Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101730**

ID профиля: **371693**

Вариант 24

Чистовик

[№1.]

1. $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Пусть d – зн. ар. пр.
Т.к. $a_i \in \mathbb{Z}$, то и $d \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S - 4 \\ a_{10} a_{13} < S + 60 \end{cases}$$

$\boxed{a_1 - ?}$

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = \boxed{(a_1 + 4d) \cdot 9 = S}$$

1) $a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) = a_1^2 + 17a_1d + 4a_1d + 68d^2 = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2$

2) $a_{10} a_{13} = (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) = a_1^2 + 12a_1d + 9a_1d + 108d^2 = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2$

1) $a_5 \cdot a_{18} = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4$ $\Leftrightarrow$

2) $a_{10} a_{13} = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 21a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1 + 21a_1d + 68d^2 < 9a_1 + 36d + 60 - 40d^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cancel{9a_1 + 36d} - 4 < \cancel{9a_1 + 36d} + 60 - 40d^2$

$-4 < 60 - 40d^2 \Rightarrow 40d^2 < 64 \Rightarrow d^2 < \frac{64}{40} = \frac{8}{5}$.

Т.к. прогрессия возр, то $d > 0$, а т.к. $d \in \mathbb{Z}$, то единственное возможное зн-е $\boxed{d = 1}$. Имеем:

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 36 - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 36 + 60 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 68 > 32 \\ a_1^2 + 12a_1 + 108 < 96 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 6)^2 > 0 \text{ — верно } \forall a \in \mathbb{Z}, \text{ кроме } -6 \\ (a_1 - (-6 + 2\sqrt{6}))(a_1 - (-6 - 2\sqrt{6})) < 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6}). \text{ Т.к.}$$

$-6 + 2\sqrt{6} < -1$, то т.к. $-11 < -6 - 2\sqrt{6}$, а $a_1 \in \mathbb{Z}$, то

$a_1 \in \{-10; -9; -8; \ldots; -2\} // \{-6\}$.

$-6 + 2\sqrt{6} \vee -2$
$2\sqrt{6} \vee 4$
$24 > 16$
$\Rightarrow -6 + 2\sqrt{6} > -2$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee -12$
$-2\sqrt{6} \vee -6$
$6 \vee 2\sqrt{6}$
$36 > 24$
$\Rightarrow -6 - 2\sqrt{6} > -12$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee -10$
$-2\sqrt{6} \vee -4$
$4 \vee 2\sqrt{6}$
$16 < 2\sqrt{6}$
$\Rightarrow -6 - 2\sqrt{6} < -10$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee -11$
$5 \vee 2\sqrt{6}$
$25 > 24$
$\Rightarrow -6 - 2\sqrt{6} > -11$

$-6 + 2\sqrt{6} \vee -1$
$2\sqrt{6} \vee 5$
$24 < 25$
$\Rightarrow -6 + 2\sqrt{6} < -1$

Ответ: $a_1 \in \{-10; -9; -8; \ldots; -2\} // \{-6\}$.

1

Чистовик. $M \in \mathbb{R}^2$, $S_M - ?$ №3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \quad (1)\\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10) \quad (2)\end{cases}$$

(1) – область внутри круга с центром в т. $(a;b)$ и радиуса $\sqrt{10}$, включая границу круга.

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+b^2 \le -6a-2b,\ -6a-2b \le 10 \\ a^2+b^2 \le 10,\ -6a-2b \ge 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+6a+b^2+2b \le 0,\ \begin{cases}-6a-2b \le 10\\ -6a-2b \ge 0\end{cases} \\ a^2+b^2 \le 10,\ -6a-2b \ge 10 \end{array}\right.$

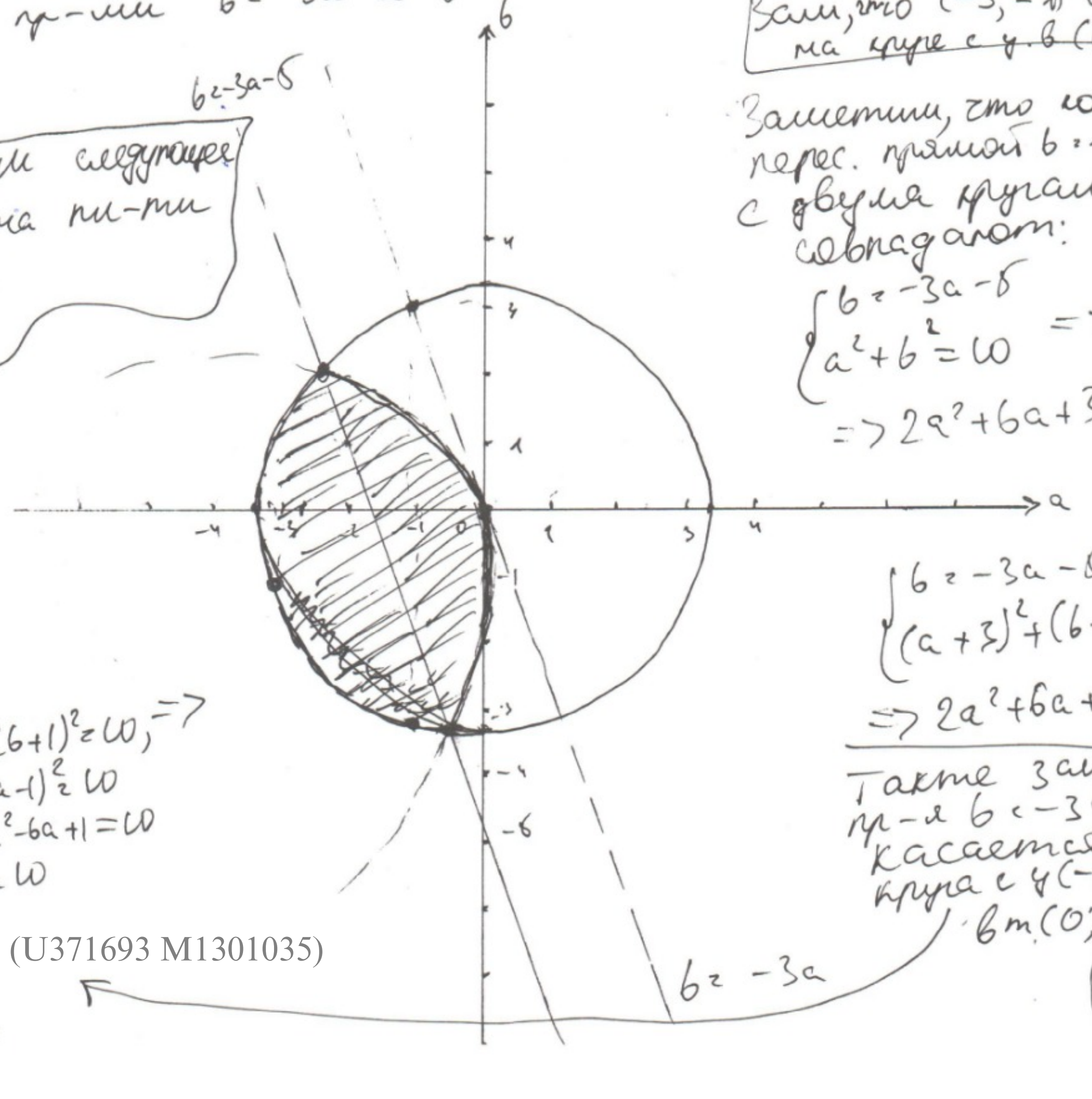
$\begin{cases} b \ge -3a-5 \\ b \le -3a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a+3)^2+(b+1)^2-9-1 \le 0, \\ a^2+b^2 \le 10,\ b \le -3a-5 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \ (A),\ \begin{cases} b \ge -3a-5 \\ b \le -3a \end{cases} \\ a^2+b^2 \le 10 \ (Б),\ b \le -3a-5 \end{array}\right.$

