Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101807**

ID профиля: **123184**

Вариант 24

Чистовик. Вариант 24

N 1

a_1 – первый член прогрессии, $a_1 \in Z$.
т.к. $a_1 \in$ прогрессии.

k – шаг этой арифметической прогрессии.
$k \in Z$, т.к. $a_1 + k$ – $\in$ прогрессии.
$k > 0$, т.к. прогрессия возрастает – по сумме арифм. прогрессии.

$$S = 9a_1 + \frac{(1+8)\cdot 8}{2}k = 9a_1 + 36k.$$

Тогда ~~запишем~~ запишем условия:

$$\begin{cases} (a_1+4k)(a_1+17k) > 9a_1+36k-4 \\ 9a_1+36k+60 > (a_1+9k)(a_1+12k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1k+68k^2 > 9a_1+36k-4 \\ 9a_1+36k+60 > a_1^2+21a_1k+108k^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$40k^2 < 64.$$

$$k^2 < \frac{64}{40}$$

Но $k \in Z$ и последовательность возрастающая

21101807 (U123184 M1301968)

Чистовик

Чистовик

$k < -\sqrt{\frac{64}{40}}$ – не рассматриваем, т.к. $k > 0$.

Тогда $0 < k < \sqrt{\frac{64}{40}}$ и $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1$, т.к

между $\sqrt{\frac{64}{40}}$ и 0 – одно целое число 1

Тогда:

$$\begin{cases} d_1^2 + 21d_1 + 68 > 9d_1 + 32 \\ d_1^2 + 21d_1 + 108 < 9d_1 + 36 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1^2 + 12d_1 + 36 > 0 \\ d_1 + 12d_1 + 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (d_1 + 6)^2 > 0 \\ (d_1 + 6)^2 < 24 \end{cases} \qquad d_1 \neq -6$$

$\sqrt{24} > d_1 + 6 > -\sqrt{24}$

(2)

$d_1 < 2\sqrt{6} - 6$

$d_1 > -2\sqrt{6} - 6$ $\qquad d_1 \neq -6.$

~~$(-2\sqrt{6} - 6; 2\sqrt{6} - 6)$~~

~~Ответ: $(-2\sqrt{6} - 6) \cup (2\sqrt{6} - 6) \setminus \{-6\}$~~

Найдём целые числа в этом промежутке

$-2 < 2\sqrt{6} - 6 < -1$ $\quad -11 < -2\sqrt{6} - 6 < -10$

3,5 Тогда $d_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

Ответ: $d_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

21101807 (U123184 M1301968)

Чистовик

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10) \end{cases}$$

Пусть $a = x_1$, $b = y_1$.

Тогда заметим, что уравнение системы $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \le 10$, обозначает что точки $(x;y)$ должны принадлежать (внутренней части и ~~…~~ границе) какому-то кругу на плоскости с центром $(x_1;y_1)$ радиуса $\sqrt{10}$.

Найдём интересующие нас центры.

$$x_1^2+y_1^2 \le \min(-6x_1-2y_1,\ 10)$$

I. Пусть $-6x_1-2y_1 \le 10$ 3

$$3x_1+y_1 \ge -5$$

$$x_1^2+y_1^2 \le -6x_1-2y_1$$

21101807 (U123184 M1301968)

Чистовик.

Чистовик.

Чистовик.

$$(x_1+3)^2+(y_1+1)^2 \le 10.$$

Тогда интерьерные все центры в этом случае

~~и~~ являются решением системы.

$$\begin{cases}(x_1+3)^2+(y_1+1)^2 \le 10\\ y_1+3x_1 \geq -5\end{cases}$$

~~Решение ...~~

II. $-6x_1-2y_1 \geq 10$

$3x_1+y_1<-5.$

$x_1^2+y_1^2 \le 10.$

Тогда интерьерные все центры в этом случае являются решением системы.

$$\begin{cases}y_1<-5-3x_1\\ x_1^2+y_1^2 \le 10\end{cases}$$

4

Изобразим на графике полученные местоположения центров.

Перед этим, найдём точки пересечения окружностей $(x_1+3)^2+(y_1+1)^2=10$ и $x_1^2+y_1^2=10$

чистовик.

чистовик.

