Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101895**

ID профиля: **142738**

Вариант 24

Черновик

$a_1 + 36b = S$

$(a_1 + 4b)(a_1 + 17b) > S - 4$

$(a_1 + 9b)(a_1 + 12b) < S + 60$

$a_1^2 + \cancel{\ldots} 21a_1b + 68b^2 > S - 4$

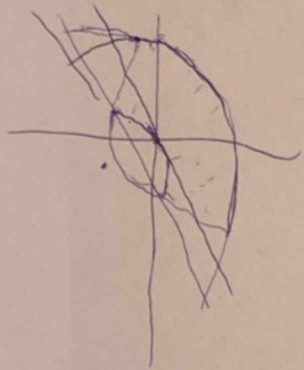
$a_1^2 + 21a_1b + 112b^2 < S + 60$

$a_1^2 + 21a_1b + 68b^2 - a_1 - 36b + 4 > 0$

$a_1^2 + 21a_1b + 112b^2 - a_1 - 36b - 60 < 0$

$44b^2 < 64$

$b = 1$



$-6a - 2b \geq 0$

$b \leq -3a$

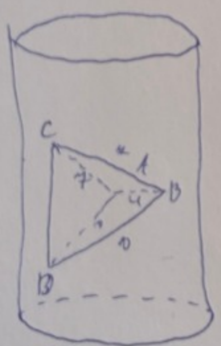
$-6a - 2b \geq 10$

$b \leq -3a - 5$

$a^2 + b^2 \leq -6a - 2b$

$a^2 + 6a + 9 + b^2 + 2b + 1 \leq 10$

$(a + 3)^2 + (b + 1)^2 \leq 10$



$x^2 + y^2 = 10$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 +$

Чистовик

12) Их площади в сумме

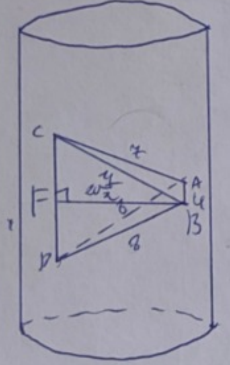
$2 * S\left(AC_{сект}\right) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\angle ABC}{360^\circ} = 2\pi \cdot 10 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = 2\pi \cdot 10 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ половина площади всей фигуры и $\underset{(п.11)}{10\pi} + \frac{5\pi}{3} = \frac{35\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ площадь всей искомой фигуры $2 \cdot \frac{35\pi}{3} = \frac{70\pi}{3}$

Ответ: $\frac{70\pi}{3}$

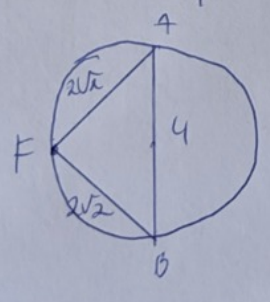
№2



1) Так как CD параллельна оси цилиндра, а ACB и ABD - равнобедренные треугольники, то AB - перпендикулярно оси.

2) по пункту 1 следует, что минимальный диаметр цилиндра в который можно было бы так поместить ABCD это AB, то есть 4, так как AB является хордой в окр. с диаметром как у основания, то чтобы радиус был наименьшим, AB должна стать наибольш. хордой, то есть диаметром

3) поставим. т. F | BF ⊥ CD



по Т Пифагора ^{ABF} $BF = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по Т Пифагора CFB и DFB

$CF^2 = 49 - 8 =$

$FD^2 = 64 - 8$

21101895 (U142738 M1300843)

Чистовик

страница 4

7) построение нашей половины закончено, теперь найти площадь (точка A и т. F попали на Г $y=-3x$ в силу симметрии Г $y=-3x-10$ на котором располагается O_1 и Г $y=-3x$, так как мы удваивали O_1B и O_1E)

8) ~~Найдем~~ Посчитаем координаты E и B

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ y=-3x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+9x^2+30x+25=10 \quad (3) \\ y=-3x-5 \end{cases}$$

(3) $10x^2+30x+25=10$

$2x^2+6x+3=0$

$D_1=9-6=3$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{-3-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{19+3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad E \\ \begin{cases} x=\frac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{19-3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad B \end{array}\right. \Rightarrow EB=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{3+27}=\sqrt{30}$$