(A) – обл. внутри круга с ц. в т. $(-3;-1)$ и рад. $\sqrt{10}$ на пл. $(a;b)$ + граница, между прямыми $b=-3a$ и $b=-3a-5$.
(Б) – обл. внутри круга с ц. в т. $(0;0)$ и рад $\sqrt{10}$ на пл. $(a;b)$ + граница, ниже прямой $b=-3a-5$.

Зам, что $(-3;-1)$ лежит на круге с ц. в $(0;0)$.

Получим следующее мн-во на пл-ти $(a;b)$:



Заметим, что коорд. перес. прямой $b=-3a-5$ с двумя кругами совпадают:

$\begin{cases} b=-3a-5 \\ a^2+b^2=10 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a^2+6a+3=0$

и

$\begin{cases} b=-3a-5 \\ (a+3)^2+(b+1)^2=10 \end{cases}$
$\Rightarrow 2a^2+6a+3=0.$

Также зам, что пр-я $b=-3a$ касается круга с ц $(-3;-1)$ в т. $(0;0)$.

$\begin{cases} b=-3a \\ (a+3)^2+(b+1)^2=10, \end{cases} \Rightarrow$
$(a+3)^2+(3a-1)^2=10$
$a^2+6a+9+9a^2-6a+1=10$
$10a^2+10=10$
$a^2=0$
$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

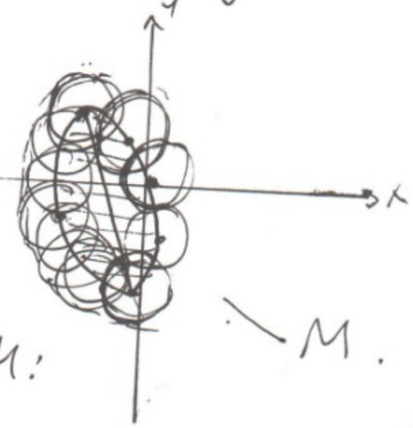
2

21101730 (U371693 M1301035)

Чистовик $\boxed{№3}$ продолжение.

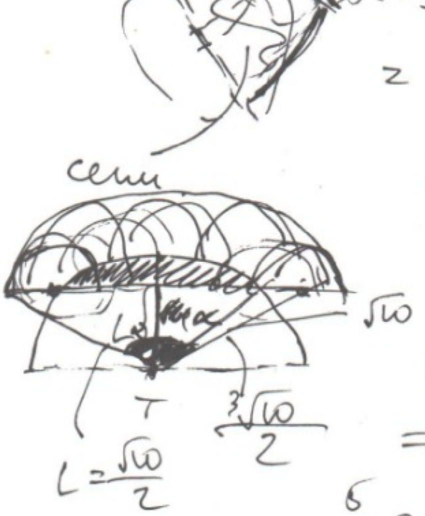
Итак, мы получили симметричное относ. прямой $b=-3a-5$ множество S в пл-ти $(a;b)$ в виде «линзы»:

Заметим, что мн-во M — это мн-во всех кругов с центром в любой точке $(a;b)$ мн-ва S, поэтому мн-во M ~~состоит из~~ выглядит след. образом на пл-ти $(x;y)$:



Т.к. мн-во S симметр. относ. прямой $b=-3a-5$, рассмотрим одну половину мн-ва M — его S будет в 2 раза меньше мн-ва M:

Рассм. окр-ть радиуса $\sqrt{10}+\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$ (окр-ть с ц. T на эскизе). Тогда $\frac{1}{2}S_M=\frac{1}{2}S_T-S_{сегм}$, где $S_{сегм}$ — площадь сегмента окр-ти T. Найдем $S_{сегм}$. 1) $\frac{1}{2}S_T=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{9}{4}\cdot 10=\frac{45\pi}{4}$; Расст. от $T(-3;-1)$ до пр. $y=-3x-5$ равно: $l=\frac{|3\cdot(-3)-1+5|}{\sqrt{10}}=\frac{|-9-1+5|}{\sqrt{10}}=\frac{|-10+5|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}=l$



$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{10}}=\frac{1}{3}}$, $\Rightarrow 2\alpha=2\arccos\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow S_{сегм}=S_{сект}-S_\triangle=\pi\cdot 10\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{2\arccos\frac{1}{3}}{2\pi}-S_\triangle=\frac{10\cdot 9}{4}\cdot\arccos\frac{1}{3}-S_\triangle=\frac{45}{2}\arccos\frac{1}{3}-S_\triangle$, где

$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{3\sqrt{10}}{2}\sin\alpha\right)=\frac{\sqrt{10}}{4}\left(3\sqrt{10}\cdot\sin\alpha\right)$; $\boxed{\sin\alpha=\sqrt{\frac{9}{9}-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$=\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot 3\sqrt{10}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{10\cdot 2\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{2}$

Чистовик ($\boxed{№ 3}$ продолж).

