Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101701**

ID профиля: **342128**

Вариант 24

Чистовик Вариант 24

Задание 1.

Поскольку нам дана арифметическая прогрессия, то, если d - её разность, верны равенства:

$a_n = a_1 + (n-1)d$; $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$; Тогда:

$$S = S_9 = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9 = \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9 = 9(a_1+4d) = 9a_1 + 36d$$

$$a_5 \cdot a_{18} = (a_1+4d)(a_1+17d) = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2$$

$$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2$$

Тогда данные в условии неравенства запишем в виде системы:

$$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_5 a_{18} > S-4 \\ S+60 > a_{10} a_{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+21a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4 \\ 9a_1+36d+60 > a_1^2+21a_1d+108d^2 \end{cases}$$

Сложим эти неравенства:

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1d}+68d^2+\cancel{9a_1}+\cancel{36d}+60 > \cancel{9a_1}+\cancel{36d}-4+\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1d}+108d^2$$

Сократим подобные и получим:

$$40d^2 < 64$$

$$5d^2 < 8$$

$$d^2 < \frac{8}{5}$$

$|d| < \sqrt{\frac{8}{5}}$, вспомним, что прогрессия - возрастающая, а значит $d > 0$:

$d < \sqrt{\frac{8}{5}}$. Оценим $\sqrt{\frac{8}{5}}$:

$$1 < \frac{8}{5} < 2$$

$$1 < \sqrt{\frac{8}{5}} < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{8}{5}} < 2 \Rightarrow d < 2$$

Нам также известно, что прогрессия состоит из целых чисел, а значит $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \leq 1$, и, поскольку $d > 0$, остаётся только одно значение: $d = 1$.

Чистовик Вариант 24

Подставим $\alpha = 1$ в систему и решим её:

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1+68 > 9a_1+36-4 \\ 9a_1+36+60 > a_1^2+21a_1+108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+12a_1+36 > 0 \\ a_1^2+12a_1+12 < 0 \end{cases}$$

Решим оба неравенства:

I. $a_1^2+12a_1+36>0$

$(a_1+6)^2>0$

$|a_1+6|>0$

$a_1+6 \neq 0$

$a_1 \neq -6.$

II. $a_1^2+12a_1+12<0$. Решим сперва равенство, чтобы разложить на множители:

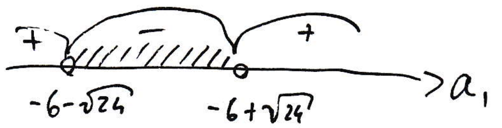
$a_1^2+12a_1+12=0$

$D=144-48=96$

$a_1 = \dfrac{-12 \pm \sqrt{96}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6} = -6 \pm \sqrt{24}$

Тогда неравенство обретает вид:

$(a_1+6+\sqrt{24})(a_1+6-\sqrt{24})<0$. Решим теперь методом интервалов:



Вспомним, что $a_1 \neq 6$, и теперь оценим a_1:

$4 < \sqrt{24} < 5$

$-6-\sqrt{24} < a_1 < -6+\sqrt{24}$

$-11 < a_1 < -1$, и, поскольку $a_1 \in \mathbb{Z}$:

$-10 \leq a_1 \leq -2$, причём $a_1 \neq -6$.

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$.

Чистовик Вариант 24

Задание 3.

Итак, нам дана система неравенств:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;10) \end{cases}$$

Рассмотрим сперва второе неравенство:

$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;10)$. Для него возможны два случая:

I. $-6a-2b \le 10$:

$a^2+b^2 \le -6a-2b$

$a^2+6a+b^2+2b \le 0$

$a^2+6a+9+b^2+2b+1 \le 10$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$. Получается, в координатной плоскости aOb, - круг с центром в точке $(-3;-1)$, и радиусом $\sqrt{10}$;

II. $-6a-2b > 10$:

$a^2+b^2 \le 10$. Выходит круг с центром в т. $(0;0)$, и радиусом $\sqrt{10}$. (Мы всё ещё в координатах aOb)

Рассмотрим, когда две окружности пересекаются:

$$\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ a^2+6a+9+b^2+2b+1=10 \end{cases}$$; вычтем первое из второго:

$6a+2b=-10$ или $-6a-2b=10$

То есть точки пересечения двух окружностей лежат на той же прямой, что делит плоскость на два случая.

