Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101660**

ID профиля: **152253**

Вариант 24

1 лист
чистовик

Московский физико-технический институт
Олимпиада «Физтех» по математике
11 класс. Вариант 24. Часть 1

№1 S-сумма первых 9 членов
$a_5 a_{18} > S-4$
$a_{10} a_{13} < S+60$
$a_1 - ?$

Итак, возрастающая арифметическая прогрессия — это прогрессия с положительной разностью.

$S = a_1+a_2+\ldots+a_9 = \left(\frac{a_1+a_1+8d}{2}\right)\cdot 9 = (a_1+4d)\cdot 9$

(1) $a_5\cdot a_{18} = (a_1+4d)(a_1+17d) > S-4$

(2) $a_{10}\cdot a_{13} = (a_1+9d)(a_1+12d) < S+60$

$\Rightarrow$ (1) $a_1^2+17a_1d+4a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4$

$a_1^2+21a_1d+68d^2-9a_1-36d+4>0$

$a_1^2+(21d-9)a_1+68d^2-36d+4>0$

(2) $a_1^2+9a_1d+12a_1d+108d^2 < 9a_1+36d+60$

$a_1^2+21a_1d+108d^2-9a_1-36d-60<0$

$a_1^2+(21d-9)a_1+108d^2-36d-60<0$

$-a_1^2-(21d-9)a_1-108d^2+36d+60>0$

сложим (1) и (2) $\Rightarrow \underbrace{68d^2-36d+4-108d^2+36d+60}_{64-40d^2}>0$

$\rightarrow$ решаем неравенство и имеем $d\in\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}};2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ но т.к. $d>0$ и d целое, то $d=1$. Подставим в уравнения

(1) $a_1^2+(21-9)a_1+68-36+4>0$

$a_1^2+12a_1+36>0$

$(a_1+6)^2>0 \Rightarrow a_1\neq -6$

(2) $a_1^2+12a_1+108-36-60<0$

$a_1^2+12a_1+12<0$ $\quad D=144-48=96 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=\frac{-12\pm\sqrt{96}}{2}=-6\pm\sqrt{12} \Rightarrow a_1\in(-6-\sqrt{12};-6+\sqrt{12})$

т.к. a целое, то $a_1\in\{-10;-9;-8\ldots-2\}$ т.к.

$-6-\sqrt{12}>-11$ т.к. $\sqrt{12}>3$ (возведем обе части в квадрат)

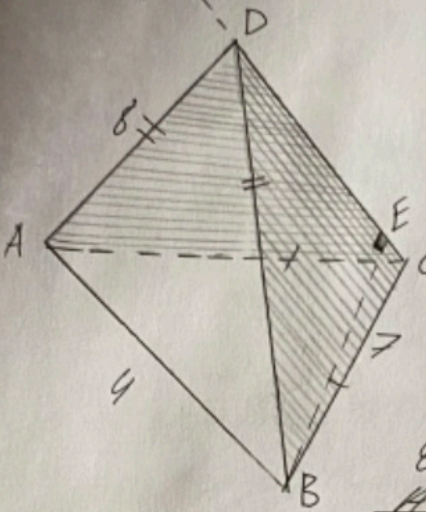
$-6+\sqrt{12}<1$ $\quad \sqrt{12}<4$ (возведем обе части в квадрат)

$\Rightarrow a_1\in\{-10,-9,-8,-7,-5,-4,-3,-2\}$

$\boxed{\text{Ответ: } a_1\in\{-10,-9,-8,-7,-5,-4,-3,-2\}}$

№2 тетраэдр ABCD
AB=4
AC=CB=7
AD=DB=8
CD ∥ оси цилиндра
CD-?

2 лист
чистовик



(заштрихованы)

① $\triangle ADC = \triangle BDC$ т.к стороны равны ⇒ высоты из A и B на DC падают в одну точку E ⇒ плоскость ABE ⊥ DC т.к AE ⊥ DC, BE ⊥ DC ⇒ плоскость ABE ⊥ оси цилиндра и параллельно его окружности.