$\Rightarrow S_{сегм} = S_{сект} - S_{\Delta} = \frac{45}{2} \arccos\frac{1}{3} - 5\sqrt{2}$;

$\Rightarrow \frac{1}{2} S_M = \frac{1}{2} S_T - S_{сегм} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \cancel{10}^{5} \cdot \frac{9}{\cancel{4}_2} - \frac{45}{2} \arccos\frac{1}{3} + 5\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{45}{2} - \frac{45}{2} \cdot \arccos\frac{1}{3} + 5\sqrt{2} =$

$= \frac{45}{4} \pi - \frac{45}{2} \arccos\frac{1}{3} + 5\sqrt{2}$, $\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Rightarrow}$ $S_M = 2 \cdot \frac{1}{2} S_M = \boxed{\frac{45}{2}\pi - 45\arccos\frac{1}{3} + 10\sqrt{2}}$

Ответ: $\boxed{\frac{45}{2}\pi - 45\arccos\frac{1}{3} + 10\sqrt{2}}$.

Черновик.

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1d+68d^2>9a_1+36d-4 \\ a_1^2+21a_1d+108d^2<9a_1+36d+60 \end{cases}$$

$a_1^2+21a_1d+68d^2>9a_1+36d-4$

$a_1^2+21a_1d+68d^2<9a_1+36d+60-40d^2$

$=> \cancel{9a_1+36d}-4<\cancel{9a_1+36d}+60-40d^2$

$40d^2<64$

$d^2<\frac{64}{40}=\frac{32}{20}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$

$d^2<\frac{8}{5}$

$$=>\begin{cases} a_1^2+21a_1+68>9a_1+36-4 \\ a_1^2+21a_1+108<9a_1+36+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+12a_1+68>32 \\ a_1^2+12a_1+108<96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+12a_1+36>0 \\ a_1^2+12a_1+12<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+12a_1+36>0 \\ a_1^2+12a_1+12<0 \end{cases}$$

$(a_1+6)^2>0$ – верно $\forall a_1$.

$a_1=\frac{-12\pm\sqrt{144-4\cdot12}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{12\cdot12-4\cdot12}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{12\cdot8}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{4\cdot3\cdot4\cdot2}}{2}=\frac{-12\pm4\sqrt6}{2}=-6\pm2\sqrt6$

$=> a_1\in(-6-2\sqrt6;-6+2\sqrt6)$

$a_1^2+12a_1+12=0$

$-6-2\sqrt6;\ -6+2\sqrt6$

$a_1=\frac{-12\pm\sqrt{144-4\cdot12}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{12\cdot12-4\cdot12}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{8\cdot12}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{4\cdot2\cdot4\cdot3}}{2}=\frac{-12\pm4\sqrt6}{2}=-6\pm2\sqrt6$

$-6+2\sqrt6 > -2$
$2\sqrt6 \vee 4$
$24>16$

$-6-2\sqrt6>-11$. 9
$-2\sqrt6\vee-5$
$-6-2\sqrt6<-10$
$-2\sqrt6\vee-4$
$6\vee2\sqrt6$
$4\vee2\sqrt6$
$26>24$
$16<24$

$-6+2\sqrt6\vee-1$
$2\sqrt6\vee5$
$24<25$

$-6-2\sqrt6>-11$
$-2\sqrt6\vee-5$
$5\vee2\sqrt6$
$25>24$

$-6-2\sqrt6<-10$
$-2\sqrt6\vee-4$
$4\vee2\sqrt6$
$16<24$

$-6+2\sqrt6$

$-6-2\sqrt6<-9$
$-2\sqrt6\vee3$
$3\vee2\sqrt6$
$9\vee4\cdot6$
$9\vee24$
$9<24$

$a_5\cdot a_{18}>S-4$

$S+60>a_{10}a_{13}+60$

$a_5a_{18}+\cancel{S}+60>\cancel{S}+a_{10}a_{13}+56$

$a_5a_{18}+60>a_{10}a_{13}+56$

$a_5a_{18}+4>a_{10}a_{13}$

$(a_1+4d)(a_1+17d)+4>(a_1+9d)(a_1+12d)$

$\cancel{a_1^2+21a_1d}+68d^2+4>\cancel{a_1^2+21a_1d}+108d^2$

$40d^2<4$

$d^2<$

$-6+2\sqrt6<-1$
$2\sqrt6\vee5$
$24<25$

$-6-2\sqrt6>-12$
$-2\sqrt6\vee-6$
$6\vee2\sqrt6$
$36>24$

$-6+2\sqrt6>-2$
$2\sqrt6\vee4$
$24>16$

$$\begin{cases} a_5\cdot a_{18}>S-4 \\ a_{10}a_{13}<S+60 \end{cases}\qquad\begin{cases} a_5a_{18}>S-4 \\ S+60>a_{10}a_{13} \end{cases}$$

$a_5a_{18}+\cancel{S}+60>\cancel{S}-4+a_{10}a_{13}$

$a_5a_{18}+64>a_{10}a_{13}$

$a_1^2+\cancel{21a_1d}+68d^2+64>\cancel{a_1^2+21a_1d}+108d^2$

$40d^2<64$

$d^2<64/40=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$

Т.к. прогр. возр. и a_i и d – целые, то $d^2<\frac{8}{5}$

$=>\boxed{d=1}$

$-6+2\sqrt6<0$
$2\sqrt6\vee6$
$4\cdot6\vee36$
$24<36$

$4\vee\frac{8}{5}$
$20>8$

$108-96=12$

21101730 (U371693 M1301035)

Черновик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \ (1)\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b, 10)\ (2)\end{cases}$$

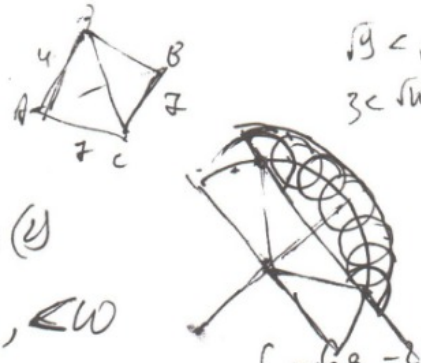
$$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2\le -6a-2b,\ -6a-2b\ge 0, \le 10\\ a^2+b^2\le 10,\quad 10\le -6-2b.\end{array}\right.$$