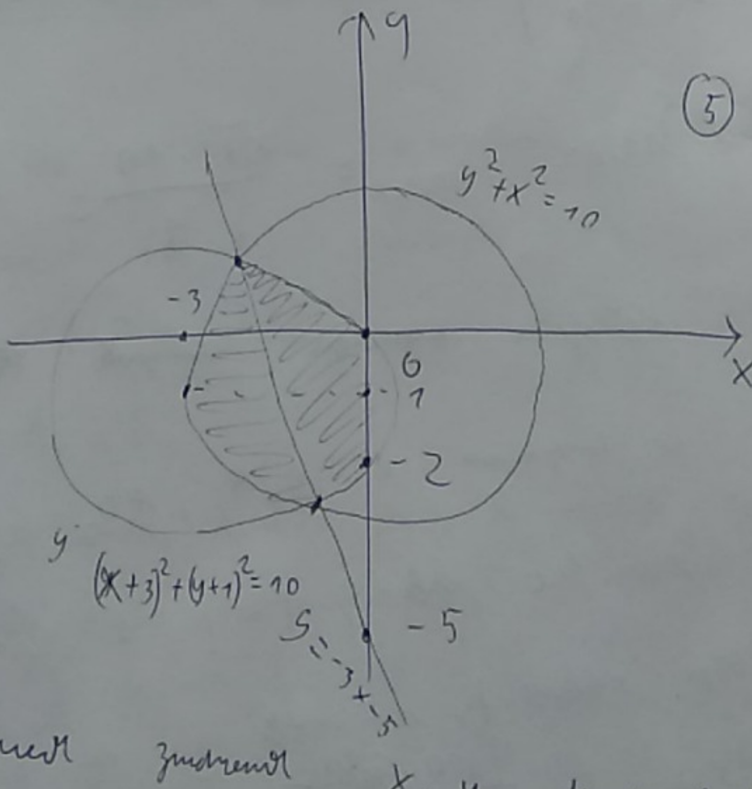
$$-\begin{cases} x_1^2+6x_1+y_1^2+2y_1=0. \\ x_1^2+y_1^2=10 \end{cases}$$

(Заметим, что радиус окружности равен $\sqrt{10}$, а расстояние от $(-3;-1)$ до 0 равно $\sqrt{10}$ => центр окружности лежит на окружности другой)

$$6x_1+2y_1=-10$$

$y_1=-5-3x_1$ — тогда точки их пересечения лежат на этой прямой.

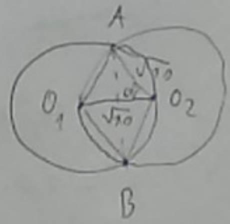
Изобразим получившееся на графике.



Итого, получившиеся значения x_1, y_1 лежат в заштрихованной области.

21101807 (U123184 M1301968)

Чистовик.



Обозначим центры окружностей за O_1, O_2

А точки пересечения за A и B.

~~Площадь~~ Радиусы окружностей равны и равны $\sqrt{10}$.

O_1 и O_2 принадлежат окружностям друг друга.

~~Зн~~ То ΔO_1AO_2 и ΔO_1O_2B – равносторонние (стороны по $\sqrt{10}$)

$$S_{\Delta O_1AO_2} = S_{\Delta O_1O_2B} = \frac{\sqrt{3}\cdot 10}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Найдём площади секторов ~~O_1AO_2, O_1AO_2~~ со сторонами Δ O_1A, AO_2 и O_1B, BO_2.

Они все равны, (т.к. Δ - равносторонние и окр. равны). – полн. площадь

$$S_{сектор} = \frac{\pi\cdot 10\cdot \cancel{360}\,\frac{60}{360}}{\cancel{10}} = \frac{5\pi}{3}$$

относит. угол

⑥

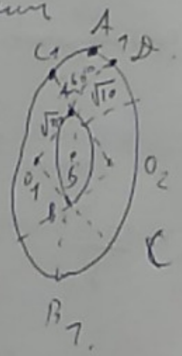
Тогда наша площадь $4\cdot S_{сект} - S_{\Delta O_1AO_2} - S_{\Delta O_1O_2B} =$

$= \frac{20\pi}{3} - 5\sqrt{3}$

Чистовик.

Заметим, что мы нашли множество точек A и B, теперь надо пересечь круги радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в этих точках.

Заметим, что получившиеся области точек X и Y, это те же фигуры области точек A и B, ~~увеличенной~~ но другого размера.



$S = \frac{20\pi}{3} - 5\sqrt{3}$

~~Заметим, что подобные фигуры на плоскости~~ ~~...~~

Площадь фигуры, на которые разделяет множество точек $(A; B)$ точками A и B. ~~Заметим Тогда~~ AB до пересечения с новой областью обозначим A_1 и B_1.

7

Тогда через точки A и B через O_1 проведём такие же прямые, обозначим точки D и C. Площадь сектора с центром O_1 и вершинами D и C (т.к. фигуры с вершинами A и B и центром O_1, и C и D и центром O_1 подобны (просто радиус удвоился) то отношения их будут как квадрат подобия, т.е. 4.

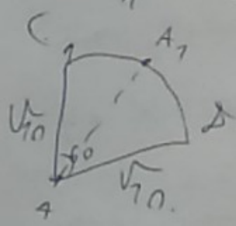
$\frac{1}{2}S\cdot 4 = 2S.$

Аналогично для $O_2 = 2S.$

Итого $4S.$

Осталось посчитать площади секторов C_1AD и

ещё симметричного



Получаем $S_{сект} = \frac{\pi\cdot 10}{6} = \frac{5\pi}{3}$

итого $\frac{10\pi}{3}.$

Тогда итоговая площадь

$$\frac{80\pi}{3} - 20\sqrt{3} + \frac{10\pi}{3} = 30\pi - 20\sqrt{3}$$

8

Ответ: $30\pi - 20\sqrt{3}$

Чистовик

N2.