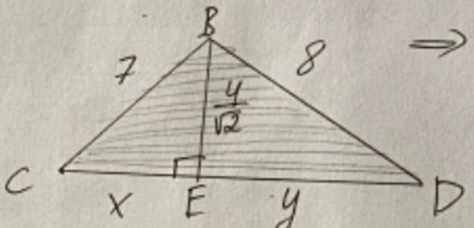
Из параллельного переноса понятно, что окружность цилиндра равна окружности описанной вокруг $\triangle ABE$.

Ее диаметр, по теореме синусов, равен $\frac{AB}{\sin(\angle AEB)}$ т.к $\sin\angle < 1$ ⇒ минимальный радиус при $\angle AEB = 90^\circ$ ⇒ $AE = BE = \frac{4}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим 2 случая

① E внутри треуг. DBC

т. пифагора $\triangle CBE$

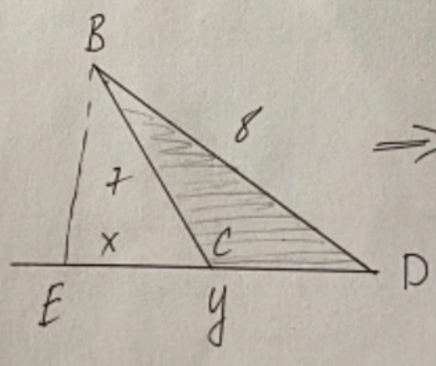


$\Rightarrow x^2+8=49 \Rightarrow x=\sqrt{41}$

$y^2+8=64 \Rightarrow x=\sqrt{56}$ - т. пифагора $\triangle BED$

$\Rightarrow CD=\sqrt{41}+\sqrt{56}$

② E лежит вне треуг. DBC



$\Rightarrow CD = \sqrt{56} - \sqrt{41}$

Ответ: $CD=\sqrt{41}+\sqrt{56}$ или (зависит от расположения точки E)
$CD=\sqrt{56}-\sqrt{41}$

21101660 (U152253 M1296017)

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 & \text{I}\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10) & \text{II}\end{cases}$$

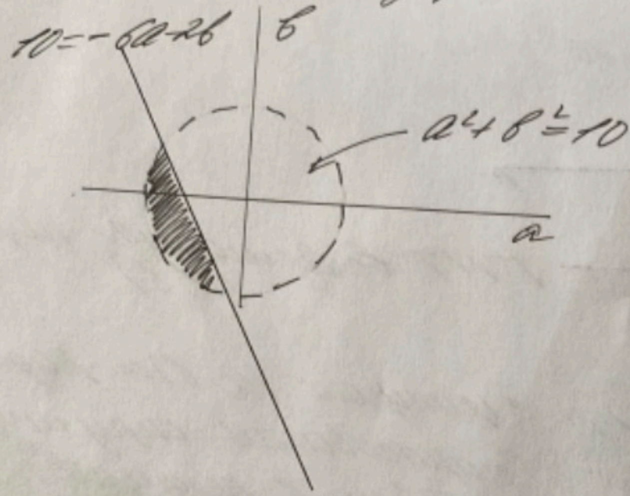
$\min S(M)$ - ?