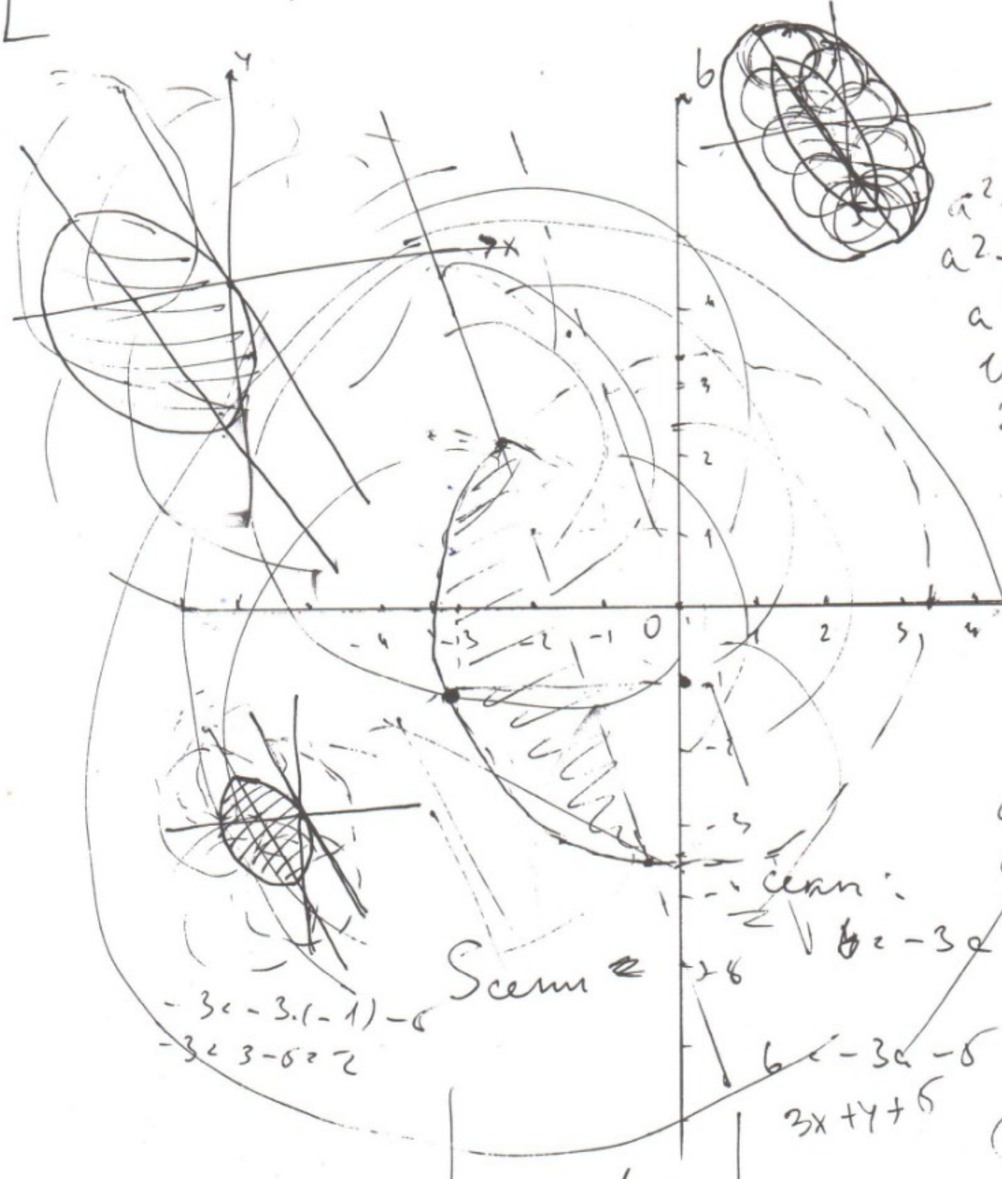
$$\left[\begin{array}{l}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10,\ 0\le -6a-2b\le 10 \\ a^2+b^2\le 10,\ -6a-2b\ge 10,\ 2b\le -6a-10 \quad b\le -3a-5\end{array}\right.$$

$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$

$3<\sqrt{10}<4$

$$\begin{cases}-6a-2b\le 10\\ -6a-2b\ge 0\end{cases}\quad \begin{cases}2b\ge -6a-10\\ 2b\le -6a\end{cases}\quad \begin{cases}b\ge -3a-5\\ b\le -3a\end{cases}$$





$b=-3a-5$

$a^2+(-3a-5)^2=10$

$a^2+(3a+5)^2=10$

$a^2+9a^2+30a+25=10$

$10a^2+30a+15=0\ |:5$

$2a^2+6a+3=0$

$a=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 2\cdot 3}}{4}$

$\pi R^2\cdot\frac{\alpha}{2\pi}$

$S_{сект}$

$b=-3a-5$

$(a+3)^2+(-3a-5+1)^2=10$

$a^2+6a+9+(3a+4)^2=10$

$a^2+6a+9+9a^2+24a+16=10$

$10a^2+30a+25=10$

$10a^2+30a+15=0\ |:5$

$2a^2+6a+3=0$

$S_{сект}$:

$b=-3a$

$S_{сект}=$

$-3<-3\cdot(-1)-5$

$-3<3-5=2$

$b=-3a-5$

$3x+y+5$

$(a+3)^2+(b+1)^2=10$

$b=-3a$

$(a+3)^2+(-3a+1)^2=10$

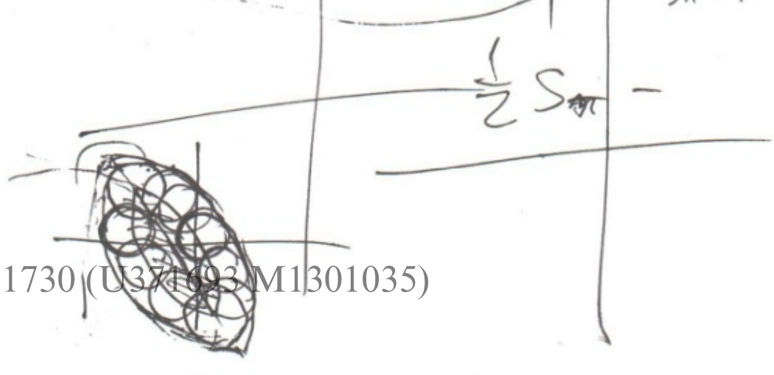
$(a+3)^2+(3a-1)^2=10$

$a^2+6a+9+9a^2-6a+1=10$

$10a^2+10=10$

$10a^2=0 \Rightarrow a=0$

$\frac{1}{2}S_{сект}$ –



21101730 (U371693 M1301035)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101730**

ID профиля: **371693**

Вариант 24

Чистовик №6. $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1, \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ -x-1>0 \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \\ x<-1 \\ x\neq -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x<-1,\ x>-49,\ x\neq -42}$

На ОДЗ каждое из выр-й $\Leftrightarrow$ следующим:

1) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = a$

2) $\log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\log_{|x+1|}(29-x) = \frac{1}{2}\cdot\log_{(-x-1)}(29-x) = b$

3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1) = c$.

