Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101812**

ID профиля: **168609**

Вариант 24

№1.

~~a_1~~ $a_1+\dots+a_9=S$ т.к. все члены в прогрессии целые, то $a_1 \in \mathbb{Z}$ и $a_2 \in \mathbb{Z}$, $a_2=a_1+d$, где d – разность =>

=> т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$ => $d \in \mathbb{Z}$ и при этом прогрессия возраст. =>

=> $d>0$.

$S=a_1+a_2+\dots+a_9=\frac{(a_1+a_9)\cdot 9}{2}=\frac{(a_1+a_1+8d)\cdot 9}{2}=$

$=9a_1+36d$

$$\left.\begin{matrix} a_5=a_1+4d \\ a_{18}=a_1+17d \end{matrix}\right| \Rightarrow a_5\cdot a_{18}=a^2+68d^2+21ad>9a_1+36d-4 \text{ по усл.}$$

$$\left.\begin{matrix} a_{10}=a_1+9d \\ a_{12}=a_1+12d \end{matrix}\right| \Rightarrow a_{10}\cdot a_{12}=a_1^2+108d^2+21ad<9a_1+36d+60$$

Пусть $a_1^2+68d^2+21ad=t$ => $\begin{cases} t>S-4 \\ t+40d^2<S+60 \end{cases}$

$t>S-4$

$S+60>t+40d^2$

$\cancel{t}+\cancel{S}+60>\cancel{t}+\cancel{S}-4+40d^2$

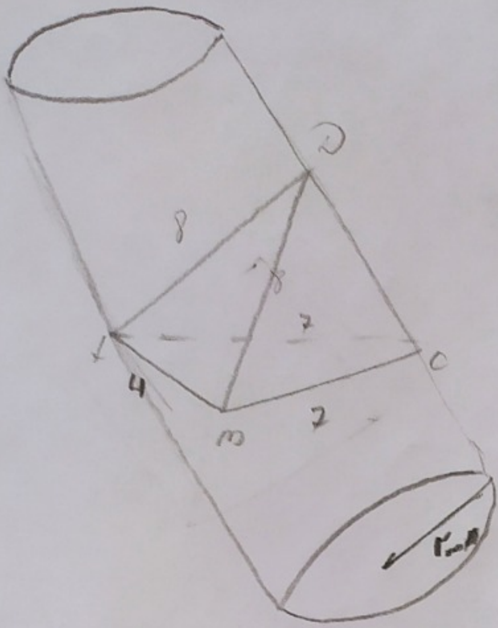
$64>40d^2$ т.к. $d>0$ и $d \in \mathbb{Z}$ => $d=1$

$$\begin{cases} a_1^2+68\cdot 1+21\cdot a_1\cdot 1>9\cdot a_1+36\cdot 1-4 \\ a_1^2+108\cdot 1+21\cdot a_1\cdot 1<9a_1+36\cdot 1+60 \end{cases}$$

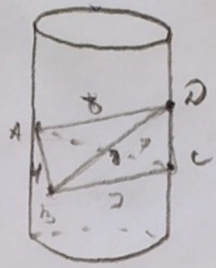
$$\begin{cases} a_1^2+21a_1+36>0 \mid \Rightarrow a_1 \neq 6. \\ a_1^2+21a_1+12<0 \Rightarrow \frac{-21-\sqrt{393}}{2}<a<\frac{-21+\sqrt{393}}{2}<0 \end{cases}$$

=> $a_1 \in [-20;-1]$ кроме 6

Ответ: $a_1 \in [-20;6)\cup(6;-1)$ $a_1 \in \mathbb{Z}$



$2\sqrt{14}$



чертовщ... $64+60=$

$=224.$

$$\frac{-2\sqrt{41}\pm\sqrt{15^2-1}}{2}.$$

$$\frac{-2\sqrt{41}+\sqrt{224}}{2}=-\sqrt{41}+2\sqrt{14}.$$

$\cancel{1=4+4-8\cos\alpha}$

$36=49\cdot2-49\cdot2\cos\alpha$

$18-49=-49\cos\alpha$

$\frac{31}{49}=\cos\alpha$

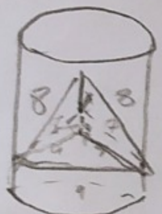
$\sqrt{\frac{80\cdot16}{49}}=$

$=\frac{16\sqrt5}{49}.$

$S=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 7\cdot\frac{16\sqrt5}{49}=$