3 лист
чистовик

II $a^2+b^2\le \min(-6a-2b, 10)$

1) если $-6a-2b\ge 10$

$a^2+b^2\le 10$ - круг с центром $(0, 0)$ и радиусом $\sqrt{10}$

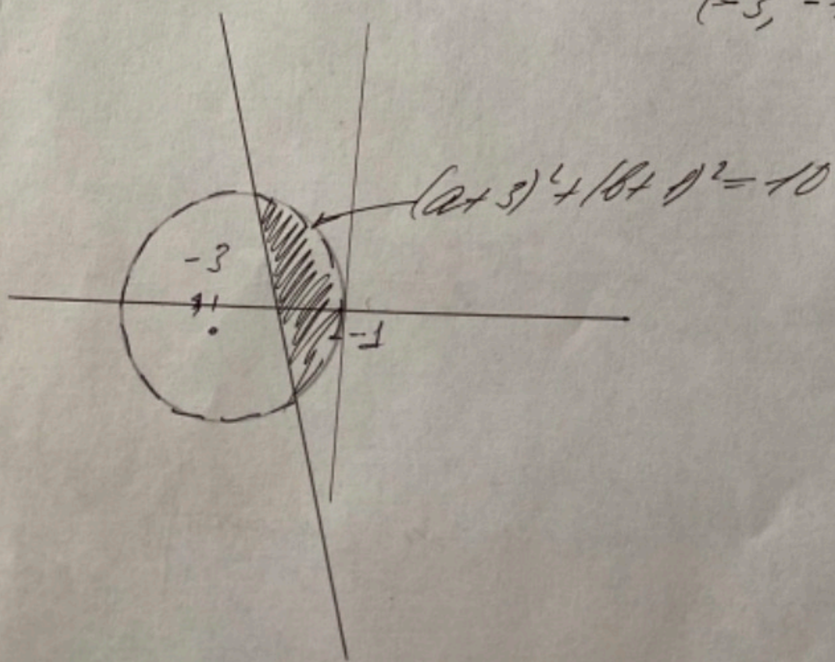


2. Если $-6a-2b\le 10$

$\longrightarrow a^2+b^2\le -6a-2b$

$\longrightarrow (a^2+6a+9)-9+(b^2+2b+1)-1\le 0$

$\longrightarrow (a+3)^2+(b+1)^2\le 10$ - круг с центром $(-3, -1)$ и радиусом $\sqrt{10}$



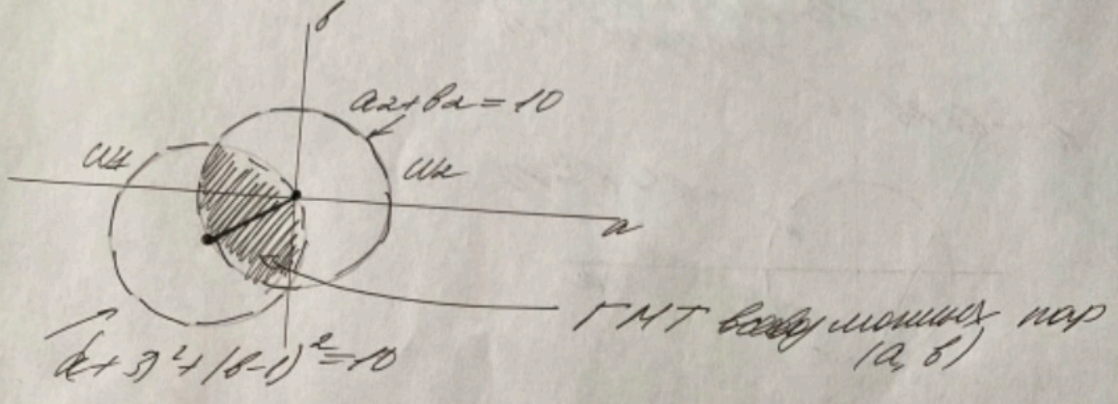
Чистовик

Продолжение задачи № 3

необходимо учитывать условие min $(-6a-2b, 10)$

→ решение II неравенства есть пересечение двух ~~окружностей~~ кругов:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 10 \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10 \end{cases}$$



I $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10$ – круг с центром (a, b) и радиусом $\sqrt{10}$

Если для каждой пары (a, b) нарисовать окружность с центрами в (a, b) и радиусом $\sqrt{10}$, то в результате получится эллипс. Найдем его ~~полуоси~~ полуоси, обозначив за A и B их.

Расстояние между центрами ш1 и ш2: $\sqrt{(-3-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{10}$

для малой полуоси → $2B = \sqrt{10} + 2R = \sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$ →

→ $B = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ и R – радиус I-ого круга, и для большой полуоси имеем: $2A = \sqrt{10}\cdot\sqrt{3} + 2R = \sqrt{10}\cdot\sqrt{3} + 2\sqrt{10} =$

$= (\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{10}$ → $A = \frac{\sqrt{10}\cdot(\sqrt{3}+2)}{2}$

→ $S_{эллипса} = \pi \cdot AB = \pi \cdot \frac{30\cdot(\sqrt{3}+2)}{4} =$

$= \frac{15}{2}(\sqrt{3}+2)\cdot\pi$

Ответ: $S = \frac{15}{2}(\sqrt{3}+2)\cdot\pi$, фигура эллипс

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101660**

ID профиля: **152253**

Вариант 24

Московский физико-технический институт — 1 лист чистовик

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс Вариант 24. Часть 2

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=33 \\ НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$ количество N (a,b,c), которые этому удовлетворяют - ?