Заметим, что $a\cdot b\cdot c = 2\cdot\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(-x-1)}(29-x)\cdot\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$

$= 2\cdot\frac{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)}{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(29-x)}\cdot\log_{(-x-1)}(29-x) = 2\cdot\log_{(29-x)}(-x-1)\cdot\log_{(-x-1)}(29-x)$

$= 2$. Имеем:

$\begin{cases} abc=2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ c=a+1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=c \\ a=b+1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=c \\ b=a+1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ c=a+1 \\ abc=2 \end{cases} (A) \\ \begin{cases} b=c \\ a=b+1 \\ abc=2 \end{cases} (Б) \\ \begin{cases} a=c \\ b=a+1 \\ abc=2 \end{cases} (C) \end{array}\right.$

(A) $\begin{cases} a=b \\ c=b+1 \\ abc=2 \end{cases} \Rightarrow c=b+1 \Leftrightarrow$
$\Rightarrow abc = b^2\cdot(b+1) = 2 \Leftrightarrow$

$b^3+b^2-2=0$

$b^3+b^2-2 \,|\, b-1 \to b^2+2b+2$
b^3-b^2
$2b^2-2$
$2b^2-2b$
$2b-2$
$2b-2$
0

$(b-1)\underbrace{(b^2+2b+2)}_{D=4-4\cdot 2<0}=0$

$\Rightarrow \begin{cases} b=1=a \\ c=2 \\ abc=2 \end{cases}$

$\Rightarrow b=\frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)=1$

$\log_{(-x-1)}(29-x)=\log_{(-x-1)}(-x-1)^2$

$(29-x)=(x+1)^2$ $\quad x^2+3x-28=0$
$29-x=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot 28}}{2}=$
$=\frac{-3\pm 11}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{8}{2}=4>-1,\ \notin ОДЗ \\ \frac{-14}{2}=-7\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{x=-7}$

(Б) аналогично (А):
$\begin{cases} b=c=1 \\ a=2 \\ abc=2 \end{cases}$ ~~$\Rightarrow \log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$, $\frac{x}{7}+7=29-x$, $x+49=203-7x$~~

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)=1 \Leftrightarrow \log_{(-x-1)}(29-x)=2$

$\Rightarrow x=-7$ (из (А))

$\Rightarrow c=2$, $x\in\varnothing$.
из (А)

(В) $\begin{cases} a=c=1 \\ b=2 \\ abc=2 \end{cases}$

$\Rightarrow c=2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)=1$

$\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)^2=\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\Rightarrow (x+1)^2=\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$x^2+2x+1=\frac{x}{7}+7$

$7x^2+14x+7=49+x$ $\Rightarrow 7x^2+13x-42=0$

~~$7x^2+14x-42=0 \,|:7$~~

~~$x^2+2x-6=0$~~

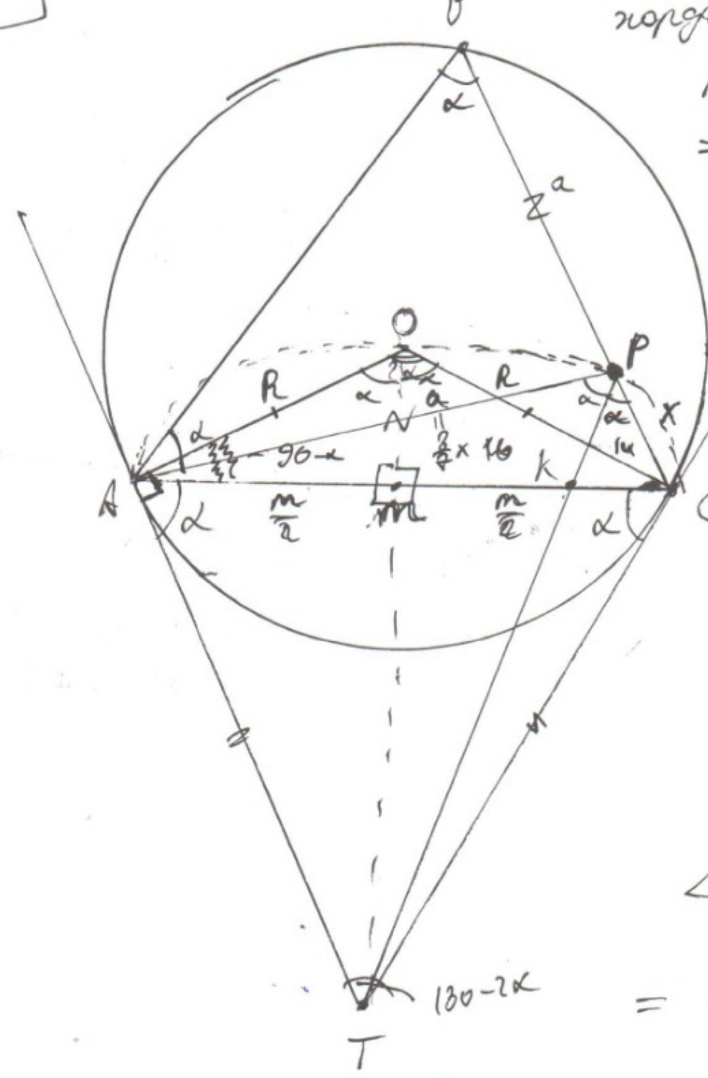
~~$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 6}}{2}$~~ ~~$=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{7}}{2}=-1\pm\sqrt{7}$~~

~~$x=-1-\sqrt{7}$~~

подходит, уд овл. ... (5)

Чистовик № 6

S_{AOC} – ?



а) Пусть $\angle AOC = 2\alpha$. Т.к. т.$P \in$ окр-ти опис. около $\triangle AOC$, то $\angle APC = 2\alpha$. $\angle TAC = \angle TCA = \frac{1}{2}\angle AOC = \alpha$ ($\angle$ м/у хордой и кас). Кроме того $AT = CT$ как отр. кас к ω $\Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\alpha$.