9) По теореме косинусов $\triangle O_1EB$

$O_1E^2+O_1B^2-2\cdot O_1E\cdot O_1B\cdot\cos EO_1B=EB^2$

$10+10-20\cdot\cos EO_1B=30$

$\cos EO_1B=-\frac{1}{2}\Rightarrow \angle EO_1B=120^\circ \underset{\text{равнобедр.}\triangle}{\overset{\text{по св.}}{\Longrightarrow}} \angle O_1EB \overset{\text{верт}}{=} \angle BEF = \frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$

$\angle O_1BE \overset{\text{верт}}{=} \angle ABC$

10) площадь между дугой AF и дугой BE - разность двух секторов

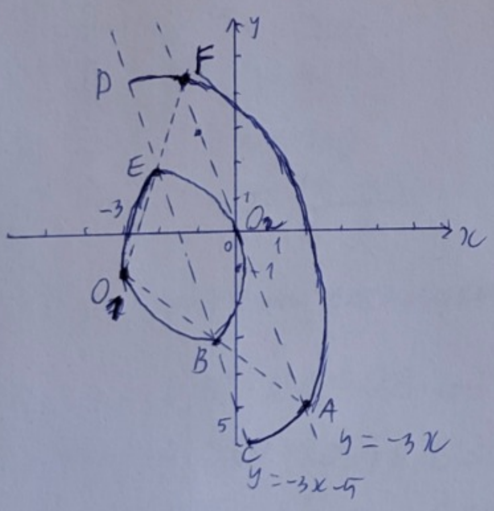
$S(\underset{\text{сект.}}{AF})-S(\underset{\text{сект.}}{BE})=\pi(2R_{\omega})^2\cdot\frac{\angle EO_1B}{360}-\pi R_{\omega_1}^2\cdot\frac{\angle EO_1B}{360}=3\pi R_{\omega_1}^2\cdot\frac{\angle EO_1B}{360}=$

$=3\pi\cdot10\cdot\frac{1}{3}=10\pi$

11) оставшиеся две части это два сектора с центром B и E и радиусом $\sqrt{10}$ (так как граница $(x;y)$ должна находиться на расст. $\sqrt{10}$ от границы ГМТ$(a;b)$)

Чистовик

3) Заметим, что центр ~~[illegible]~~ первого круга лежит на графике функции $y=-3x-10$, так как $-1=-3\cdot(-3)-10$ верно, а радиус вектор, то есть O_2O_1 перпендикулярен графикам функций $y_1=-3x$, $y_2=-3x-5$, $y_3=-3x-10$, а также график $y_2=-3x-5$ лежит ровно между y_1 и y_3 ($y_2=\frac{y_1+y_3}{2}$), то получается, что центры окружностей симметричны относительно Г $y_2=-3x-5$, который их ограничивает. Так как окружности имеют ещё и одинаковый радиус, то они будут пересекать Г $y_2=-3x-5$ в совпадающих точках



4) Показанная на рисунке фигура это ГМТ точек (a;b).
По неравенству (1) каждая точка границы фигуры M должна быть не дальше $\sqrt{10}$ от ГМТ точек (a;b)

5) так как фигура симметрична относительно $y=-3x-5$, то я найду её площадь в полуплоскости $y>-3x-5$ и умножу на 2

6) Заметив, что построив ~~[illegible]~~ подобную дугу окружности в 2 раза больше получим часть границы M, так как каждая точка новой дуги будет удалена на $\sqrt{10}$ только от одной точки первой дуги.
Для построения границы M между Г $y=-3x-5$ и Г $y=-3x$ заметим, что какую бы точку ~~[illegible]~~ из угла ABC мы бы не выбрали, самой ближайшей всегда будет точка B из всей первой дуги, таким образом просто построим дугу окружности радиуса $\sqrt{10}$ с центром в т B и аналогично для другой стороны нашей фигу-

Чистовик

$a_1 \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24})$
$a_1 \in \mathbb{Z}$
по неравенству (1) и (2)

$\Rightarrow a_1 \in [-10; -2]$

Вспомнив, что из первого ~~нера неравен~~ неравенства данного в условии мы получили $a_1 \neq -6$, ~~мы~~ получаем

Ответ: $a_1 \in [-10; -6) \cup (-6; -2]$, $a_1 \in \mathbb{Z}$ или $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 10 & (1) \\ a^2 + b^2 \leq \min(-6a-2b, 10) & (2) \end{cases}$$