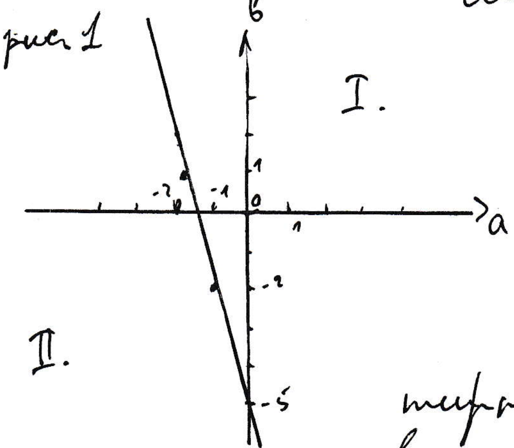
Теперь преобразуем неравенство: $-6a-2b \le 10$

$-3a-b \le 5$

$b \ge -5-3a$

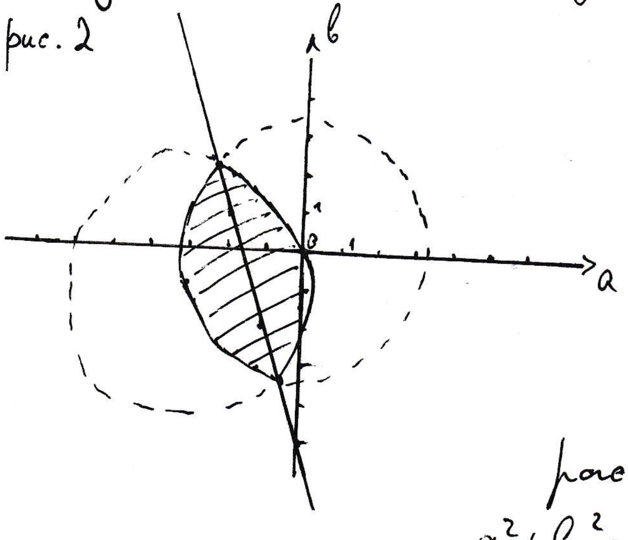
Начертим прямую $b=-5-3a$ в координатах aOb:

рис. 1



Данная прямая делит плоскость на две полуплоскости, соответствующих одному из двух рассмотренных нами случаев. Нарисуем оба круга пунктирной линией, и наведём сплошной ту часть, в которой выполняется условия для этого круга. Затем заштрихуем область внутри видимой части круга, то есть часть, удовлетворяющую уравнению. Тогда получится следующий рисунок:

рис. 2



Данная часть плоскости aOb удовлетворяет второму уравнению системы (разумеется, прямая $b=-3a-5$ не входит целиком в решения неравенства, она на рисунке служит лишь вспомогательной линией). Решение второго неравенства - пересечение кругов

$a^2+b^2=10$ и $(a+3)^2+(b+1)^2=10$.

Посмотрим теперь, как полученные нами данные влияют на первое неравенство системы:

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10$

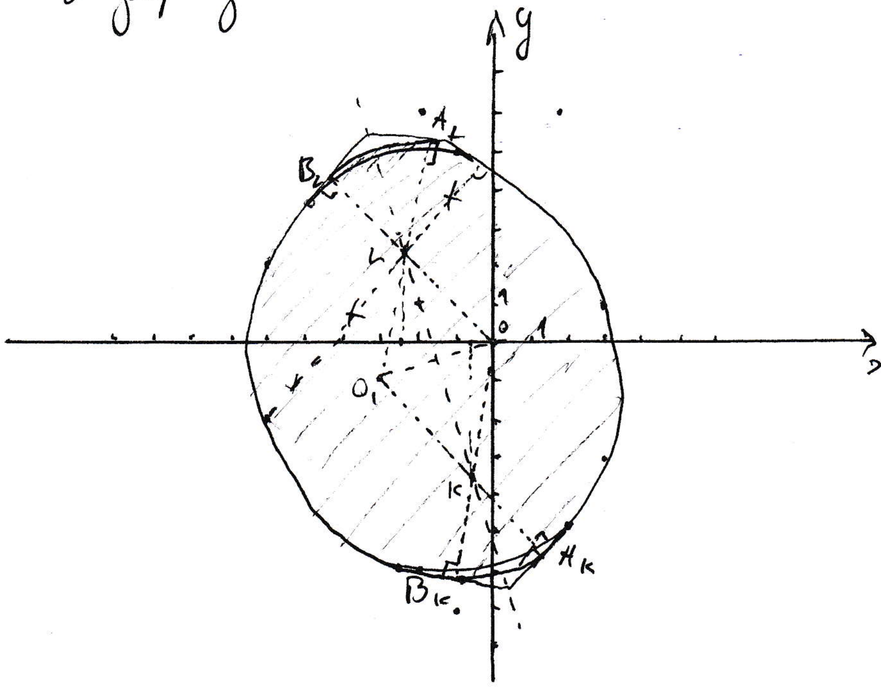
Мы опять видим каноническое уравнение окружности, которое в совокупности с неравенством „не больше", даёт нам круг в координатах xOy с центром в точке $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

Тогда, мы видим, что фигура на рисунке 2, изображает множество координат центров окружностей радиуса $\sqrt{10}$ на плоскости xOy.