$\Rightarrow$ $AOCT$ и $APCT$ – вписанные 4-ех угольники. Отсюда $\angle TPC = \angle TAC = \angle APT = \alpha$. $\angle APB = 180 - 2\alpha$, $\Rightarrow \angle BAP = \alpha$, $\Rightarrow AP = BP$. Т.к. $\angle ABC = \angle TPC$, то $AB \parallel TP$, $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$. Пусть $BP = AP = a$, $PC = x$. Из $\triangle APC$: $\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot PK\cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot x\cdot PK\cdot\sin\alpha} = \frac{a}{x} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$, $\Rightarrow a = \frac{8}{7}x$

В силу подобия $\triangle ABC$ и $\triangle KPC$, $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{a+x}{x}\right)^2 = \left(\frac{a}{x}+1\right)^2 = \left(\frac{8}{7}+\frac{7}{7}\right)^2 = \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{225}{49}$, $\Rightarrow S_{ABC} = S_{KPC}\cdot\frac{225}{49} = 14\cdot\frac{225}{49} = \frac{450}{7}$.

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$; AC – ? $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ | Пусть $AC = m$.

Т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ и α – острый $\angle$, то

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \frac{9}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{34}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$

~~Пусть KP~~ 1) В $\triangle ABC$: $\frac{m}{\sin\alpha} = 2R$ (R – рад. опис. $\triangle ABC$), $m = 2R\cdot\sin\alpha = 2R\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{6R}{\sqrt{34}}$

2) ~~$\triangle APK$: $\frac{1}{2}a\cdot PK\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = 16$~~

$\triangle APC$: $\frac{1}{2}\cdot a\cdot x\cdot\sin 2\alpha = 30 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot x\cdot\frac{30}{34} = 30$

$\frac{1}{2}ax\cdot\frac{1}{34} = 1$

$ax = 68$

$\frac{8}{7}x^2 = 68$

$x^2 = \frac{68\cdot 7}{8} = \frac{34}{4}$ $\frac{17}{2}$

$x = \sqrt{\frac{17}{2}}$

$a = \frac{8}{7}x = \frac{8}{7}\cdot\sqrt{\frac{17}{2}}$. Пусть $KP = \ell$.

Тогда $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\ell\cdot\sin\alpha = 16$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7}\sqrt{\frac{17}{2}}\cdot\ell\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = 16$

$\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\ell = 16 \Rightarrow \frac{3}{7}\ell = 16$

$\ell = \frac{16\cdot 7}{3}$

21101730 (U371693 M1301036)

6

Чистовик (№6 продолж) 1) $\frac{1}{2}\cdot a\cdot x\cdot \sin\alpha = 30$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7}x^2\cdot 2\cdot\frac{15}{34} = 30$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7}x^2\cdot\frac{30}{34} = 30$

$\frac{4}{7}x^2\cdot\frac{1}{34} = 1$

$x^2 = \frac{34\cdot 7}{4} = \frac{17\cdot 7}{2}$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{17\cdot 7}{2}}$

$a = \frac{8}{7}\cdot\sqrt{\frac{17\cdot 7}{2}}$

б) $tg\alpha = \frac{3}{5}$; $AC - ?$ $\boxed{1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}};\ \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}}$

2) Пусть $KP = l$ — бисс. $\triangle APC$.

Тогда $\frac{1}{2}\cdot x\cdot l\cdot\sin\alpha = 14$

$x\cdot l\sin\alpha = 28$

$x\cdot l\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = 28$

$\sqrt{\frac{17\cdot 7}{2}}\cdot l\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = 28$

$\sqrt{\frac{17\cdot 7}{2\cdot 17\cdot 2}}\cdot l\cdot 3 = 28$ $\quad \frac{3\sqrt{7}}{2}\cdot l = 28$

$l = 28\cdot\frac{2}{3\sqrt{7}} = \frac{28\cdot 2\sqrt{7}}{3\cdot 7} = \frac{8\sqrt{7}}{3}$

~~$\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot l = 28$~~

~~$l = \frac{28}{\sqrt{7}} = \frac{28\sqrt{7}}{7} = 4\sqrt{7}$~~

По св-ву бисс: $\frac{AK}{KC} = \frac{a}{x} = \frac{8}{7}$, $\Rightarrow AK = 8t$, $KC = 7t$.

По ф-ле бисс: $l^2 = ax - 8t\cdot 7t$

~~$l^2 = ax - 56t^2$~~

~~$16\cdot 7 = \frac{8}{7}x^2 - 56t^2 \,|:7$~~

~~$16 = \frac{8}{49}x^2 - 8t^2 \,|:8$~~

~~$2 = \frac{1}{49}x^2 - t^2$~~

~~$2 = \frac{1}{49}\cdot\frac{17\cdot 7}{2} - t^2$~~

~~$2 = \frac{17}{14} - t^2$~~

$\Rightarrow \frac{64\cdot 7}{9} = \frac{8}{7}\cdot\frac{17\cdot 7}{2} - 56t^2$

$\frac{64\cdot 7}{9} = 4\cdot 17 - 56t^2$

$56t^2 = 4\cdot 17 - \frac{64\cdot 7}{9}$

$56t^2 = \frac{4\cdot 41}{9}$

$t^2 = \frac{4\cdot 41}{9\cdot 56}$

$t = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{41}{4\cdot 2\cdot 7}} = \frac{2}{3\cdot 2}\cdot\sqrt{\frac{41}{14}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{41}{14}}$

$AC = 15t$

$\Rightarrow 15t = 5\sqrt{\frac{41}{14}}$

Ответ: а) $\frac{480}{7}$; б) $5\sqrt{\frac{41}{14}}$.

21101730 (U371693 M1301036)

7

Чистовик (№ 6 продолж.)