$x>1$

$=8\sqrt5$



$49-y^2=64-x^2-y^2-2xy$

$0=15-x^2-2xy.$

$16=2a^2-2a^2\cos\alpha.$

$\frac{16-2a^2}{2a^2}=-\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\alpha=\frac{2a^2-16}{2a^2}$

$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-4}}=r\geq4$ $\qquad$ $\sin\alpha=\sqrt{\frac{4a^2-16}{2a^2}\cdot\frac{16}{2a^2}}=\frac{8\sqrt{a^2-4}}{2a^2}=\frac{4\sqrt{a^2-4}}{a^2}$

$a\in[0;7]$ $\qquad$ $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-4}}$ $\qquad$ $\frac{a^4}{a^2-4}=a^2-$ $\qquad$ $y=\sqrt{41}$

$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-4}}=2r\geq4$ т.к. $g.$ $\qquad$ $a^2=8.$ $\qquad$ $15-x^2-2\sqrt{41}x=0$

$\cancel{8=64-x^2}$

$x^2+2\sqrt{41}x-15=0.$

21101812 (U168609 M1301003)

W

Чертовик.

$-21+393-2$

$\sqrt{393} > 19$

19×19: 171, 19, 361

№1.

$a_1 + \dots + a_9 = S.$

$a_1 = ?$

$a_5 \cdot a_{18} > S-4$

$\frac{(a+a+8d)\cdot 9}{2} = 9a+36d$

$a_{10} \cdot a_{13} < S+60$ $= (a+9d)(a+12d) = a^2+108d^2+21ad$

$(a+4d)(a+17d) > 9a+36d-4$

$a, d \in \mathbb{Z}$

$a^2+68d^2+21ad > 9a+36d-4.$

$-20 > \frac{-21-\sqrt{393}}{2}$

$a^2+108d^2+21ad < 9a+36d+60.$

$-\sqrt{393}$

$-19 >$

21×21: 21, 42, 441, -48, $393 = 3\cdot 131.$

$19 < \sqrt{393}$

$40d^2 < 64.$

1) $d=1$

2) $d=-1$

3) $d=0$

Т.к. возр. $\Rightarrow$ $d=1.$

$a^2+108+21a < 9a+96.$

$a^2+21a+12 < 0.$

$a^2+68+21a > 9a+36-4$

~~$a^2+12a+36 > 0$~~

$a^2+12a+36>0$

$a \neq -6.$

$\frac{-21-\sqrt{393}}{2} < a \leq \frac{-21+\sqrt{393}}{2}$

$3a+b<0.$

$$(a+3)^2+(b+1)^2 \le \min(-6a-2b;10)+6a+2b+10.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10\\ -6a-2b\le 10\end{cases}\\ \begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 20+6a+2b\\ -6a-2b\ge 10\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\right)'=\frac{2x\sqrt{x^2-4}-\frac{2x\cdot x^2}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}=0.$$

$$\sqrt{x^2-4}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}.$$

№2.

~~черновик~~ чистовик.

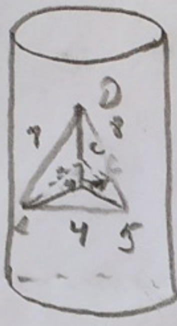


Рис 1

Проведём плоскость ABM ∥ основаниям цилиндра, ~~т.~~ (Т.М. может ~~быть внутри~~ попасть на CD, а может лежать на прямой CD)$_2$ (ΔADC = ΔBDC по 3ём сторонам

и, т.к. ~~т.~~ M лежит на сер.пер к AB => OM попадает на DC)

Рис 1 – когда лежит на прямой CD. ~~тогда~~ AM = MB = a.

ΔAMB: $a^2+a^2-2a^2\cos\alpha=16 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{2a^2-16}{2a^2}$

$\sin\alpha>0 \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2a^2-16}{2a^2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{a^2-4}}{a^2}$

по т. синусов ~~следует~~ в ΔABM: $\frac{4}{\frac{4\sqrt{a^2-4}}{a^2}}=2r$

$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-4}}=2r$, а т.к. п-ть AMB ∥ осн. цилиндра => r – это радиус ~~окружности~~ основания цилиндра т.к. в окружности есть хорда AB=4 => $2r \geq 4$.