Тогда, мы сможем получить искомую фигуру M, если на каждой точке фигуры на рис. 2, как на центре, построим круг радиуса $\sqrt{10}$. Получается, что M – фигура, образованная из всех точек, отстоящих от фигуры на рис. 2 на $\sqrt{10}$ ед. и всех точек внутри получившегося контура.

Мы понимаем, что в нашем случае это пересечение двух кругов: $x^2+y^2=40$ и $(x+3)^2+(y+1)^2=40$ (их радиусы на $\sqrt{10}$ превышают радиусы кругов на рисунке 2); но, пересечение взято не полностью, а углы его скруглены радиусом $\sqrt{10}$.

Изобразим M:



Чтобы посчитать площадь, нужно найти координаты центров окружностей, скругляющих углы. Эти центры лежат в вершинах углов фигуры из рис. 2. Так что, подставим $b=-3a-5$; в уравнение $a^2+b^2=10$:

$a^2+9a^2+25+30a=10$

$10a^2+30a+15=0$

$2a^2+6a+3=0$

$D=36-24=12$

$a_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

$b_1=\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-5=\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$; $b_2=\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-5=\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$.

Обозначим точки $K(a_1;b_1)$ и $L(a_2;b_2)$. А центр окружности $(x+3)^2+(y+1)^2=40$ обозначим O_1. Тогда, $O_1O=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$; $O_1K=OK=\sqrt{10}$ и $\triangle O_1OK$ – равносторонний.

Тогда $\angle OO_1K=\angle O_1OK=60°$; $\angle KO_1L=\angle KOL=120°$

Так как $\triangle O_1OL = \triangle O_1OK$ (Аналогично предыдущим рассуждениям. Переведём в радианы: $\angle KO_1L = \angle KOL = \frac{2\pi}{3}$.

$\angle O_1LO = \angle O_1KO = \frac{\pi}{3}$. Итак, L и K - центры окружностей, скругляющих углы, и угол сектора, выходящего к дуге скругления вертикален к углам $\angle O_1LO$ и $\angle O_1KO$. То есть, если A_L и B_L, точки, где начинается и заканчивается верхнее скругление, то $\angle A_LLB_L = \angle A_KKB_K = \frac{\pi}{3}$.

$$S_{сек_{A_LB_L}} = \frac{\angle A_LLB_L \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot \sqrt{10}^2}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} = S_{сек_{A_KB_K}}$$

$$S_{сек_{A_LO_1A_K}} = S_{сек_{B_LOB_K}} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{2\pi \cdot 40}{3 \cdot 2} = \frac{40\pi}{3}.$$

Нужно вычесть площадь ромба $KOLO_1$:

$$S_{ромб} = \frac{OK^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{10}^2\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2}.$$ Суммарная площадь:

$$S = S_{сек_{A_LLB_L}} + S_{сек_{A_KKB_K}} + S_{сек_{A_LO_1A_K}} + S_{сек_{B_LOB_K}} - S_{ромб} =$$

$$= 2 \cdot \frac{5\pi}{3} + 2 \cdot \frac{40\pi}{3} - \frac{10\sqrt{3}}{2} = \frac{90\pi}{3} - \frac{10\sqrt{3}}{2} = 30\pi - \frac{10\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $30\pi - \frac{10\sqrt{3}}{2}$.

Черновик

$\times\,\begin{array}{r}17\\9\\\hline 18\\9\\\hline 108\end{array}$ $\times\,\begin{array}{r}17\\4\\\hline 28\\4\\\hline 68\end{array}$

1. $a_5 = a_1+4d$; $a_{18} = a_1+17d$; $a_5 a_{18} = a_5(a_5+13d) = (a_1+4d)(a_1+17d)$

$a_5^2+13da_5$ $\quad$ $a_1^2+21a_1d+68d^2$

$a_{10}a_{13} = a_{10}(a_{10}+3d) = (a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2+21a_1d+108d^2$

$$S = \frac{a_1+a_9}{2}\cdot 9 = \frac{2a_1+8d}{2}\cdot 9 = 9(a_1+4d) = 9a_1+36d$$

$$4\begin{cases} a_1^2+21a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4 \\ a_1^2+21a_1d+108d^2 < 9a_1+36d+60 \\ 9a_1+36d+60 > a_1^2+21a_1d+108d^2 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2+21a_1d}+68d^2+\cancel{9a_1+36d}+60 > \cancel{9a_1+36d}-4+\cancel{a_1^2+21a_1d}+108d_2$

