Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101815**

ID профиля: **152500**

Вариант 24

Лист №1 Задача №1 Вариант №24 Чистовик

Обозначим ~~как~~ первый член ~~ар~~ арифметической прогрессии за a_1, а разность между соседними членами за d, тогда:

$S = a_1 + a_1 + d + \dots a_1 + 8d = 9a_1 + 36d$

$a_5 = a_1 + 4d$

$a_{18} = a_1 + 17d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{13} = a_1 + 12d$

Запишем неравенства из условия:

$$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > 9a_1 + 36d - 4 & (1) \\ a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60 & (2) \end{cases}$$

Раскроем скобки:

(1) $a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4$

(2) $a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60$

Так как все члены прогрессии ~~целые~~ целые числа (по условию), то $d \in \mathbb{Z}$

Так как прогрессия возрастающая (по условию), то $d > 0$.

$\Downarrow$

Мы знаем, что $d > 0, d \in \mathbb{Z}$

Заменим выражение $a_1^2 + 21a_1 d$ на x, а выражение $9a_1 + 36d$ на y (для удобства), тогда

(1) $x + 68d^2 > y - 4$

(2) $x + 108d^2 < y + 60 \Rightarrow y + 60 > x + 108d^2$

$-\sqrt{\frac{64}{40}} < d < \sqrt{\frac{64}{40}}$; $\sqrt{\frac{64}{40}} > 1$

Сложим бо́льшие части неравенства:

$x + 68d^2 + y + 60 > y - 4 + x + 108d^2$

$64 > 40d^2$

Так как $d > 0$, $d \in \mathbb{Z}$, то подходит только $d = 1$ (при $d > 1$ правая часть будет больше)

$\Downarrow$

Мы поняли, что $d = 1$, подставим это условие в выражения (1) и (2) начальной системы неравенств

Продолжение на листе №2

Лист №2 Задача №1 Вариант №24 Чистовик

Продолжение:

$$\begin{cases} (a_1+4)(a_1+17) > 9a_1+32 & (1) \\ (a_1+9)(a_1+12) < 9a_1+96 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1+68 > 9a_1+32 & (1) \\ a_1^2+21a_1+108 < 9a_1+96 & (2) \end{cases}$$

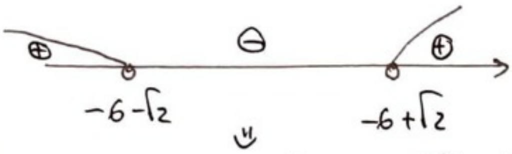
(1) $a_1^2+12a_1+34>0$

Решим квадратное уравнение

$D = 144-4\cdot 34 = 144-136 = 8$

$\Downarrow$

$a_{1,2} = \dfrac{-12\pm 2\sqrt{2}}{2} = -6\pm\sqrt{2}$



$\Downarrow$

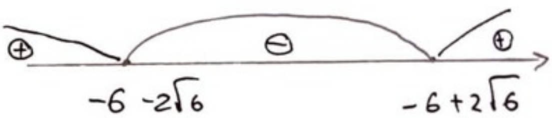
$a_1 \in (-\infty; -6-\sqrt{2}) \cup (-6+\sqrt{2}; +\infty)$

(2) $a_1^2+12a_1+12<0$

Решим квадратное уравнение:

$D = 144-48 = 96$

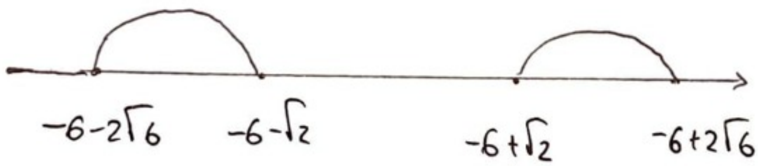
$a_{1,2} = \dfrac{-12\pm 4\sqrt{6}}{2} = -6\pm 2\sqrt{6}$