Распишем числа a, b, c так:

$a=3^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}$

$b=3^{\beta_1}\cdot 11^{\beta_2}$ $\Longrightarrow$ можно заметить, что $\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=19$, $\max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=15$

$c=3^{\gamma_1}\cdot 11^{\gamma_2}$ $\qquad \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$, $\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1$

1) Посчитаем количество возможных распределений $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$

I) все варианты различны

$\Longrightarrow 3\cdot 2\cdot 17$ таких вариантов

II) всего два различных числа $\to 2\cdot 3$ вариантов

2) Посчитаем количество возможных вариантов $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$

I) все варианты различны $\to 3\cdot 2\cdot 13$

II) всего 2 различные степени

$\to 2\cdot 3$

$\Longrightarrow$ всего $(3\cdot 2\cdot 17+2\cdot 3)(3\cdot 2\cdot 13+2\cdot 3)=$

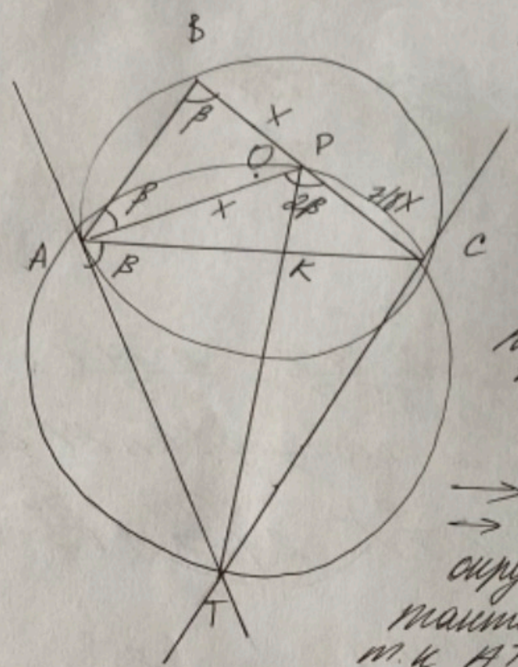
$=108\cdot 84=9072$ тройки

Ответ: 9072 тройки

№6 ABC-остроуг. Δ-к
O-центр опис. окружности, окру
A, O, C пересекает AC в т. P
т. T

2 лист
чистовик

S_{ABC} - ?
AC - ?



I пункт

① Пусть $\angle ACB = \beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOC = 2\beta \Rightarrow \angle ABC = 2\beta$
по теореме об угле между хордой и касательной
$\angle CAT = \beta = \angle ACT \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\beta$
$\rightarrow$ 4-их APCT - описанный $\Rightarrow$
$\rightarrow$ Точка лежит на второй окружности.
также, T - середина дуги AC т.к $AT = CT \Rightarrow PT$ - биссектриса
$\angle APT \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{16}{4} = \frac{8}{7} \Rightarrow$ пусть $AP = X$, тогда $PC = \frac{7}{8}X$

② $\angle BPA = 180 - 2\beta \Rightarrow \angle BAP = \beta \Rightarrow \Delta$ равнобедренный $\Rightarrow$
$\Rightarrow BP = AP = X \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S(ABP)}{S(APC)} = \frac{8}{7} \Rightarrow S(ABP) = \frac{8}{7}(16+14) =$$

$$= \frac{8}{7} \cdot 30 \Rightarrow S_{ABC} = 30 \cdot \frac{15}{7} = \frac{450}{7}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{450}{7}}$$

там будет пункт 2

продолжение задачи № 8 | 3 лист чистовик

β (у рисунка, см. прошлую страницу) $= \arctan\left(\frac{3}{5}\right)$

$\longrightarrow \operatorname{tg}(\beta) = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$