$68d^2+60 > 108d^2-4$

$40d^2 < 56$

$5d^2 < 7$

$d^2 < \frac{7}{5}$

$|d| < \sqrt{\frac{7}{5}} \Rightarrow d = \pm 1$

Если $d=1$

$a_1^2+21a_1+68 > 9a_1+36-4$

$a_1^2+12a_1+36 > 0$

$(a_1+6)^2 > 0 \Rightarrow$ $a \neq 6$

и

$a_1^2+21a_1+108 < 9a_1+36+60$

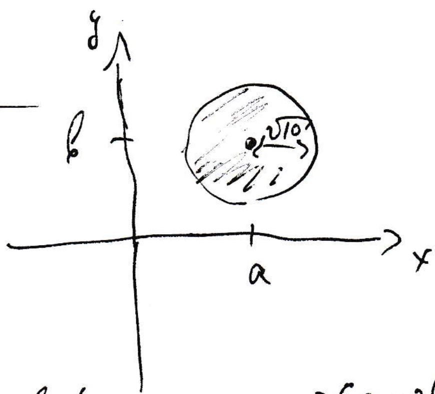
$a_1^2+12a_1+12 < 0$

$D = 144-48 = 96 = 16\cdot 6 = (4\sqrt{6})^2$

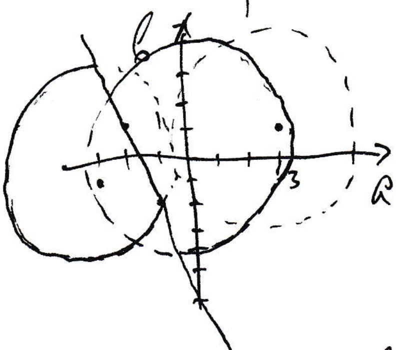
$a_1 = \frac{-12\pm 4\sqrt{6}}{2} = -6\pm 2\sqrt{6} = -6\pm\sqrt{24}$

$-6-\sqrt{24} < a_1 < -6+\sqrt{24}$

$-10 \leq a_1 \leq -2$



$-6a-2b$



$a^2+b^2 \leq -6a-2b$

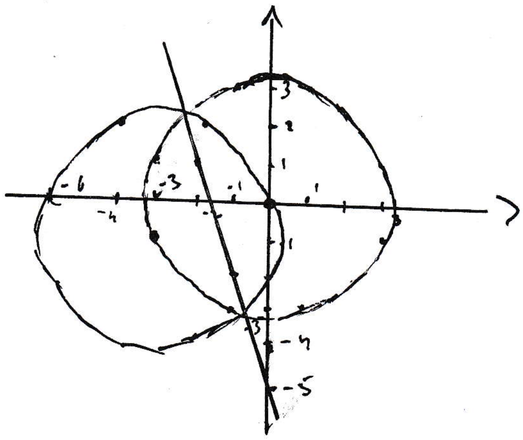
$a^2+6a+b^2+2b+9+1 \leq 10$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10$

$-6a-2b \leq 10$

$b \geq -5-3a$

Черновик



$$\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ (a+3)^2+(b+1)^2=10 \end{cases}$$

$6a+2b=-10$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101701**

ID профиля: **342128**

Вариант 24

Чистовик Вариант 24

Задание 4.

Итак, у нас есть система: $\begin{cases} НОД(a;b;c)=33=3\cdot 11 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$

В таком случае a, b и c представимы в виде:

$a=33k$; $b=33l$; $c=33m$. Причём, т.к. $НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15}$, то k, l и m все представимы как $3^{\alpha}\cdot 11^{\beta}$ (у каждого свои α и β).
Но, поскольку мы уже вынесли 33 из a, b, c, то верно следующее: $НОД(k;l;m)=1$. А значит, если два из них делятся на три или одиннадцать, то третье - нет.
Также верно, что $НОК(k;l;m)=3^{18}\cdot 11^{14}$, и поскольку их НОД равен 1, то хотя бы одно из k, l, m делится на 3^{18} и одно на 11^{14}. Причём характеристики переменных по трём и по одиннадцати - независимы. Эта информация нам понадобится при подсчёте вариантов. Итак, рассмотрим случай относительно трёх:

Пусть $k=3^{18}\cdot k'$, где $k' \not\vdots\, 3$. Тогда, если $l \vdots 3$, то $m \not\vdots\, 3$.
Причём, если только $k \vdots 3^{18}$, то l может принимать значения $\{3^{x}\cdot l'$ ~~до $3^{17}\cdot l'$~~, где $l' \not\vdots\, 3 \mid x\in[1;17]\cap\mathbb{N}]$. То есть 17 различных значений l. Ещё столько же значений есть у m при $m \vdots 3$ и $l \not\vdots\, 3$. Всего пока 34.
Теперь, ещё 2 раза по столько получается при $l=3^{18}\cdot l'$ и $m=3^{18}\cdot m'$, где $l', m' \not\vdots\, 3$. Всего $34\cdot 3=102$ варианта.
Теперь добавим к ним варианты, когда две из переменных вообще не делятся на 3 и две из переменных сразу делятся на 3^{18}. Итого, плюс 6 новых вариантов (потому что каждый из двух этих случаев возможен с

~~одна~~ каждой из трёх переменных в роли той что делится на 3^{18} / не делится на 3). Суммарно выходит, что относительно 3 возможно 108 различных вариантов.

Теперь разберём исходы относительно 11. Здесь, пусть $k = 11^{14} \cdot k'$, где $k' \not\vdots\, 11$. Аналогично с предыдущими рассуждениями, пусть $l \,\vdots\, 11$, $m \not\vdots\, 11$, но $l \not\vdots\, 11^{14}$, тогда l может быть равно $\{ 11^x \cdot l', \text{где } l' \not\vdots\, 11 \mid x \in [1;13] \cap \mathbb{N} \}$ любому значению из этого множество. Всего 13 вариантов. Столько же для $m \,\vdots\, 11$, $l \not\vdots\, 11$. Всего 26. Умножим на 3, для вариантов $l \,\vdots\, 11^{14}$ и $m \,\vdots\, 11^{14}$, получится 78. И добавим 6 исключений, описаных ранее для 3^{18}. Итого, 84 исхода. Теперь, поскольку варианты значений переменных, рассмотренных относительно делимости на 11 и на 3, как уже было сказано, независимы, то для каждого исхода из 108 относительно делимости на 3 будет ~~4~~ 84 относительно делимости на 11, и суммарное количества возможных разных упорядоченных троек $(k; l; m)$ будет равно $108 \times 84 = 9072$.

Ну а поскольку $a = 33k$; $b = 33l$; $c = 33m$; то количество троек $(a; b; c)$ не отличается от количества троек $(k; l; m)$.

Ответ: 9072

Задание 5.

Заменим: $\sqrt{29-x}=a$; $(-x-1)=b$; $\sqrt{\frac{x}{7}+7}=c$.

Сразу запишем ОДЗ: $-49<x<-1$. ~~...~~; $x\neq-7$; $x\neq-42$

Мы имеем 3 числа: $\log_a c^2$; $\log_{b^2} a^2$ и $\log_c b$

$\log_a c^2 = 2\log_a c$; $\log_{b^2} a^2 = \log_b a$

Их произведение равно: $2\log_a c \cdot \log_b a \cdot \log_c b = 2\frac{\ln c \ln a \ln b}{\ln a \ln b \ln c} = 2$.

Тогда, если два из них равны x', а третье: $(x'+1)$, то $x'^2(x'+1)=2$. Единственный корень: $x'=1$. Тогда условие выполнимо, когда два из трёх чисел равны 1. ~~кроме $\log_a c$~~

$\log_{b^2} a^2 = 1$ при $|b|=|a|$. То же верно для остальных чисел, $\log_c b$ при $b=c$

$2\log_a c = 1$ при $a=c^2$. Итак, при $|b|=|a|$: при единственном x.

$-x-1 = \sqrt{29-x}$; $x=-7$. ~~$\frac{x}{7}+7=29-x$; $\frac{8x}{7}=22$; $x=\frac{22\cdot 7}{8}=\frac{154}{8}=\frac{77}{4}$ не в ОДЗ~~

$|-x-1| = |\sqrt{29-x}| \Rightarrow$

При $b=c$: $-x-1=\sqrt{\frac{x}{7}+7}$ только при некоем x ~~$x=-27$~~, как возрастающая и убывающая ф-ции, но $x\neq-7$

При $a=c^2$: $\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7$ только при $x=-7$, аналогично.

Тогда $\log_c b$ при $x=-7$ будет равен: ~~$\log_{b^2}|a| = \log_6 36 = 2$~~ $\log_{\sqrt{6}} 6 = 2$.