$\Downarrow$

$a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6})$

Нарисуем итоговую числовую прямую



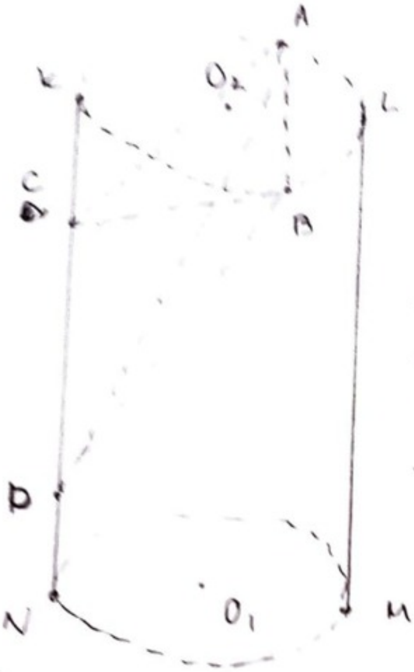
$a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6-\sqrt{2}) \cup a_1 (-6+\sqrt{2}; -6+2\sqrt{6})$

Так как $a_1 \in Z$ (по условию), то ~~в этом~~ a_1 может быть равно

$-10, -9, -8, -4, -3, -2$

Ответ: $-10; -9; -8; -4; -3; -2$

Задача 2 Лист 3 Вариант №24 Чистовик



Решение:

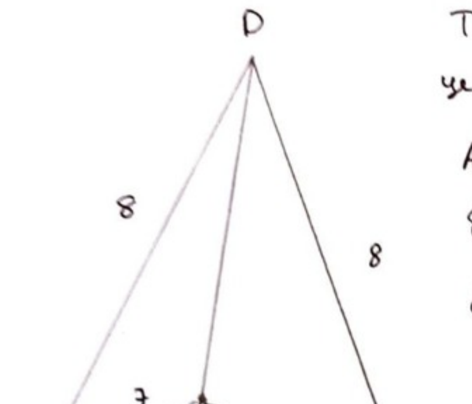
Поставим точки C, D на отрезок KN, тогда эти точки лежат на боковой поверхности и ребро CD параллельно оси цилиндра.

Заметим, что так как $DA = DB$, а $CA = CB$, то точки A и B симметричны относительно плоскости KLMN

Так как расстояние AB фиксированное, то для точек A и B существует два возможных положения

Обозначим плоскость, проходящую через O_1O_2 и параллельную CD за α, тогда 1-ое положение AB находится в правой полуплоскости α, второе - в левой. Из условия симметрии точек A и B, они лежат на сечении в виде окружности || основанию цилиндра.

Рассмотрим отдельно ABCD



Так как AB лежит в сечении окружности цилиндра, то минимальный радиус, когда AB - диаметр (если AB - хорда, то диаметры больше хорды $\Rightarrow$ это не наименьший случай)

Если AB-диаметр, то $R = 2$

Найдем CD:

$CD \perp$ окружности через точки A и B

Причем H лежит на этой окружности

(H - продолжение CD до пересечения с плоскостью β)

$\angle AHC = 90^\circ$

$AC = AB$ в силу симметрии

$AH^2 + \cancel{CB}HB^2 = 4^2 \Rightarrow 2AH^2 = 16 \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}$

$\triangle AHD$ прямоуг $\Rightarrow AD^2 = AH^2 + HD^2 \Rightarrow 64 = 8 + HD^2 \Rightarrow HD = \sqrt{56}$

$\triangle AHC$ - прямоуг $\Rightarrow AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow 8 + HC^2 = 49 \Rightarrow HC = \sqrt{41}$

$\Rightarrow CD = HD - HC = \sqrt{56} - \sqrt{41}$

Ответ: $\sqrt{56} - \sqrt{41}$

Задача №3 Лист №4 Вариант №24 Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10) & (2)\end{cases}$$