1) Сначала найдём ГМТ точек $(a; b)$ с помощью неравенств

(2) $a^2 + b^2 \leq \min(-6a-2b, 10)$

$a^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow -6a - 2b \geq 0$, чтобы a и b существовали

$b \leq -3a$

2) Рассмотрим два случая

$0 \leq -6a - 2b < 10$

$-3a \geq b > -3a+5$

В этом случае

$a^2 + b^2 \leq -6a - 2b$

$(a+3)^2 + (b+1)^2 \leq 10$ (графике $\omega_1((-3;-1); \sqrt{10})$ $O_1(-3; -1)$

так $\vec{r}(-3; -1) \perp \Gamma\ y = -3x$, то

$\rho((-3; -1); \Gamma\ y=3x) = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} = R_{\omega_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ круг будет ограничивать только $y = -3x+5$

$-6a - 2b \geq 10$

$b \leq -3a - 5$

В этом случае

$a^2 + b^2 \leq 10$

график границы $\omega_2((0;0); \sqrt{10})$ $O_2(0; 0)$

круг ограничивается только

$y = -3x+5$

21101895 (U142738 M1300843)

Чистовик

страница 1

№1

Пусть первый член данной прогрессии – a_1, а её разность – b.

1) Тогда

$$S = a_1 + (a_1+b) + \ldots + (a_1+8b) = 9a_1 + 36b$$

$$\begin{cases} a_5 a_{18} > S-4 \\ S+60 > a_{10}a_{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+4b)(a_1+17b) > S-4 \\ S+60 > (a_1+9b)(a_1+12b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+21a_1b+68b^2 > S-4 \\ S+60 > a_1^2+21a_1b+108b^2 \end{cases} +$$

$$(a_1^2+21a_1b+S)+68b^2+60 > (a_1^2+21a_1b+S)+108b^2-4$$

$$64 > 40b^2$$

$$b^2 < \frac{64}{40} = \frac{8}{5}$$

Так как прогрессия целых чисел возрастающая, то $b \in \mathbb{Z}$; $b>0 \Rightarrow b^2>0$, $b^2 \in \mathbb{Z}$, $b^2 < \frac{8}{5}$ $\Rightarrow b^2 = 1$, $\underline{b=1}$ $(b>0)$

2) $a_5 a_{18} > S-4$ $\boxed{b=1}$

$(a_1+4)(a_1+17) > S-4$

$a_1^2+21a_1+68 > 9a_1+36-4$

$a_1^2+12a_1+36>0$

$(a_1+6)^2>0$

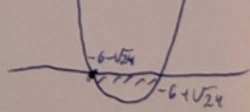
$a \neq -6$

$a_{10}a_{13} < S+60$

$(a_1+9)(a_1+12) < 9a_1+36+60$

$a_1^2+21a_1+108 < 9a_1+96$

$a_1^2+12a_1+12<0$



$D_1 = 36-12 = 24 \Rightarrow a_1^2+12a_1+12=0$

$\Updownarrow$

$a_1 = -6 \pm \sqrt{24} = -6 \pm 2\sqrt{6}$

$2 < \sqrt{6} < 2{,}5$

$4 < 2\sqrt{6} < 5 \Rightarrow -2 < -6+2\sqrt{6} < -1$ (1)

$-11 < -6-2\sqrt{6} < -10$ (2)

$a_1 \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24})$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101895**

ID профиля: **142738**

Вариант 24

Черновик

$a = 3 \cdot 11$
$b = 3 \cdot 11$
$c = 3^{5} \cdot 11^{15}$

11409
1140
10260

$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\frac{\log_{x+1} 29-x}{2}$

$2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$x < -1$

$\log_a b = -\log_b a$

$\begin{array}{r} 225 \\ \times\ 17 \\ \hline 1575 \\ 225 \\ \hline 3825 \end{array}$

450

$x \geq -49$

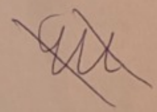
$x \neq -42$

$\frac{\ln \frac{x}{7}+7}{\ln\sqrt{29-x}}$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\frac{\ln(29-x)}{\ln(x+1)^2}$ $\frac{\ln(-x-1)}{\ln\sqrt{\frac{x}{7}+7}}$ $\frac{\log_{-x-1} 29-x}{2} = -2\log_{-x-1} \frac{x}{7}+7$