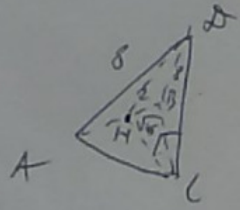
Опустим перпендикуляр из точки C на сторону AB в ~~тетраэдре~~ $\triangle ABC$. Обозначим основание H. Заметим, что тетраэдр ABCD симметричен относительно плоскости CHD => ось цилиндра пройдёт через H.

~~Пусть~~ Пусть ось пересекает тетраэдр в точке (

Обозначим за O_1 и O_2 центры оснований цилиндра. ~~Давайте рассмотрим проекции~~.

Рассмотрим момент времени, когда ABC || ~~плоскости~~. плоскости оснований.

Тогда $DC \perp ABC$, т.к. $DC \parallel$ оси цилиндра. Тогда $CH = \sqrt{45}$ и $DH = \sqrt{60}$ по т. Пифагора.



9

Тогда $DC = \sqrt{60-45} = \sqrt{15}$

Теперь давайте увеличивать DC.
Тогда угол между плоскостью основания
и ABC будет увеличиваться.
Тогда R цилиндра, тоже будет $\uparrow$, ч.т.д.
Аналогично при уменьшении, R будет $\uparrow$.
Ответ: $\sqrt{15}$

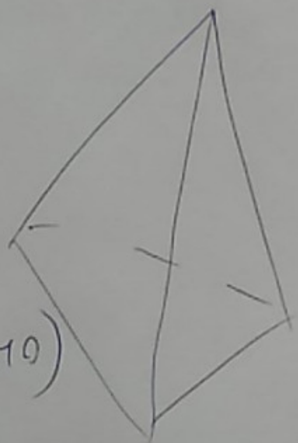
Черновик.

$(\ldots + 8k) \cdot 9$

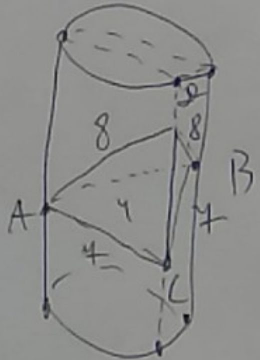
Черновик.

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$$

$$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)$$



$$a^2+b^2 \le 10.$$

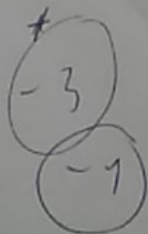


$$a^2+b^2 \le -6a-2b$$

$6a+2b$

$$-6a-2b \le 10.$$

$$6a+2b \ge -10.$$



$$a^2+6a+b^2+2b \le 10$$

$$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$$

21101807 (U123184 M1301968)

$$\frac{(a_1+a_1+8k)\cdot 9}{2}$$

Чернови.

$$S=(a_1+4k)\cdot 9$$

$$k<\frac{8}{2\sqrt{10}}$$

$\cancel{a_1+}$ $\cancel{a_1^2+21a_1k+68k^2}$.

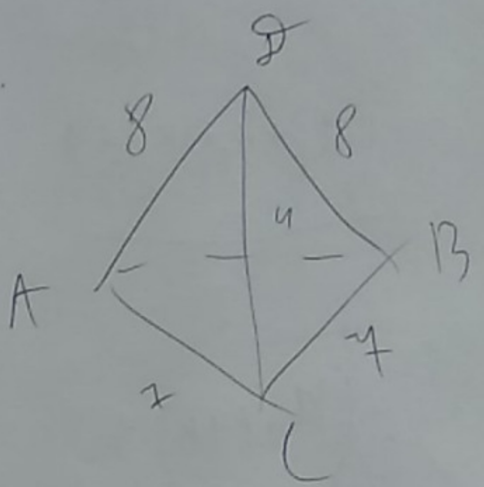
$$S > a_1^2+21a_1k+108k^2-60$$

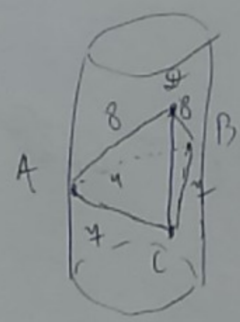
$$S < a_1^2+21a_1k+68k^2+4.$$

a_1+36k.

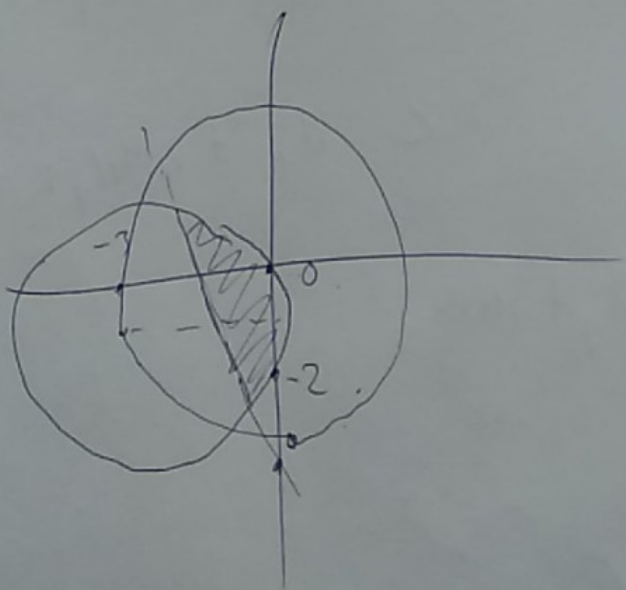
21101807 (U123184 M1301968)

чертежи.