Итак, при $x=-7$, и только при $x=-7$ верно условие. А именно:

$\log_{\sqrt{29-x}}(\frac{x}{7}+7) = 1 = \log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2$

Ответ: -7.

Чистовик Вариант 24

Задание 6.

Нарисуем рисунок по условию:

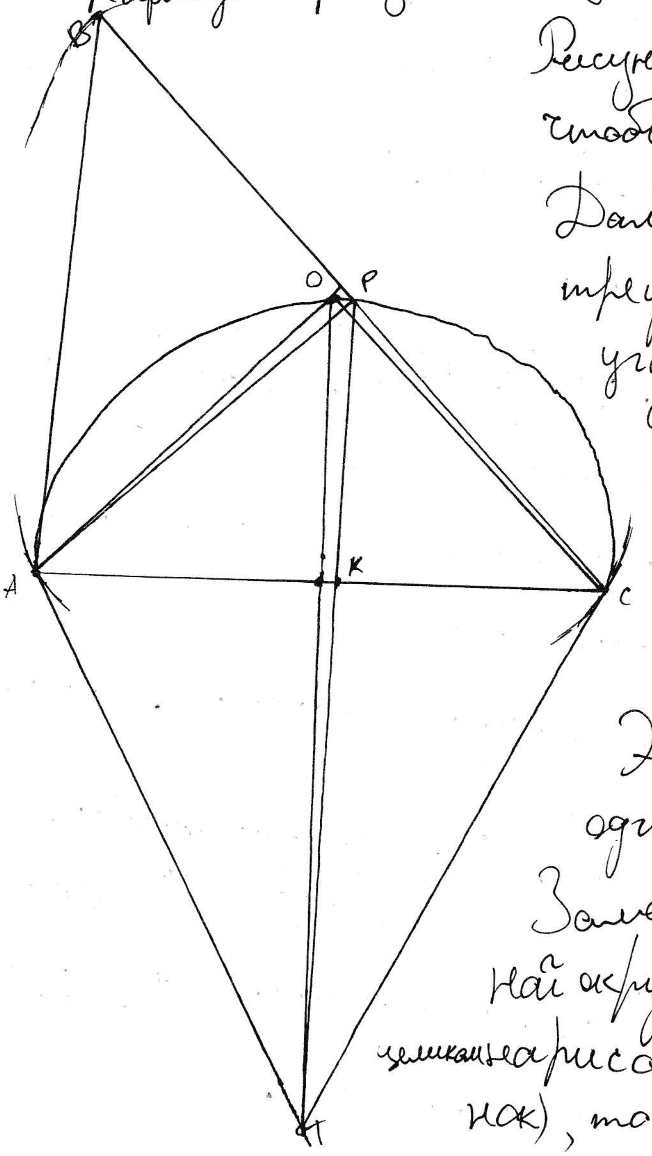


Рисунок будет выглядеть именно так, чтобы отрезки TP и AC пересекались.

Далее, т.к. $S_{APK}=16$, $S_{CPK}=14$ ~~это~~ площади треугольников $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ и оба треугольника имеют общую вершину P, а их основания лежат на одной прямой — AC, то их основания относятся как площади:

$$\frac{AK}{KC}=\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{16}{14}=\frac{8}{7}.$$

Это обусловлено тем, что их высоты один и тот же отрезок.

Заметим, что, т.к. O — центр описаной окружности ω (которую мы не ~~целиком~~ нарисовали, чтобы не загружать рисунок), то $\angle AOC=180^\circ-\angle ATC$, а также $AO\perp AT$ и $OC\perp CT$

А теперь заметим, что $\angle AOC=\angle APC$, т.к. лежат на одной хорде — AC. Следовательно $\angle APC=180^\circ-\angle ATC$

И тогда $\angle PAT=180^\circ-\angle PCT$ Но сумма $\angle TAC$ и $\angle TCA$ равна

$\angle TAC+\angle TCA=180^\circ-\angle ATC=\angle APC$

Стр. 4

Черновик

4. $a; b; c$

$$НОД = 33 = 3\cdot 11$$
$$НОК = 3^{19}\cdot 11^{15}$$
$$\Rightarrow \quad a = 3\cdot 11k,\quad b = 3\cdot 11l,\quad c = 3\cdot 11m$$