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-4}}\right)' = \frac{2a\sqrt{a^2-4}-\frac{2a\cdot a^2}{2\sqrt{a^2-4}}}{a^2-4}=0$$

$a=0$ ∅

$2\sqrt{a^2-4}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-4}} \Rightarrow a^2=8 \Rightarrow a=2\sqrt{2}$ $\quad a=-2\sqrt{2}<0$. ∅

$\Rightarrow 2r=\frac{8}{\sqrt{8-4}}=4 \Rightarrow r_{min}=2.$

$CD = x$

$CH = y$

по Т. Пифагора. $49 - y^2 = a^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 41 \Rightarrow y = \sqrt{41}$.

$64 - (x+y)^2 = a^2 \Rightarrow 64 - x^2 - 41 - 2\sqrt{41}x = 8$

решаем это квадратное ур-е $\Rightarrow x = \frac{-2\sqrt{41} \pm \sqrt{224}}{2}$

$\Rightarrow x = -\sqrt{41} \pm 2\sqrt{14}$ $\quad -\sqrt{41} - 2\sqrt{14} < 0$ $\varnothing$

$\overset{\shortparallel}{CD} \Rightarrow CD = -\sqrt{41} + 2\sqrt{14}$.

Случай, когда H падает на CD аналогичен.

$a^2 = 8$.

$CD = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

$2\sqrt{14} - \sqrt{41}$

21101812 (U168609 M1301003)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101812**

ID профиля: **168609**

Вариант 24

чистовик

№5.

ОДЗ: $\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ x\neq -1 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2. \\ x\neq 42 \\ -x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -49<x<-1 \\ x\neq -42 \\ x\neq -2 \end{cases}$

$\sqrt{29-x}=a$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}=b$ $\quad a, b, c\neq 1$

$-x-1=c$

$\log_a b^2, \log_{c^2} a^2, \log_b c$

$\log_a b^2, \log_{c^2} a^2, \log_b c$

1) $\log_b c = \log_c a = t \Rightarrow \log_a b^2 = t+1.$

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$b^t = c \qquad c^t = a \qquad a^{t+1} = b^2$

$\Rightarrow b^{t^t} = a$ возведём в $t+1$ степень $\Rightarrow$

$\Rightarrow b^{t^2(t+1)} = b^2$, т.к. $b\neq 1$ и $b>0 \Rightarrow t^2(t+1)=2$

$t^3+t^2-2=0 \Leftrightarrow (t-1)\underbrace{(t^2+2t+2)}_{>0}=0 \Rightarrow t=1$

$\Rightarrow \log_c a = 1 \Rightarrow a=c \Rightarrow \sqrt{29-x} = \sqrt{\frac{x}{7}+7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 29-x = \frac{x}{7}+7$

$22 = \frac{8x}{7} \Leftrightarrow x = \frac{77}{4}.$ $\varnothing$ по ОДЗ.

21101812 (U168609 M1301004)

$\underline{\log_a b^2}, \overbrace{\log_c a}, \overbrace{\underline{\log_b c}}$

черновик

$$\log_a b^2 = \log_b c = \overbrace{\log_c a}^{t+1} - 1$$

6

$48 = 16 \cdot 3$

$\times 28 = 4 \cdot 7$

384

96

$1344 = 38^2 - 100$

$a^t = b^2$

$169.$

$a^{t^2} = c^2$

$a^{\frac{t^2}{2}} = c$

$a^{\frac{t^2}{2}(t+1)} = a$

$8\sqrt{21}$

~~ABZ~~

$13 + 8\sqrt{21}$

14

21101812 (U168609 M1301004)

Чистовик.

№4

т.к. НОК $(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$, то числа a, b, c

представимы в виде $3^{n} \cdot 11^{m}$ (если будут другие кратные делители, то они попадут в НОК)

т.к. НОД $(a; b; c) = 33 \Rightarrow n, m \geq 1$

$\Rightarrow a = 33 \cdot 3^{a_1} \cdot 11^{a_2}$ $\qquad a_1 + b_1 + c_1 = 16$

$b = 33 \cdot 3^{b_1} \cdot 11^{b_2}$ $\qquad a_2 + b_2 + c_2 = 12$

$c = 33 \cdot 3^{c_1} \cdot 11^{c_2}$

Осталось посчитать, сколько у нас есть троек $(a_1; b_1; c_1)$ и $(a_2; b_2; c_2)$