Заметим, что $\min(-6a-2b, 10) \le 10$

$\Downarrow$

как минимум, $a^2+b^2 \le 10 \Rightarrow |a| \le \sqrt{10}$, $|b| \le \sqrt{10}$

Заметим, что (1) неравенство ~~это~~ содержит в себе уравнение окружности с центром $(a;b)$ и радиусом $R=\sqrt{10}$

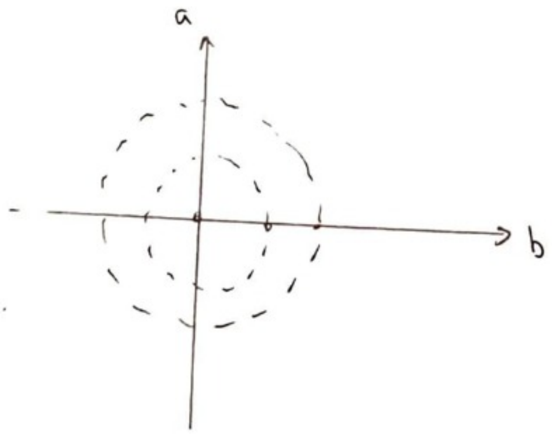
$\Downarrow$

Необходим понять, какие a и b нам подходят из второго уравнения

Заметим, что если $a>0$ и $b>0$, то $\min(-6a-2b, 10)<0$, а $a^2+b^2 \ge 0$ всегда при любых a, b.

Пусть при каких-то a, b получили $\min(-6a-2b, 10) = c \ge 0$, тогда

$a^2+b^2 \le c \Rightarrow a^2+b^2=c$ это окружность относительно (a,b) с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{c} \Rightarrow$ нам подходят все a, b ~~такие~~, лежащие внутри окружности. Такие a, b будут существовать, если $c \ne 0$, ~~но~~



Максимальный радиус такой окружности это $\sqrt{10}$, так как $\min(-6a-2b, 10) \le 10$

$\Downarrow$

и нам подходят любые значения (a, b), лежащие на или внутри этой окружности

Продолжение на листе

21101815 (U152500 M1300023)

Задача №3 Лист №5 Вариант №24 Чистовик

Продолжение

Вспомним про ограничения: $c \geq 0$

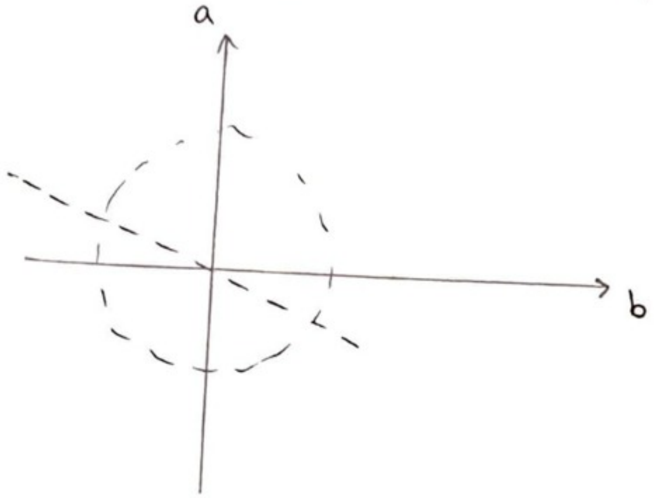
Посмотрим когда $\min(-6a-2b, c0) \leq 0$