$29-x = (x+1)^4 \cdot \left(\frac{x}{7}+7\right)$



-1 $\quad 4(x+1)^3 \cdot \left(\frac{x}{7}+7\right) + (x+1)^4 \cdot \frac{1}{7}$

$\infty = \infty$

$4(x+1)^3 \cdot \left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\quad (x+1)^4 \cdot \frac{1}{7}$

$\log_{29-x} \frac{x}{7}+7 = \log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$4\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\quad \frac{x+1}{7}$

$-\log_{\frac{x}{7}+7} 29-x = \log_{\frac{x}{7}+7} -x-1$

$\frac{4x+49}{7}$ $\quad x+1$

60 $\frac{30}{7}$ $\quad 4x+49$ $\quad x+1$

$\frac{1}{29-x} = -x-1$

$x^2 - 28x - 29 = 1$

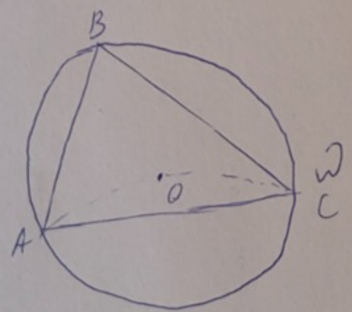
$x^2 - 28x - 30 = 0$

$3x+48$ $\quad 0$

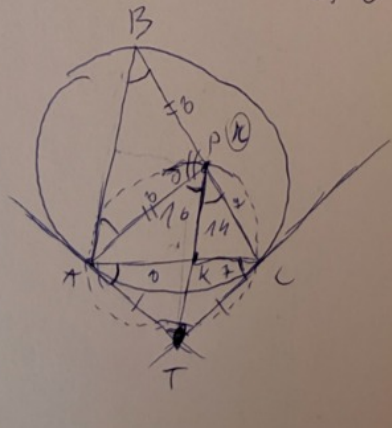
x $\quad 16$ $\quad \frac{14350}{14}$

41

$D_1 = 196 + 30 =$
$= 226$



$-4\log_{29-x} \frac{x}{7}+7 =$ $\quad x = 14 \pm \sqrt{226}$



21101895 (U142738 M1300844)

8) Пусть $BC = x \Rightarrow BP = AP = \frac{8}{15}x$

9) по усл. $tg B = \frac{3}{5} \Rightarrow 1 + tg^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$

$$\frac{34}{25} = \frac{1}{\cos^2 B}$$

$$\cos B = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin B = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

10) $\angle APB = 180° - 2\angle B$

$$\cos APB = \cos(180° - 2\angle B) = 2\cos^2(90° - \angle B) - 1 = 2 \cdot \sin^2 B - 1 = \frac{9}{17} - 1 = -\frac{8}{17}$$

11) по теореме косинусов $\triangle APB$

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AB \cdot BP \cdot \cos APB$$

$$AB^2 = 2 \cdot \left(\frac{8}{15}x\right)^2 \left(1 + \frac{8}{17}\right) = 2 \cdot \frac{64}{225} x^2 \cdot \frac{25}{17}$$

$$AB = \frac{40}{15} x \cdot \sqrt{\frac{2}{17}} = \frac{8}{3} x \sqrt{\frac{2}{17}}$$

12) $S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} x^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{17}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{4}{3} x^2 \cdot \frac{3}{17} = \frac{4}{17} x^2$

$$\frac{450}{7} = \frac{4}{17} x^2$$

$$\frac{225 \cdot 17}{14} = x^2$$

$$x = 15 \sqrt{\frac{17}{14}} \Rightarrow AB = \frac{8}{3} \cdot 15 \cdot \sqrt{\frac{17}{14}} \cdot \sqrt{\frac{2}{17}} = \frac{40}{\sqrt{7}}$$

13) по теореме косинусов $\triangle ABC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$\frac{8}{3} \cdot 15$

$$AC^2 = \frac{1600}{7} + \frac{225 \cdot 17}{14} - 2 \cdot 15 \cdot 40 \cdot \sqrt{\frac{17}{14 \cdot 7}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$AC^2 = \frac{3200 + 3825}{14} - 1200 \cdot \frac{5}{14}$$