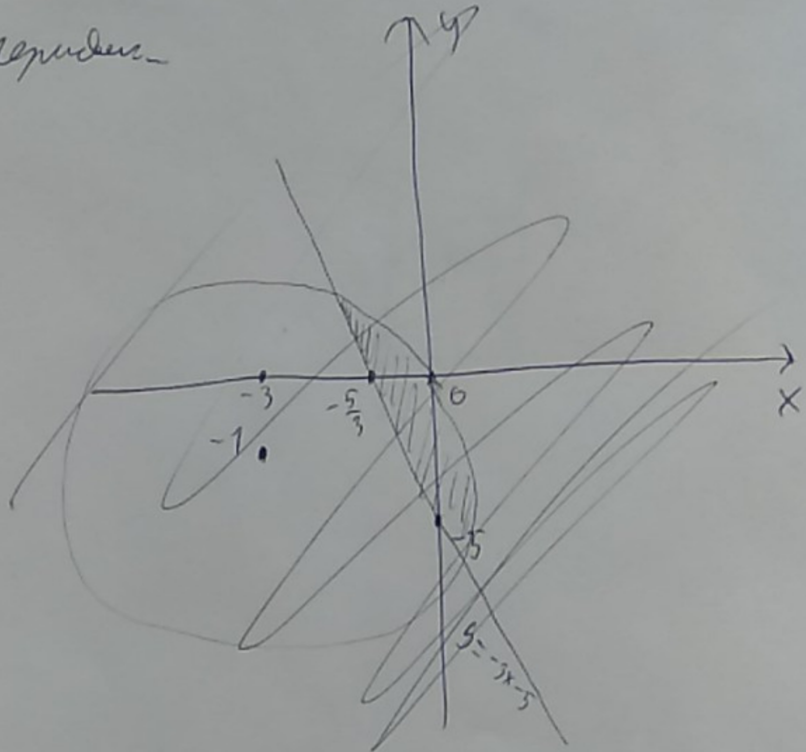




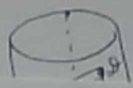
X_1^2



Черидан



Черновик.



$S = \cancel{9d_1+8k}$

$\cancel{k}$

$\cancel{S = 9d}$ $\qquad 9d_1+36k$

$9d_1$

$d_1,\ d_1+k,\ d_1+2k \ldots$

$$\frac{(1+8)\cdot 8}{2} = 36.$$

$9d_1+36k-4 < (d_1+4k)(d_1+17k)$

$9d_1+36k+60 > (d_1+9k)(d_1+12k)$

$9d_1+36k-4 < d_1^2+21d_1k+68k^2.$

$9d_1+36k+60 > d_1^2+21d_1k+108k^2.$

$108k^2-4 < 60+68k^2.$

$40k^2 < 64.$

21101807 (U123184 M1301968)

Чернови.

$$\frac{(1+8)8}{2}$$

$$9d_1+36k-4 < (d_1+4k)(d_1+17k)$$

$$(d_1+9k)(d_1+12k) < 9d_1+36k+60$$

$$d_1^2+21kd_1+108k^2-d_1^2-21kd_1-68k^2<64$$

$$40k^2 < 64$$

$9d$

$$k < \frac{8}{2\sqrt{10}} \qquad 9d_1+36k$$

$$\text{max } 9d_1 + \frac{\cancel{2\cdot18}\,144}{\sqrt{10}}$$

$$d_1^2+21d_1k+68k^2 > 9d_1+36k-4$$

$$9(d_1+4k)-4 < (d_1+4k)(d_1+17k)$$

$$(d_1+4k)(9-d_1-17k) < 4$$

$$(d_1+9k)(d_1+12k) < 9d_1+36k+60$$

21101807 (U123184 M1301968)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101807**

ID профиля: **123184**

Вариант 24

Чистовик. Вариант 24.

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

Т.к. $НОД(a;b;c)=33 \Rightarrow$ каждое из чисел $a, b, c \vdots 33$ и не существует числа больше, на которое они бы вместе делились.

$a=a_1 d,\ b=b_1 d,\ c=c_1 d.$

$$НОК(a;b;c) = \frac{abc}{\underbrace{d^2}_{НОД}} = \frac{d^3 a_1 b_1 c_1}{d^2} = d\, a_1 b_1 c_1$$

Тогда $a_1 b_1 c_1 = 3^{18}\cdot 11^{14}$.

Причём все они не могут делиться на ~~...~~ число большее 1 одновременно. (1)

Значит сумма степеней вхождений ~~тройки~~ 3 в какие-то 2 числа равна 18, причём, т.к. ~~тройки~~ в тройке $(a;b;c)$ каждое ~~и~~ имеет значение то, выбрать какие-то два из них можно 3 способами.

Чистовик

N 5

(C_3^2). ~~Пусть~~ Чистовик Тогда количество способов распределения степени 3 : $3 \cdot 19 = 57$.