Чтобы посчитать кол-во троек $(a_1; b_1; c_1)$ выпишем наши 16 троек 3 3 ... 3, поставим 3 перегородки, то, что будет в 1ом промежутке положим в a_1, во 2ом - в b_1, в 3ем - в c_1. всего есть 17 мест для перегородок и 3 перегородки $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во способов $C_{17}^{3} = \frac{17 \cdot \cancel{16}^{8} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{6}_{2}} = 680$

Аналогично для 11: $C_{13}^{3} = \frac{13 \cdot \cancel{12}^{2} \cdot 11}{\cancel{6}} = 286$. $\Bigg|$ $\Rightarrow$ всего способов $680 \cdot 286 =$

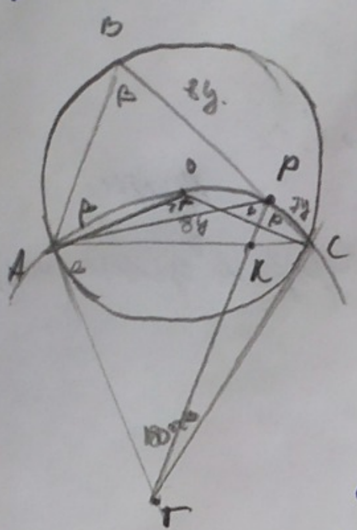
$= 194480$

Ответ: 194480.

21101812 (U168609 M1301004)

№ 8

чистовик



$S_{APK} = 16$

$S_{PKC} = 14$

а) $\angle ABC = \beta \Rightarrow \angle AOC = 2\beta$, т.к. он центральный. $\angle CAT$ как угол между касательной и хордой равен $\angle ABC = \beta$

Аналогично $\angle ACT = \beta \Rightarrow \angle ATC = 180^\circ - \angle CAT - \angle ACT = 180^\circ - 2\beta$

$\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ - 2\beta + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow A, O, C, T$ лежат на одной окр $\Rightarrow O, A, C, T, P$ лежат на одной окр.

$\underbrace{\angle APT = \angle ACT}_{\text{на одну дугу}} = \underbrace{\angle TAC = \angle TPC}_{\text{на одну дугу}} = \beta$

$\Delta APK: S = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\beta = 16$

$\Delta PKC: S = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot PK \cdot \sin\beta = 14$ | поделим. $\frac{AP}{PC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = 8y$

$PC = 7y$.

$\angle APC$ внешний для $\Delta ABP \Rightarrow 2\beta = \underset{\beta}{\angle ABP} + \angle BAP \Rightarrow \angle BAP = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = BP = 8y$.

ΔAPC: $\frac{1}{2} \cdot AP \cdot PC \cdot \sin 2\beta = 16 + 14 = 30$.

$28y^2 \cdot \sin 2\beta = 30 \Rightarrow 14y^2 \sin 2\beta = 15$.

ΔABP: $\frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP \cdot \underset{\sin 2\beta}{\sin(180 - 2\beta)} = \frac{1}{2} \cdot 8y \cdot 8y \cdot \sin 2\beta = 32y^2 \cdot \sin 2\beta = x$

$\frac{\cancel{14}\ 7}{\cancel{32}\ 16} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{240}{7} \Rightarrow S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = \frac{240}{7} + 30 = 64\frac{2}{7}$

Ответ: $64\frac{2}{7}$

21101812 (U168609 M1301004)

черновик

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$x < 29$
$x \neq 28$

$x > -49$

$x \neq -1$
$x \neq 0$.

$-x-1 > 0$
$-1 > x$

$-49 < x < -1$

$x \neq -42$.

$\log_a b^2$, $\log_{c^2} a^2$, $\log_b c$

$\log_a b^2$, $\log_c a$, $\log_b c$

$\sqrt{29-x} = a$
$\sqrt{\frac{x}{7}+7} = b$
$-x-1 = c$.

$a, b, c \neq 1$

1) $\log_b c = \log_c a \Rightarrow$ $1 = \log_c b \cdot \log_c a$

$\log_a b^2 = t+1$ $\quad a^{t+1} = b^2$

$b^t = c$
$c^t = a$

$= b^{t^2} = a$

$b^{t^2(t+1)} = b^2$ т.к. $a, b, c \neq 1 \Rightarrow$ >0

$\Rightarrow t^2(t+1) = 2$.