Он ≤ 0, когда $-6a-2b \leq 0$

$$\Downarrow$$

$$b \geq -3a$$

Нарисуем эту линию на графике $(b=-3a)$

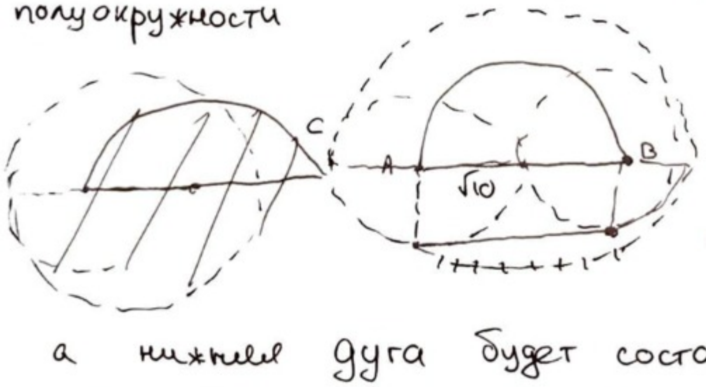


Следовательно, нам не подходит все, что в правее этой прямой, то есть подходит только то, что находится ниже

Так как прямая проходит через $(0;0)$, то мы отсекли ровно половину окружности

$$\Downarrow$$

Центр окружности из первого уравнения лежит в любой из точек полуокружности из второго уравнения => нам нужно прокатить окружность с радиусом $\sqrt{10}$ по всем точкам полуокружности



Когда мы прокатим окружность по дуге AB, то крайние точки верхней D дуги CD будут лежать на полуокружности с радиусом $2\sqrt{10}$,

а нижняя дуга будет состоять из двух четвертей окружностей с радиусом $\sqrt{10}$ и прямоугольника со сторонами $\sqrt{10}$ и $2\sqrt{10}$

Итоговая площадь фигуры:

21101815 (U152500 M1300023)

$$S=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{10})^2+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi(\sqrt{10})^2+2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=\cancel{20\pi+80\pi}+20\pi+5\pi+20=25\pi+20$$

Ответ: $25\pi+20$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101815**

ID профиля: **152500**

Вариант 24

Лист №3 Задача №4 Вариант №24 Чистовик

Решение:

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 33 = 3 \cdot 11 \\ НОК(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

Пусть $a = 3^x \cdot 11^y$
$b = 3^m \cdot 11^n$
$c = 3^k \cdot 11^e$

Очевидно, что других делителей (кроме 3 и 11) в разложении у них нет, так как тогда в НОКе был бы еще какой-то делитель.

Также заметим, что ни одна степень тройки не может быть выше 19 и ниже 1, так как тогда не выполнялось бы одно из уравнений системы. Аналогично для 11: ни одна степень не больше 15 и не меньше 1.

Заметим, что хотя бы у одного числа степень тройки 19. Предположим это не так, тогда в НОКе у 3 ~~будет сте~~ не может быть степени 19. Аналогично для 11: у какого-то числа степень 11 ровно 15.

Также заметим, что у одного из чисел степень тройки ровно 1. Предположим это не так, тогда не выполняется условие НОДа (одно из чисел либо вообще не будет делиться на три, либо каждое будет делиться хотя бы на 3^2) Аналогично для 11: есть какое-то число, у которого степень 11 ровно 1.

Получается 4 позиции степени из 6 всегда одинаковы (для 3 и для 11 по одной)

Осталось две позиции, на которые мы ставим 3^R в любой степени $R \in [1; 19]$ и 11^S, где $S \in [1; 15]$ Но мы также можем выбрать где мы будем менять эту степень (у какого из трех чисел) способов где менять 3^R – 3 (одно из трех чисел), для 11 тоже три. В каждом случае мы можем поставить одну из 19 степеней для 3 и одну из 15 для 11 $\Rightarrow$ всего ~~ско~~ троек $9 \cdot 19 \cdot 15$ $(3 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 15)$

Ответ: $19 \cdot 15 \cdot 9$

Лист №1 Задача №5 Вариант №24 Чистовик

Решение:

Пусть $a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

$c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

Запишем ОДЗ:

$\sqrt{29-x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 28$

$29-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 29$

$\frac{x}{7}+7>0 \Rightarrow x > -49$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7} \neq 1 \Rightarrow \frac{x}{7}+7 \neq 1 \Rightarrow x \neq -42$