т.к. при $a+b=19$, a и $b \in N \cup \{0\}$ то кол-во пар $(a;b) = 19$.

Аналогично со степенями. 11 :

$3 \cdot 15 = 45$

Итог $57 + 45 = 102$. – вариантов.

Ответ: 102

2

21101807 (U123184 M1301969)

Чистовик

N 5

1. $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$x<29$ $\quad x > -49$

2. $\log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)$

$x \neq 0$ $\quad x<29$

т.к. $-(x+1)>0$

3. $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\left(-(x+1)\right) = 2\log_{\frac{x}{7}+7}\left(-(x+1)\right)$

$x>-49$ $\quad \vee 0$

$x \neq -42$ $\quad x<-1$

Доп условие

$x \in (-49;-1)$

$x \neq -42$

Перемножим 1 и 2 число.

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_{(29-x)}\left(\frac{x+49}{7}\right) \cdot \frac{1}{\log_{(29-x)}(-(x+1))} =$

$= \log_{-x-1}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\quad$ (3)

Т.е. есть $(1)\cdot(2) = \frac{2}{(3)}$

(x) – число под номером x.

$(1)\cdot(2)\cdot(3) = 2.$

Тогда произведение 3-х этих чисел равно 2. Пусть 2 из них

Чистовик

Чистовик

ровным t

Тогда $t^2(t+1)=2$

$t^3+t^2-2=0$

~~t=1 корень~~

$(t-1)(t^2+t+1)+(t-1)(t+1)=0$

$(t-1)(t^2+2t+2)=0$, корней нет.

$D<0$

Тогда единственный вариант $t=1$.

Тогда какое-то одно из чисел ровно 2 остальные $=1$.

I. $2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2$.

$\frac{x}{7}+7=29-x$.

$8x=203-49$

$x=\frac{154}{8}$. $x>0$ – не подходит.

II. $2\log_{\frac{x}{7}+7}\left(-(x+1)\right)=2$.

4

$\frac{x}{7}+7=-x-1$. ~~$x=-\frac{25}{7}$ – не подходит т.к.~~

$8x=-56$ ~~2. ... $\frac{1}{2}\log_{\frac{21}{4}}\left(\frac{141}{4}\right)=1 \quad \left(\frac{21}{4}\right)^2 \neq \frac{141}{4}$~~

~~$x=-7$~~ $x=-7$

Чистовик.

$x=-7$ подходит т.к тогда (1), (2). $=1$.

а (3) $=2$.

Теперь ~~...~~ рассмотрим ~~...~~ (1).

$$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$$

При $x=-7$ $\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$.

Пусть $x>-7$, тогда $29-x \downarrow$ $\frac{x}{7}+7 \uparrow$

Тогда $\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) \neq 1$. (относительно $\{x=-7$)

Аналогично $x<-7$ $\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) \neq 1$, т.к

$29-x \uparrow$ $\frac{x}{7}+7 \downarrow$ (относительно $x=-7$)

Тогда, если (2) $=2$ при других x, то

5

(1) не может быть равно 1 $\Rightarrow$ рассматривать

(2) $=2$ - не имеет смысла.

Ответ: (1

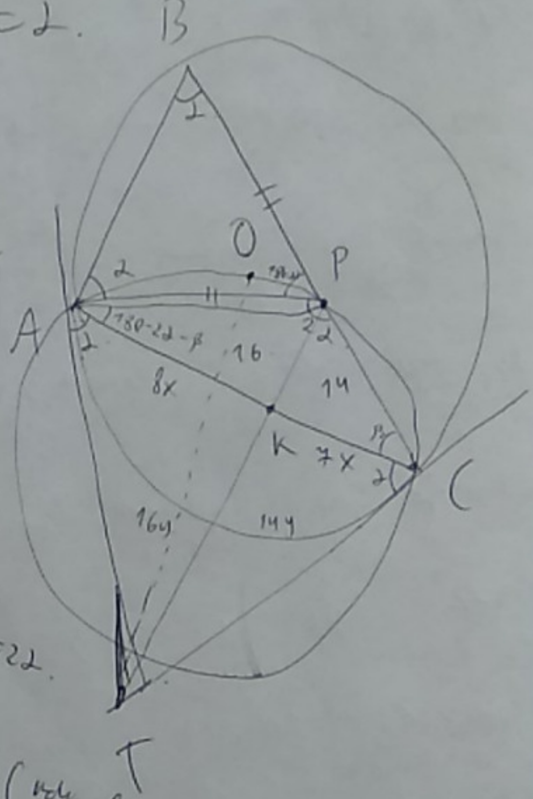
Чистовик.

N 6

d) Пусть $\angle ABC = \alpha$.

Тогда $\angle AOC = 2\alpha$

(т.к O - центр описанной окружности).



Тогда, т.к $AOPC$ - вписанный $\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$.

Тогда $\angle APB = 180-2\alpha$ (как внешний).

Тогда $\angle BAP = \alpha$. (по сумме $\angle$ Δ) $\Rightarrow$ ΔABP = равнобедренный

$BP = AP$,

Рассмотрим ΔAPK и PKC.