Если $k \vdots 11 \Rightarrow l, m \not\vdots 11$

Если $k \vdots 3 \Rightarrow l, m \not\vdots 3$

$(k$ и $l \Rightarrow 1$

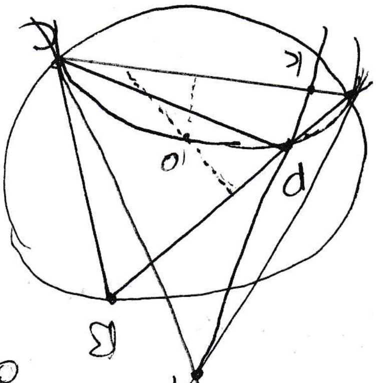
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 11^{14} \\ k = 3^{18} \\ k = 11^{14}\cdot 13^{18} \\ k = 1 \end{array}\right.$$

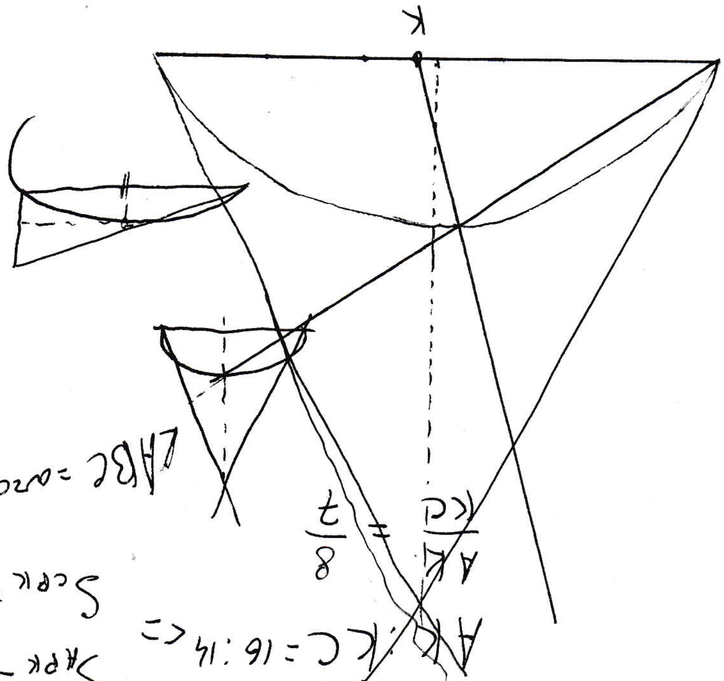
$k = 11^{14}$; $l = 11^{14}$ Если

$m = 11^{14}$

или $k\cdot l = 11^{14}$ или $k\cdot m = 11^{14}$ или $l\cdot m = 11^{14}$ или $k\cdot l = 3^{18}$ или $k\cdot m = 3^{18}$ или $l\cdot m = 3^{18}$

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times\ 108 \\ \hline 432 \\ 864 \\ \hline 9072 \end{array}$$