(б) $7x^2+13x-42=0$

$x=\frac{-13\pm\sqrt{169+4\cdot7\cdot42}}{14}=$

(с) $c=1 \Leftrightarrow 2\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1)=1$

$\log_{(\frac{x}{7}+7)}(x+1)^2=1$

$(x+1)^2=(\frac{x}{7}+7)$

$x^2+2x+1=\frac{x}{7}+7$

$7x^2+14x+7=x+49$

$7x^2+13x-42=0$

$x=\frac{-13\pm\sqrt{169+4\cdot7\cdot42}}{14}=$

$=\frac{-13\pm\sqrt{169+4\cdot7\cdot42}}{14}=\frac{-13\pm\sqrt{2345}}{14}=\frac{-13\pm\sqrt{2346}}{14}$

$\frac{-13+\sqrt{2346}}{14}>-1;$

$\frac{-13-\sqrt{2345}}{14} \vee -49$

$-13-\sqrt{2345} \vee -49\cdot14$

$-\sqrt{2345} \vee -686+13$

$-\sqrt{2345} > -673$

$\boxed{\text{Ответ: } -7 \text{ и } \frac{-13-\sqrt{234}}{14}}$

21101730 (U371693 M1301036)

Чистовик

$$\begin{cases} \text{нод}(a;b;c) = 33 \quad (1) \\ \text{нок}(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15}. \quad (2) \end{cases}$$

$(1),(2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \\ \end{cases} \\ \begin{cases} \\ \end{cases} \end{array} \right.$

Черновик

$\frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)=1$

$\log_{(-x-1)}(29-x)=\log_{(-x-1)}(-x+1)^2$

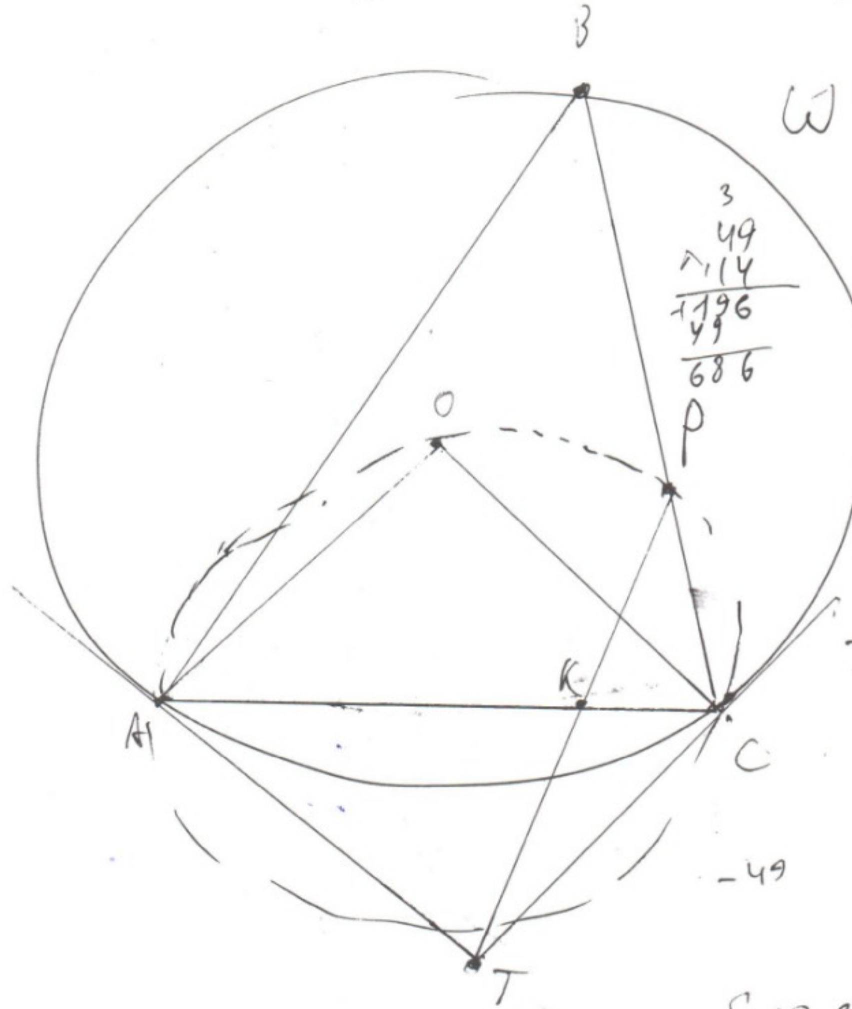
$42 \cdot 28 = 336 + 84 = 1176$

$46 \cdot 46 = 2028$

$1176 + 169 = 2346$

$6^2 = 36$

686



$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$

а) $S_{ABC}-?$

б) $\angle ABC=\arctg\frac{3}{5}$

$AC-?$

$49 \cdot 14 = 196 + 49 = 686$

$2346 : 6 = 469$

$42 \cdot 28 = 336 + 84 = 1176$

$1176 + 169 = 2346$

$\sqrt{2346}=$

$S_{ABC}=$

$\frac{1}{2}\cdot a x\cdot\sin 2\alpha=30$

$a x\sin 2\alpha=60$

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot l\cdot\sin\alpha=16$

$\frac{1}{2}\cdot l\cdot x\cdot\sin\alpha=14$

$\frac{a}{x}=\frac{16}{14}=\frac{8}{7}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}}=\left(\frac{a+x}{x}\right)^2=\left(\frac{a}{x}+1\right)^2$

$S_{ABC}=14\left(\frac{a}{x}+1\right)^2$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{7}\sqrt{\frac{17}{2}}\cdot l\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}=16$

$l\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{17}\sqrt{2}}=16$

$l\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{4}=16$

21101730 (U371693 M1301036)

~~Черновик (№6 продолж)~~

$l = \frac{16\cdot 7}{3}$. По св-ву биссек:

$\frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$

$\Rightarrow AK = 8t,\ KC = 7t.$

По ф-ле бисс-цы:

$\left(\frac{16\cdot 7}{3}\right)^2 = ax - AK\cdot KC$

$\left(\frac{16\cdot 7}{3}\right)^2 = \frac{8}{7}x^2 - 56t^2$

$\frac{16^2\cdot 7^2}{9} = \frac{8}{7}\cdot\frac{17}{2} - 56t^2$

$56t^2 = \frac{17\cdot 4}{7} -$

$4\cdot\frac{7}{3} =$

$16\cdot\frac{7}{3} = \frac{8}{7}\cdot\frac{17}{2} - 56t^2$

$\left(\frac{16\cdot 7}{3}\right)^2 = \frac{4\cdot 17}{7} - 56t^2$

Черн.