6

Заметим, что у них общая высота опущенная из P. Тогда: (пусть высота $= h$)

$\frac{1}{2} h \cdot AK = 16$, $\frac{1}{2} h \cdot KC = 14 \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$.

Чистовик.

Тогда, по аналогичным причинам S треугольников ATK и TKC будут относиться как 16 к 14 (т.к. общая высота опущенная из T).

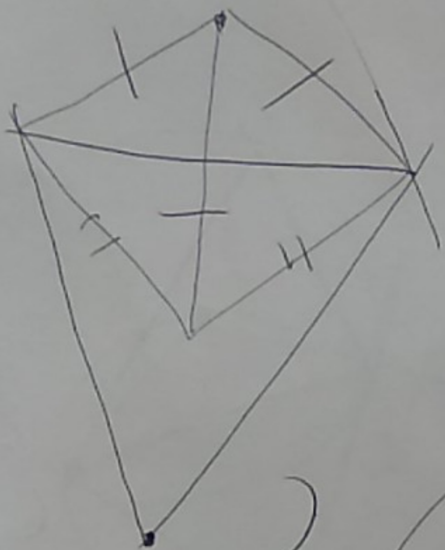
Теперь рассмотрим ΔTAP и ΔTCP. Их площади равны: $S_{APK} + S_{TAK}$ и $S_{PKC} + S_{TKC}$ соответственно.

Тогда, т.к. площади S_{APK} и S_{PKC}; S_{TAK} и S_{TKC} относятся как $16 : 14 \Rightarrow S_{\Delta TAP}$ и $S_{\Delta TCP}$ относятся как $16 : 14$ и

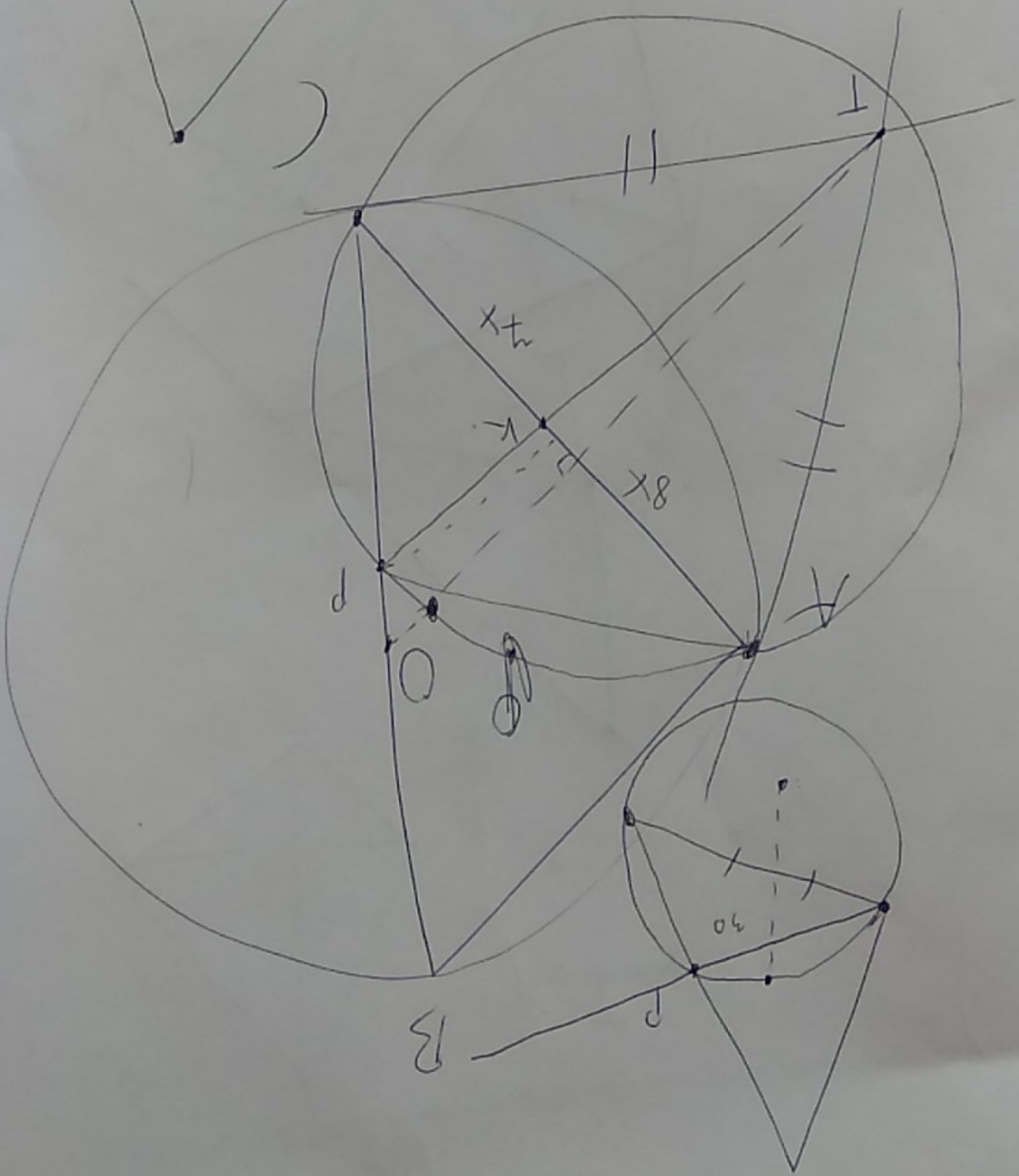
AT и TC — касательные $\Rightarrow$ они равны $\Rightarrow$ высоты опущенные к ним из точки P ~~равны~~. Относятся как $8 : 7$. ~~Их длина и~~ Но тогда и BC делится точкой P в отношении $8 : 7$. (*)