$29-x>0 \Rightarrow x<29$

$(x+1)^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$

$-(x+1)>0 \Rightarrow x+1<0 \Rightarrow x<-1$

Запишем $a \cdot b \cdot c$, получим:

$a \cdot b \cdot c = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) \cdot \log_{(x+1)^2}(29-x) \cdot \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2\log_{29-x}\frac{x}{7}+7 \cdot$

$\cdot \log_{(x+1)^2}(29-x) \cdot \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2$. ОДЗ будем учитывать

$a \cdot b \cdot c = 2\log_{(29-x)}\frac{x}{7}+7 \cdot \frac{1}{\log_{(29-x)}(x+1)^2} \cdot \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2 = 2\log_{(x+1)^2}\left(\frac{x}{7}+7\right) \cdot \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2 =$

$= 2\log_{(x+1)^2}\left(\frac{x}{7}+7\right) \cdot \frac{1}{\log_{(x+1)^2}\left(\frac{x}{7}+7\right)} = 2$. То есть $abc=2$ при любых x, удовл ОДЗ.

Пусть две переменные равны a, тогда третья равна $a+1$.

$\Downarrow$

$a^2(a+1)=2 \Rightarrow a^3+a^2-2=0$

Заметим, что $a=1$ подходит

$\Downarrow$

$a^3+a^2-2=(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$a^2+2a+2=0$

$D=4-8<0$, ~~так как ветвями вверх~~ решений нет $\Rightarrow a=1$, тогда какие-то две из переменных равны 1, а другая равна 2.

Продолжение на листе №2.

Лист№2 Задача№5 Вариант№24 Чистовик

Если двойке равна первая переменная

$\Downarrow$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2 \Rightarrow \frac{x}{7}+7=29-x \Rightarrow \frac{8}{7}x=22 \Rightarrow x=\frac{22\cdot 7}{8} > -1$

не подходит по ОДЗ

Тогда $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1=\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$\Downarrow$

$(x+1)^2=(29-x)$

$x^2+2x+2=29-x$

$x^2+3x-27=0$

$D=9+4\cdot 27=9+108=117$

$\Downarrow$

$x_{12}=\frac{-3\pm\sqrt{117}}{2}$ корни не совпадают $\Rightarrow$ такого быть не может

Если двойке равная вторая переменная, тогда

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=2$

$\Downarrow$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{x}{7}+7\right)}=(-x-1)$

$\frac{x}{7}+7=x^2+2x+2$

$\Downarrow$

$x^2+\frac{13x}{7}-5=0$

$D=\frac{169}{49}+20$

$\Downarrow$

$x_{12}=\frac{-\frac{13}{7}\pm\sqrt{\frac{169}{49}+20}}{2}$ корни не совпадают

$\Downarrow$

такого быть не может.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

$\Downarrow$

$29-x=\frac{x^2}{49}+2x+49$

$\frac{x^2}{49}+3x+20=0$

$D=9-\frac{80}{49}$

$\Downarrow$

$x_{12}=\frac{-3\pm\sqrt{\frac{80}{49}}}{\frac{2}{49}}=\frac{-3\cdot 49\pm 7\sqrt{80}}{2}$

Если двойке равна третья переменная, тогда

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2$

$\Downarrow$

$-x-1=\frac{x}{7}+7$

$\Downarrow$

$-\frac{8}{7}x=8$

$\Downarrow x=-7$

Проверим, что оставшиеся нер-ва выполняются

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$ при $x=-7$

$\log_{6^2}36=1$ (верно)

$\log_{\sqrt{29-x}}\frac{x}{7}+7=1$ при $x=-7$

$\log_6 6=1$ (верно)

