}

11^{75}

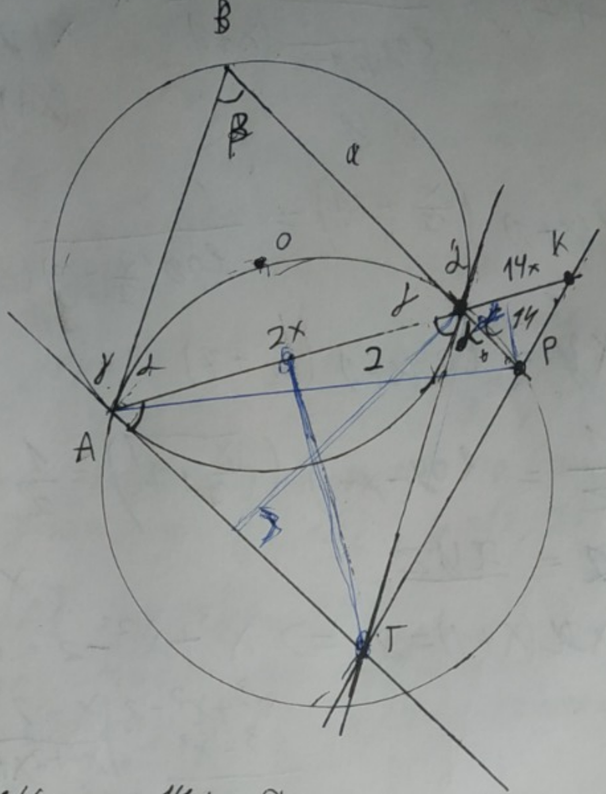
$3! \cdot 3!$; $x \neq \{1; 19\}$; $y \neq \{1; 75\}$

$\frac{3!}{2!} \cdot 3!$: $x = \{1; 19\}$, $y \neq 1; 75$

$3! \cdot \frac{3!}{2}$: $x \neq \{1; 19\}$; $y = 1; 75$

$\frac{3! \cdot 3!}{4}$: $x = \{1; 19\}$; $y = \{1; 15$

21101988 (U86748 M1301811)



$$\frac{14}{5} = \frac{14b}{2a}$$

$$aZ = \frac{Z}{\frac{1}{a}} = \frac{\log_{\sqrt{a}} b}{\log_a c} = 2\log_c b$$

$\frac{14}{5} = \frac{14\cancel{x}\cdot a}{2x\cdot b}$ Δ CKP; ΔABC

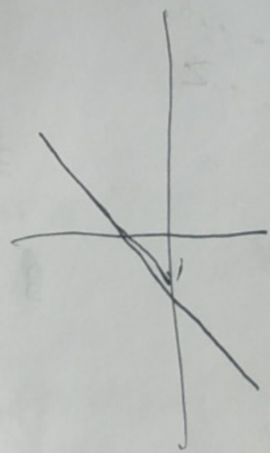
$\frac{2}{5} = \frac{b}{a}$ Δ ACP; ΔABC

$\frac{14}{c} = \frac{14c}{4} \Rightarrow \boxed{c = 2}$

$(x+1)^2 = 29 - x$ $\quad x^3 + x^2 - 2 \,|\, x-1$, x^2

$x^2 + 3x - 28 = 0$

$(x+7)(x-4)$



-7

21101988 (U86748 M1301811)

Вар 24 чистовик

№4

НоК наших чисел делится лишь на степени тройки и 11 $\Rightarrow$ наши числа делятся лишь на 3 и на 11 в некоторой степени. Нок равен $3 \cdot 11$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ существуют числа одно из которых делится лишь на 3^{7}, второе на 11^{7}; все числа не превышают НоКа, но имеется число делящееся на 11^{15} и другое на 3^{19} (иначе НОК уменьшится) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Имеем: $3^{x}; 11^{y}; 3; 11; 3^{19}; 11^{15}$ – эти пять множителей надо „раскидать" по 3м числам; учесть случаи $x = \{1; 19\}$; $y = \{1; 15\}$

1) $x \in [2; 18]$; $y \in [2; 14]$

в каждое число мы выбираем одну из 3х степеней тройки; и 1 из 3х степеней 11:

выберем x: C_{17}^{1}; y: C_{13}^{1};

случаев: $17 \cdot 13 \cdot 3! \cdot 3!$

2) $x \in \{1; 19\}$; $y \in [2; 14]$, степени 3 повторяются дважды

случаев: $\frac{3!}{2} \cdot 3! \cdot 2 \cdot 13$

3) $x \in [2; 18]$; $y \in \{1; 15\}$ аналогично п. 2:

случаев $\frac{3! \cdot 3!}{2} \cdot 2 \cdot 17$

4) $x \in \{1; 19\}$; $y \{1; 15\}$ повтор ~~ст~~ степеней 3, и 11

случаев: $\frac{3! \cdot 3!}{2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2$

Всего: $36 \cdot 17 \cdot 13 + 36 \cdot 17 + 36 \cdot 13 + 36 = 36 \cdot (17 \cdot 13 + 17 + 13 + 1) =$
$= 36 \cdot 18 \cdot 14 = 648 \cdot 14 = 9072$

Ответ: 9072

N5 чистовик

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right),\ \log_{(x+1)^2}(29-x),\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$$

$$\underset{a}{\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)} \qquad \underset{b}{\log_{(x+1)^2}(29-x)} \qquad \underset{z}{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{ab}{\cancel{b}} &= \frac{\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)}{\log_{\sqrt{29-x}}(-x-1)} = \log_{-x-1}\left(\frac{x}{7}+7\right) \\ \frac{1}{z} &= \log_{-x-1}\left(\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right) = \frac{1}{2}\log_{-x-1}\left(\frac{x}{7}+7\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2}{z} = \frac{ab}{\cancel{b}}$$

$abz = 2$

~~$\Rightarrow z = 2b$~~

~~1) $z = a$; $b = a+1$ $\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 3$; $(a-1)^2 = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1-\sqrt{3} \\ a = 1+\sqrt{3} \end{array}\right.$~~

~~$a^2 = 2a+2$~~

~~2) $a = b$; $z = a+1$~~

~~$a(a+1) = 2a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$~~

~~3) $z = b$, $a = z+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$~~

~~$z(z+1) = 2z$~~

$29 - x = x + 1$

$2x = 30 \quad x = 15$

По усл

$x_1(x_1+1)x_1 = 2 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_1^2 + 2x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad (x_1^2 + 2x + 2) > 0$

1) $x_1 = a = b$: $\begin{cases} \frac{x}{7} + 7 = \sqrt{29-x} \\ (x+1)^2 = 29 - x \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -7}$; $x = 4$ не подходит

2) $x_1 = z = a$ $\begin{cases} \frac{x}{7} + 7 = \sqrt{29-x} \\ -x - 1 = \sqrt{\frac{x}{7}+7} \end{cases}$ $\varnothing$ $\quad b = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 29 - x = x + 1 \Rightarrow x = 15 \\ 29 - x = -x - 1 \ \varnothing \end{array}$

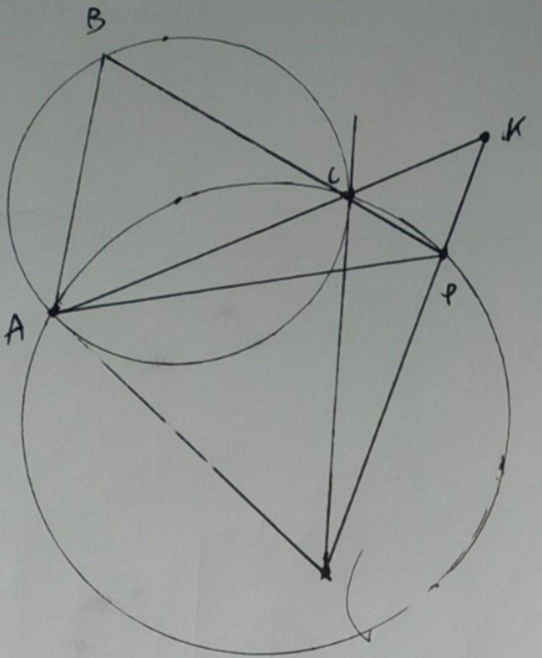
не подходит по одз

3) $x_1 = z = b$ $\begin{cases} -x - 1 = \sqrt{\frac{x}{7}+7} \\ (x+1)^2 = 29 - x \end{cases}$ $\varnothing$

Ответ: -7

лист 2

№6 чистовик



Решение:

1) ΔACP, ΔCKP в Δ с одинак высотами площади относятся как основания $\Rightarrow \frac{AC}{CK} = \frac{2}{14}$

2) $\angle BCA = \angle KCP$ – вертик $\Rightarrow \Delta ABC, \Delta CKP$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CKP}} = \frac{BC \cdot AC}{CK \cdot CP}$; $\Delta ABC, \Delta ACP$ аналогично п. 1:

$\frac{S_{ABC}}{S_{ACP}} = \frac{BC}{CP}$ $\Rightarrow$ $S^2_{ABC} = 14^2 \cdot 2^2 \Rightarrow S_{ABC} = 14 \cdot 2 = 28$

Ответ: $S_{ABC} = 28$

лист 3

21101988 (U86748 M1301811)