Тогда $S_{ABC} = \frac{30}{7} \cdot 15 = \frac{450}{7}$

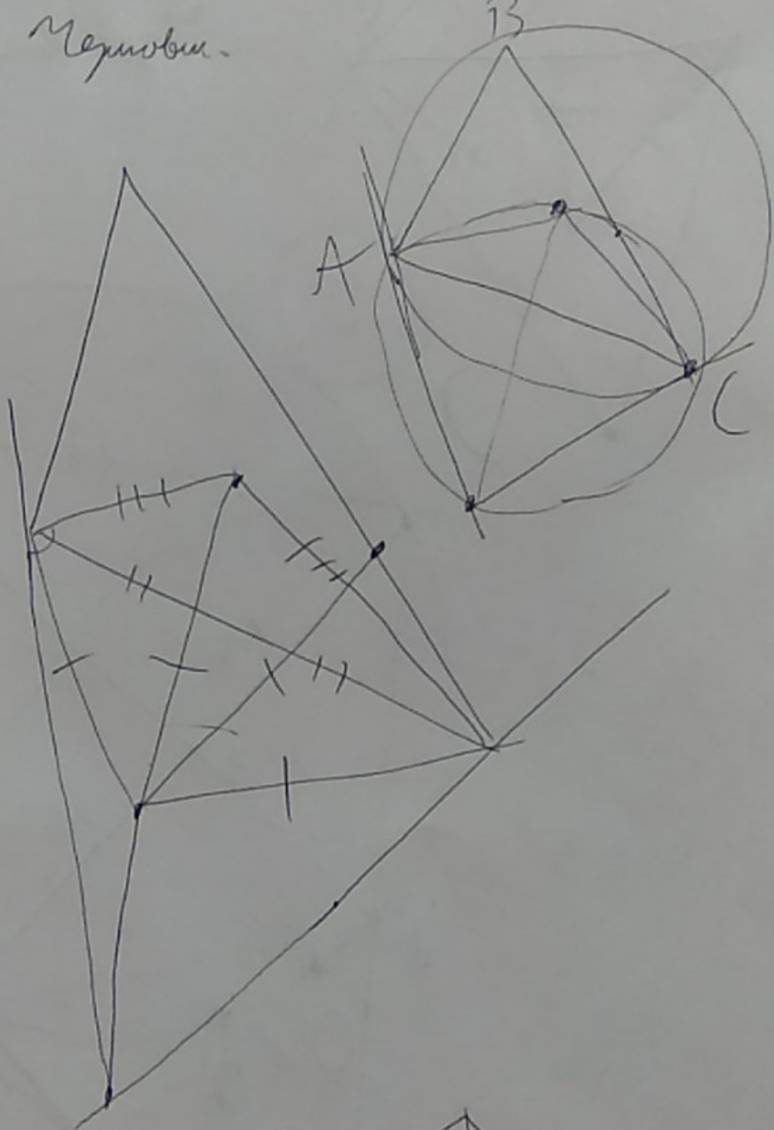
Ответ: $\frac{450}{7}$

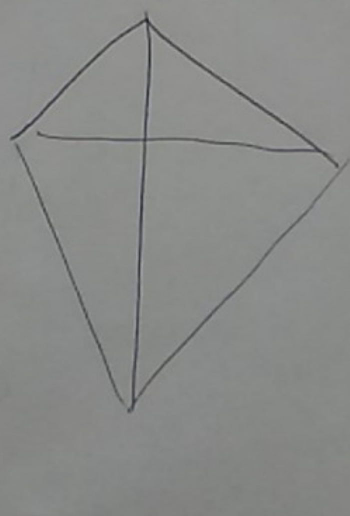


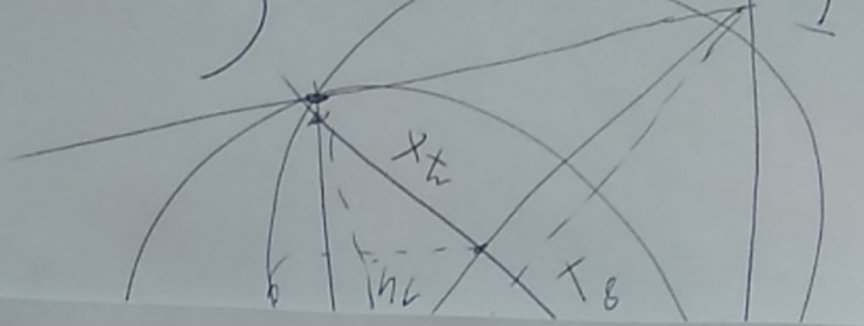
Чернови.