$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$

$\frac{t}{8} = \frac{AK}{KC}$

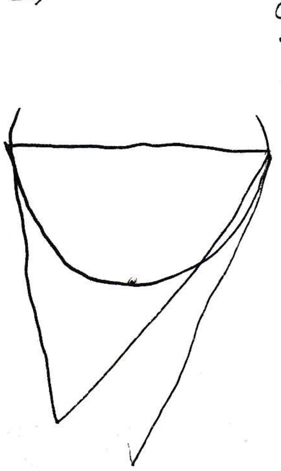
$S_{CPK} = 14$

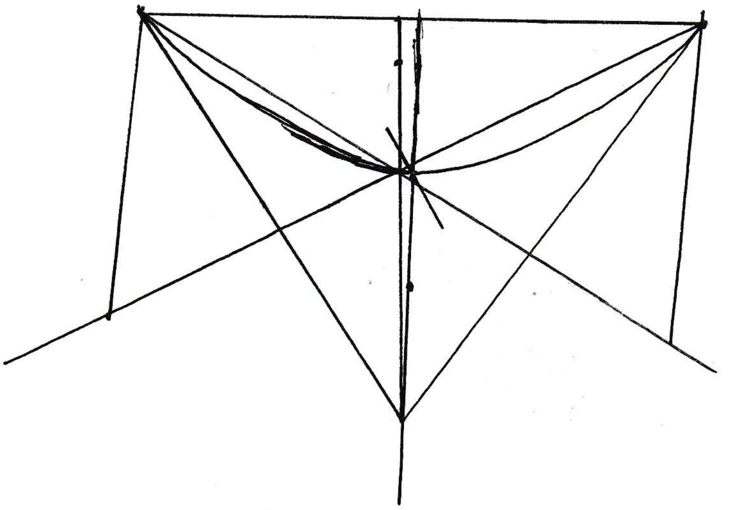
$S_{APK} = 16$

$AK : KC = 16 : 14 \Leftrightarrow$

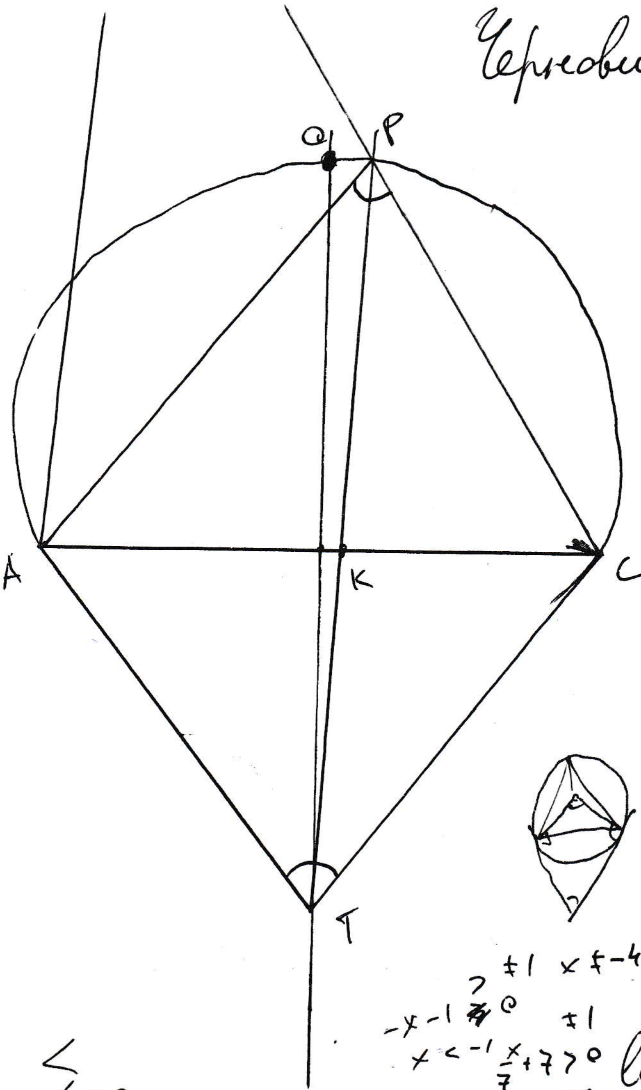
Н.: S_{ABC}

д/ AC.





Черновик



$\frac{180^\circ - \varphi}{2} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$

$\angle PCT = 180^\circ - \frac{\varphi}{2}$

$\cancel{\angle QTC = 90^\circ - 180^\circ + \frac{\varphi}{2}}$

$\angle APC = \frac{\varphi}{2}$

$\angle PAT = 180^\circ - \frac{\varphi}{2}$

$\angle ATC = 360^\circ - 360^\circ + \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$ AQCT - ромб

$\angle APC = \angle AQC \Rightarrow$ ~~AQCT - ромб~~

$-x-1 > 0$ $\neq 1$ $x \neq -42$

$x < -1$ $\frac{x}{7} + 7 > 0$ $\neq 1$

$x > -49$

$\log_9 9 = 1$

$\log_{3^2} 9$

$\frac{1}{2}\log_3 9 = \frac{1}{2} \cdot 2$

$x \leq 29$

$x \neq 28$

$x < -1$

$x \neq -2$

$x > -49$

$x \neq -42$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7} + 7\right), \log_{(x+1)^2}(29-x), \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$\log_a c^2 \qquad \log_{b^2} a^2 \qquad \log_c b$

$\log_{b^2} a^2 = \frac{1}{2}\log_b a^2 = \log_b a$

$\log_a c^2 = 2\log_a c;$

$\log_c b \cdot 2\log_a c \cdot \log_b a = \log_c a \cdot 2\log_a c = 2.$

$x^2(x+1) = 2$

~~$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$~~

$x = 1$

Если $\log_c b = \log_b a$

$\log_c b \quad \frac{\ln b}{\ln c} = \frac{\ln a}{\ln b}; \ \ln^2 b = \ln a \cdot \ln c$

$-49 < x < -1$
$x \neq -2; -42.$

$2\log_a c = 2\frac{\ln c}{\ln a} = 2$

$2\frac{\ln c}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln c} + 1 = \frac{\ln bc}{\ln c}$

$2\ln^2 c = \ln a \ln bc = \ln a \ln b + \ln a \ln c$

$2\ln^2 c = \ln b(\ln ab)$

~~$\ln ba = \ln c$~~

$\log_{ac} b = 2\log_a c$

$\frac{\ln b}{\ln c} = \frac{2\ln c}{\ln a}$