$t^3 + t^2 - 2 = 0$.

$t^3 + t^2 - 2 \mid t-1$
$t^3 - t^2 \quad \mid t^2 + 2t + 2$
$2t^2 - 2$
$2t^2 - 2t$

$(t-1)(t^2 + 2t + 2)$

$t = 1 \Rightarrow b = c$
$c = a$

21101812 (U168609 M1301004)

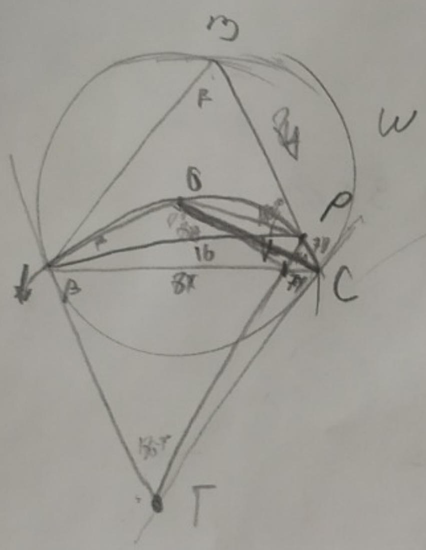
черновик.

$(t+1)^2 t = 2$

$t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0.$

$\cancel{4y} \cdot 7y \cdot \sin 2\beta = 30$

$14y^2 \cdot \sin 2\beta = 15$



$\frac{1}{2}\, 8y \cdot 7y \cdot \sin 2\beta = 30$

$\frac{1}{2} \cdot 8y \cdot 8y \cdot \sin 2\beta = \frac{240}{7} + 30$

$tg\, \beta = \frac{3}{5}$

чистовик.

2) $\log_a b^2 = \log_b c = t \Rightarrow \log_c a = t+1$

Аналогично $a^t = b^2$, т.к. $a,b,c>0$ извлечём корень $\Rightarrow$

$a^{\frac{t}{2}} = b$, $b^t = c \Rightarrow a^{\frac{t^2}{2}} = c \Rightarrow a^{\frac{t^2}{2}(t+1)} = a$, т.к. $a \neq 1$ и $a>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{t^2(t+1)}{2} = 1 \Rightarrow t^3 + t^2 - 2 = 0 \Rightarrow$ аналогично $t=1$.

$\Rightarrow b = c$. $\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{7}+7} = -x-1$ т.к. обе части >0 возв. вкв.

$\frac{x}{7} + 7 = x^2 + 2x + 1 \quad |\cdot 7$

$7x^2 + 13x - 48 = 0$.

$\Rightarrow x_{12} = \frac{-13 \pm 8\sqrt{21}}{14}$, $\frac{-13+8\sqrt{21}}{14} > 0 \; \varnothing$

$\frac{-13-8\sqrt{21}}{14}$ V

3) $\log_a b^2 = \log_c a = t$, $\log_b c = t+1 \Rightarrow b^{t+1} = c$

Аналогично

$a^t = b^2$, $c^t = a \Rightarrow c^{t^2} = b^2 \Rightarrow c^{\frac{t^2}{2}} = b \Rightarrow$

$c^{\frac{t^2}{2}(t+1)} = c$, т.к. $c>0$ и $c \neq 1 \Rightarrow$

$\frac{t^2(t+1)}{2} = 1 \Rightarrow t = 1. \Rightarrow a = c$. $\quad -x-1 = \sqrt{29-x}$

$x^2 + 2x + 1 = 29 - x$

$x^2 + 3x - 28 = 0$.

$(x+7)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4 \; \varnothing$

$x = -7$ V подходит.

Ответ: $x = -7$, $x = \frac{-13-8\sqrt{21}}{14}$.

черновик.

нод (a; b; c) = 33

нок = $\underline{3^{19} \cdot 11^{15}}$.

числа состоят только из 3 и 11

каждое ⋮ 33 => в каждом есть 3 и 11.

33 33 33.

3^6 11^{12}.

~~8~~.

~~17·16·15~~

$C_{17}^3 \cdot C_{13}^3$

16
680
×286
4080
5440
1360
194480

40
×17
280
40
680

22
×13
66
22
286

21101812 (U168609 M1301004)