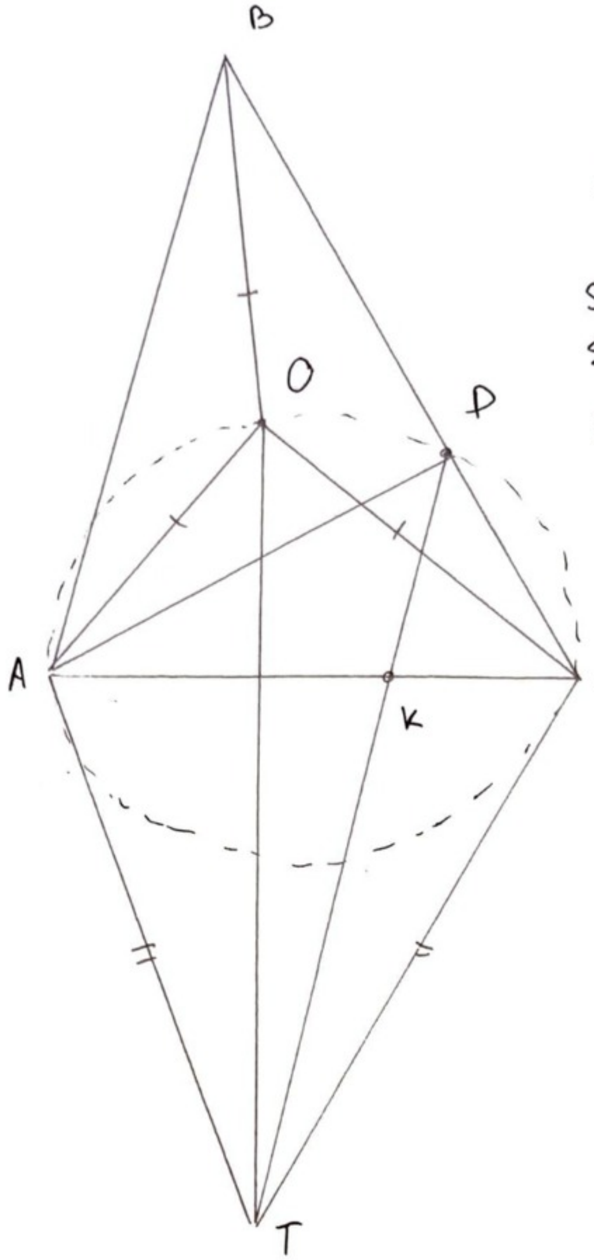
$\Downarrow$

Ответ: $x=-7$ ~~Продолжение на листе 4~~

21101815 (U152500 M1300024)

Лист 4 Вариант 124 Задача 6 Чистовик

a)



Решение:

AO = OC (радиусы)

AT = TC (касательные)

$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

Заметим, что у них общая высота треугольника APC

$\frac{h \cdot KC}{2} = 14$

$\frac{h \cdot AK}{2} = 16$ $\Rightarrow \frac{KC}{AK} = \frac{7}{8}$

Докажем, что $\triangle CPK \sim \triangle ABC$. Один угол у них общий ($\angle BCA$)

$\triangle AOT = \triangle COT$ (по трем сторонам) пусть $\angle AOT = \alpha$, тогда $\angle TOC = \alpha$ (равные треугольники). Тогда $\angle OAC = \angle OCA = 90 - \alpha$

$\angle ACT = \angle AOC$ (угол между хордой и касательной) $= 2\alpha$

Тогда $\angle TAC = \angle ACT = \cancel{20}\ 2\alpha$ (р/б треуг) $\Rightarrow \angle ATO = 90 - 2\alpha$ (по сумме углов)

Получаем, что $AB \parallel TP$ из углов $\Rightarrow \angle BKC = \angle BAC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ по трем углам. Площади подобных треугольников соотносятся как коэффициент в квадрате.

$k = \frac{7x}{15x} = \frac{7}{15} \Rightarrow \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \frac{49}{225} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{14 \cdot 225}{49} = \frac{450}{7}$

Ответ: $\frac{450}{7}$