$6 = ?$

$\log_{(x+1)^2}(29-x) = 2$

$\log_{(x+1)^2}(29-x) = \log_{(x+1)}($

$\begin{array}{r} 163 \\ -\ 112 \\ \hline 41 \end{array}$

$70 + 42 = 112$

$36\cdot 15$

$\frac{4\cdot 17\cdot 9 - 64\cdot 7}{9} = \frac{4(17\cdot 9 - 16\cdot 7)}{9} = \frac{4(163-112)}{9} =$

$=$

$8\cdot 7 = 4\cdot 2\cdot 7$

21101730 (U371693 M1301036)

~~Чистовик~~ №4. $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} \text{нод}(a;b;c) = 33 & (1) \\ \text{нок}(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} & (2) \end{cases}$$

1) $\text{нод}(a;b;c) = 33$, =>

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 33x \\ b = 33y \\ c = 33z \end{cases}$$ прич. $\text{нод}(x;y;z) = 1$.

2) Т.к. $\text{нод}(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{16}$, то одно из чисел или два числа из a, b и c делятся на 11, т.е, например,

$a = 33x$
$b = 33 \cdot 11^m$
$c = 33 \cdot 11^n$,

где $\max(m, n) = 16$

Черновик!

$\text{нод}(a;b;c) = 33$

$\text{нок}(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{16}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3^m \cdot 11^x \\ b = 3^n \cdot 11^y \\ c = 3^k \cdot 11^z \end{cases},$$

$3^5 \cdot 11$
$3 \cdot 11^2$
$3^4 \cdot 11^{16}$

$\max(m;n;k) = 19$
$\max(x;y;z) = 16$

Т.к. $\text{нод}(a;b;c) = 33$, то одно или два из чисел — это 33., т.к. иначе если каждый из показат. ст. у 3 и 11

$\text{нод} = 3^{\min(m;n;k)} \cdot 11^{\min(x;y;z)}$

$\Rightarrow \min(m;n;k) = 1$
$\min(x;y;z) = 1$.

$29 \cdot 7 = 203$, $203 - 49 = 4$

$a + b + c = \log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2 + \log_{(-x-1)}\sqrt{29-x} + \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$

$28 \cdot 4 = 112$

$$= 2 \cdot \log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) \cdot \frac{1}{2} \log_{(-x-1)}(29-x) \cdot 2 \cdot \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1) =$$

$$= 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) \cdot \log_{(-x-1)}(29-x) \cdot \log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)}{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(29-x)} \cdot \log_{(-x-1)}(29-x) = \log_{(-x-1)}(29-x) \cdot \log_{(29-x)}(-x-1) =$$

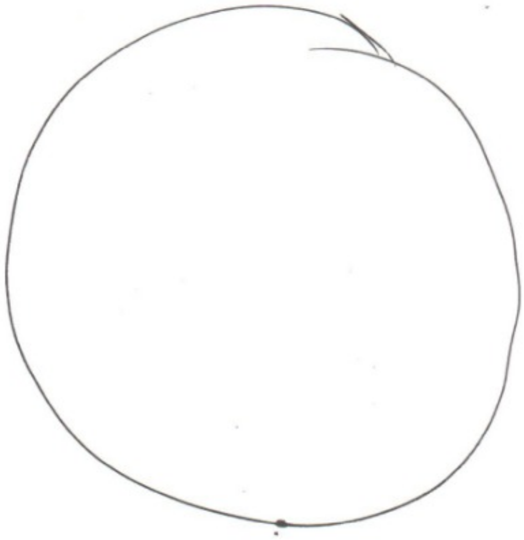
$= 1.$

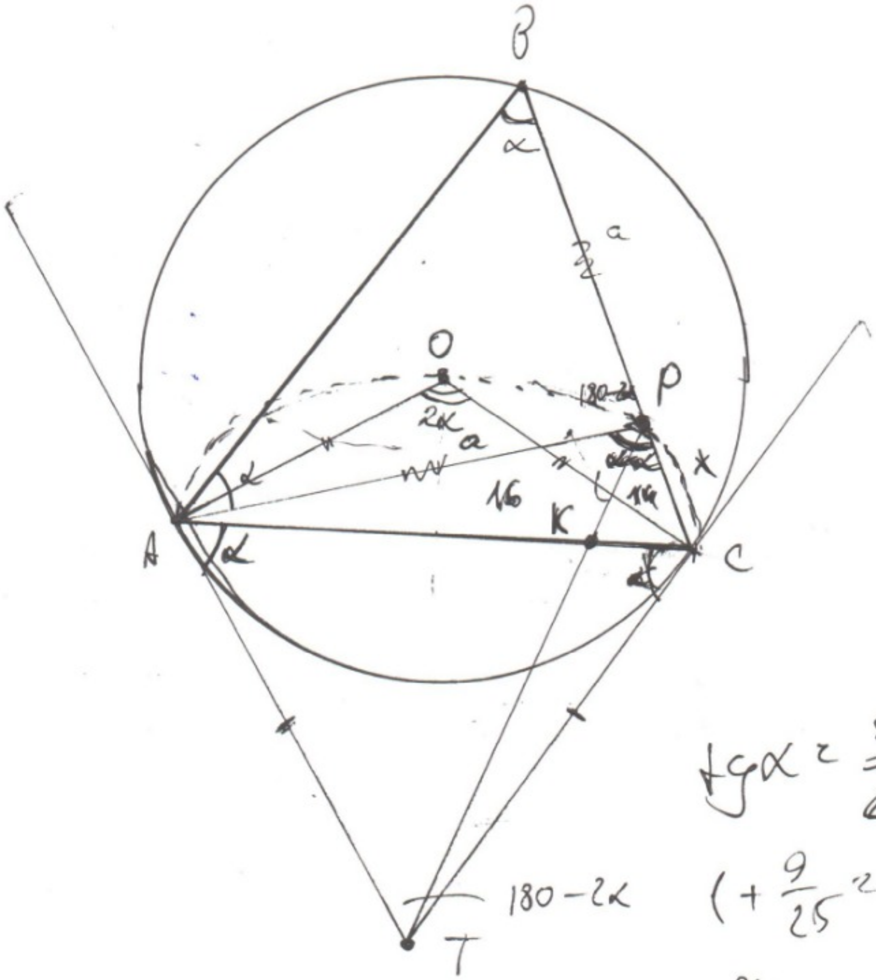
$x + 49 \neq 7$
$x \neq -42$

21101730 (U371693 M1301036)

~~[illegible] №6~~

Черн.





$tg\alpha = \frac{3}{5}$

$1 + \frac{9}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{34}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$