Черновик.







Черновик.

$a \quad b \quad c = 33,$

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{\cancel{33}} = 3^{19} \cdot 11^{13}.$$

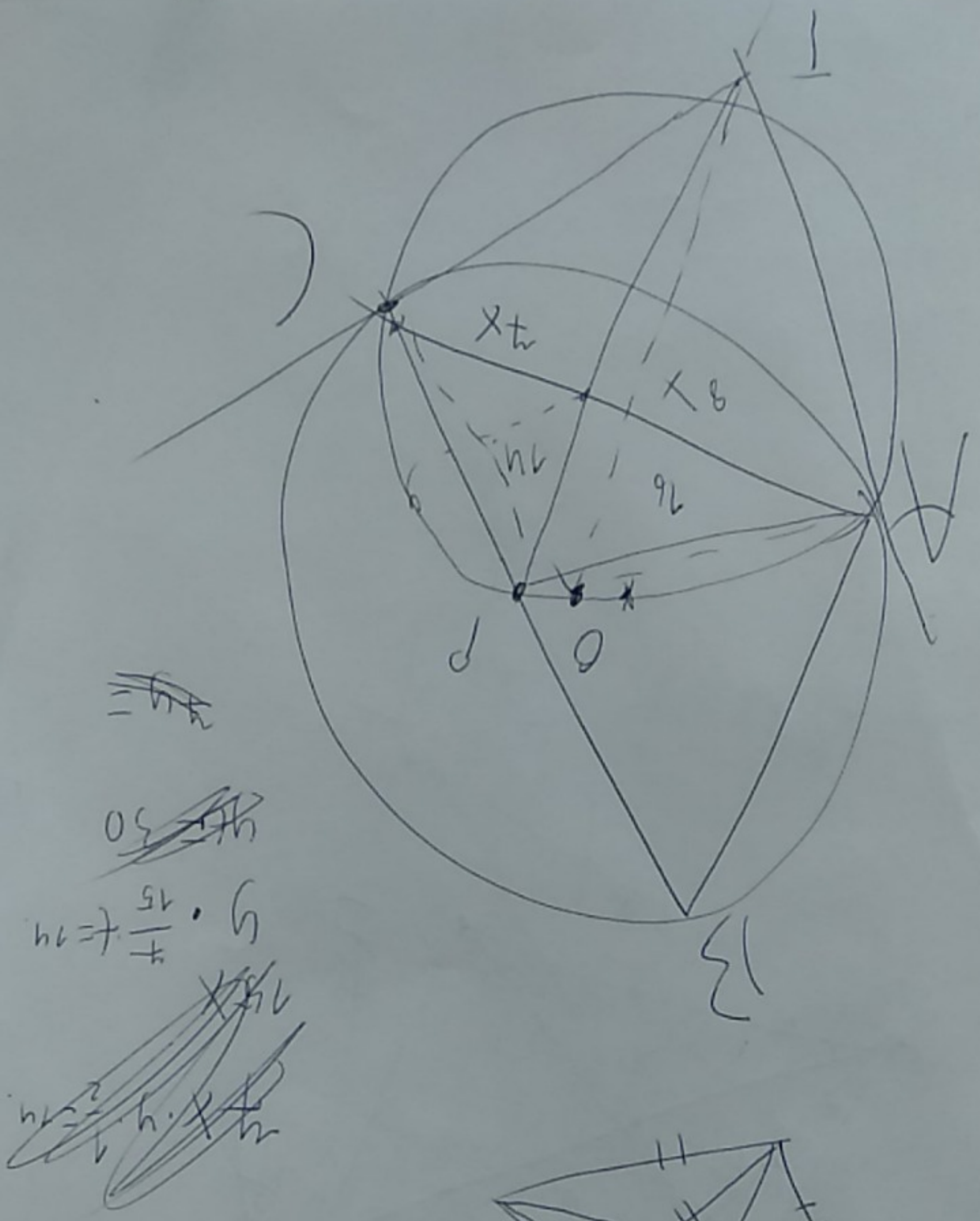
~~$a\, b\, c =$~~ $3^{18} \cdot 11^{14}.$

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{d} = 3^{18} \cdot 11^{14}.$$

$3^{18} \cdot 11^{13}.$

33

21101807 (U123184 M1301969) · Черновик



черновик.

21101807 (U123184 M1301969)

~~Чистовик~~ Черновик.

N 2

$-x > -49$

1. $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x+49}{7}\right)$

$x < 29$

$-x < 29$

2. $\log_{(x+1)^2}(29-x) = \log_{-x-1}\left(\sqrt{29-x}\right)$

$x \neq 0$

3. $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+1}}\left(-(x+1)\right) = 2\log_{\frac{x}{7}+7}\left(-(x+1)\right)$

$x > -49$

$x < -1$

$x < -1$
$x > -49$
$x \neq 0.$

$t_1 \cdot t_2 = \frac{2}{t_3}.$

3