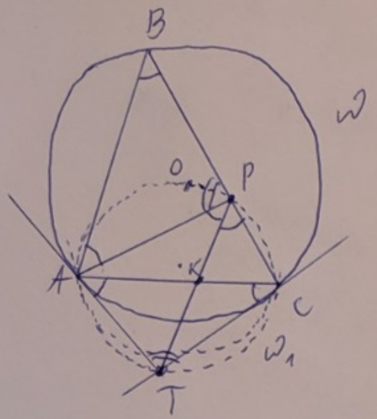
$$AC^2 = \frac{7025 - 6000}{14} = \frac{1025}{14}$$

$$AC = \sqrt{\frac{1025}{14}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{1025}{14}} = \frac{\sqrt{14350}}{14}$.

Чистовик　　　　　　　　　　　　　　　　　　страница 2

N3



1) $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC$ (вписан)
$\angle AOC = \angle APC$ (св-во впис $\angle$ ω_1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APC = 2\angle B$

$\angle APC = \angle B + \angle BAP$ (св-во внешних $\angle$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAP = \angle B$

2) $\angle B = \angle ACT = \angle CAT = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (св-во описанных и $\angle$ между хордой и касательной)

3) в $\triangle ABP$ и $\triangle ATC$

$\angle B \overset{п.1}{=} \angle BAP = \angle ACT \overset{п.2}{=} \angle TAC \Rightarrow \angle BPA = \angle ATC$

$\angle BPA + \angle APC = 180°$ (смежные) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATC + \angle APC = 180° \Rightarrow APCT$ — вписанный $\Rightarrow T \in \omega_1$

4) $\angle APT \overset{впис.}{=} \angle ACT \overset{п.2}{=} \angle CAT \overset{впис}{=} \angle TPC \Rightarrow \angle APT = \angle TPC = \frac{1}{2}\angle APC =$
$= \angle B$

5) в $\triangle APK$ и $\triangle KPC$
высота проведённая к AK и высота к KC равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S(APK)}{S(KPC)} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{16}{14} = \dfrac{8}{7}$

6) по св-ву биссектрисы PK $\triangle APC \Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{8}{7}$

// так как $\angle B \overset{п.1}{=} \angle BAP$

$\dfrac{BP}{PC}$

7) в $\triangle ABC$ и $\triangle APC$ высота к BC равна высоте к $PC \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S(ABC)}{S(APC)} = \dfrac{S(ABC)}{S(APK)+S(KPC)} = \dfrac{BC}{PC} = \dfrac{BP+PC}{PC} = \dfrac{15}{7}$

$\dfrac{S(ABC)}{30} = \dfrac{15}{7} \Rightarrow S(ABC) = 64\frac{2}{7}$

а) Ответ: $64\frac{2}{7}$

21101895 (U142738 M1300844)

Чистовик Вариант 24 страница 1

№1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=3\cdot 11 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

1) НОД содержит в себе ~~максимальную~~ минимальную степень каждого общего множителя, значит все 3 числа будут содержать $3\cdot 11$ в разложении на простые ~~множители~~ множители, причём одно из чисел обязательно будет иметь 3 или 11 в первой степени, иначе НОД получился бы больше

2) НОК содержит максимальную степень каждого множителя встречающегося хоть в одном разложении из трёх, это значит, что помимо 3 и 11 в разложении чисел больше нет, то есть все 3 числа вида $3^x\cdot 11^y$ $x \in [1;19]$ так $y \in [1;15]$

как иначе ~~НОК~~ был бы другим (больше, если степень максимальная больше, и наоборот).

3) У нас обязательно среди трёх чисел должно быть одно, содержащее 3 и одно содержащее 3^{19}, у третьего может быть любая степень от 1 до 19 включительно, поэтому всего $3\cdot 2\cdot 19=114$ вариантов распределения степеней 3. Аналогично с 11, у одного макс. степень, у одного мин, у ~~~~ третьего ~~~~ любая от 1 до 15

$3\cdot 2\cdot 15=90$ вариантов

4) ~~~~ Так как они выбираются независимо, то общее кол-во упорядоченных троек будет $114\cdot 90=10260$ троек

Ответ: 10260 троек.

21101895 (U142738 M1300844)