по формуле площади $\triangle APC$

$$\frac{x\cdot\frac{7}{8}\sin(2\beta)}{2} = \frac{7}{8}x^2\sin\beta\cos\beta =$$

$$= \frac{7}{8}x^2\cdot\frac{15}{34} = 30 \Rightarrow x^2 = \frac{30\cdot 34\cdot 8}{15\cdot 7} = \frac{2\cdot 34\cdot 8}{7}$$

$x = \sqrt{\frac{34}{7}}\cdot 4 \Rightarrow$ по теореме косинусов в $\triangle APC$

$$AC^2 = \left(\sqrt{\frac{34}{7}}\cdot 4\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{34}{7}}\cdot 4\cdot\frac{7}{8}\right)^2 - 2\left(\sqrt{\frac{34}{7}}\cdot 4\cdot\sqrt{\frac{34}{7}}\cdot 4\cdot\frac{7}{8}\right)\cdot\cos(\beta) =$$

$$= \frac{34}{7}\cdot 4 + \frac{34}{7}\cdot 4\cdot\frac{49}{64} - 2\cdot\frac{34}{7}\cdot 16\cdot\frac{7}{8}\cdot\left(2\cdot\frac{25}{34} - 1\right) =$$

$$= \left(5\sqrt{\frac{41}{14}}\right)^2$$

$\longrightarrow AC = 5\sqrt{\frac{41}{14}}$

Ответ: $\boxed{AC = 5\sqrt{\frac{41}{14}}}$

№5 $\overset{I}{\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)}$; $\overset{II}{\log_{(x+1)^2}(29-x)}$; $\overset{III}{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)}$

x, при которых два из них равны, а третье > на 1 - ?

ОДЗ
$$\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ (x+1)^2\neq 0,1 \\ -x-1>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -1 \\ x\neq 0,-2 \\ x<-1 \\ x\neq -42 \end{cases}$$

$\longrightarrow x\in(-49;-1)\setminus\{-2,-42\}$

Вариант 1: I = II, III = II + 1

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$: I = II

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

Пусть $29-x=a$, $\frac{x}{7}+7=b$, $-(x+1)=c$

$\longrightarrow \log_{c^2}a=\log_{a^{\frac{1}{2}}}b$

$\log_{b^{\frac{1}{2}}}(c)=\log_{a^{\frac{1}{2}}}b+1=\log_{a^{\frac{1}{2}}}b\,a^{\frac{1}{2}}$

$$\longrightarrow \frac{\log_2 a}{2\log_2 c}=\frac{\log_2 b}{\frac{1}{2}\log_2 a}\longrightarrow(\log_2 a)^2=$$

$$=4\log_2 b\log_2 c$$

$$\frac{\log_2 c}{\frac{1}{2}\log_2 b}=\frac{\log_2 b}{\frac{1}{2}\log_2 a}+1\longrightarrow\log_2 c$$

. . .

Черновик

1

№4

НОД(a; b; c) = 33

НОК(a; b; c) = $3^{19} \cdot 11^{15}$

$\boxed{3^{19} \cdot 11^{15}}$

ab

$abc = 3^{19} \cdot 11^{5}$

НОД(

ab

3

11·3

НОК abc

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$

19 - max
1 - min

15 - max
1 - min

$3 \cdot 2 \cdot 17 = 17 \cdot 6 = 60 + 42 = 102$

$(3 \cdot 2 \cdot 17 + 2 \cdot 3)$

$= (102 + 6)$

2·3 6 6+8 2

$(3 \cdot 2 \cdot 13 + 2 \cdot 3)$

(84)

$\times \begin{array}{r}108\\84\\\hline 432\\864\\\hline 9072\end{array}$

9072

$\times \begin{array}{r}108\\84\\\hline 402\\864\\\hline 8604\end{array}$

черновик 4

$$\frac{34}{7}\cdot 16+\frac{34}{7}\cdot 16\cdot\frac{49}{64}-2\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{34}}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\left(\frac{34}{7}\right)^2\cdot 49\cdot 4-20\sqrt{34}$$

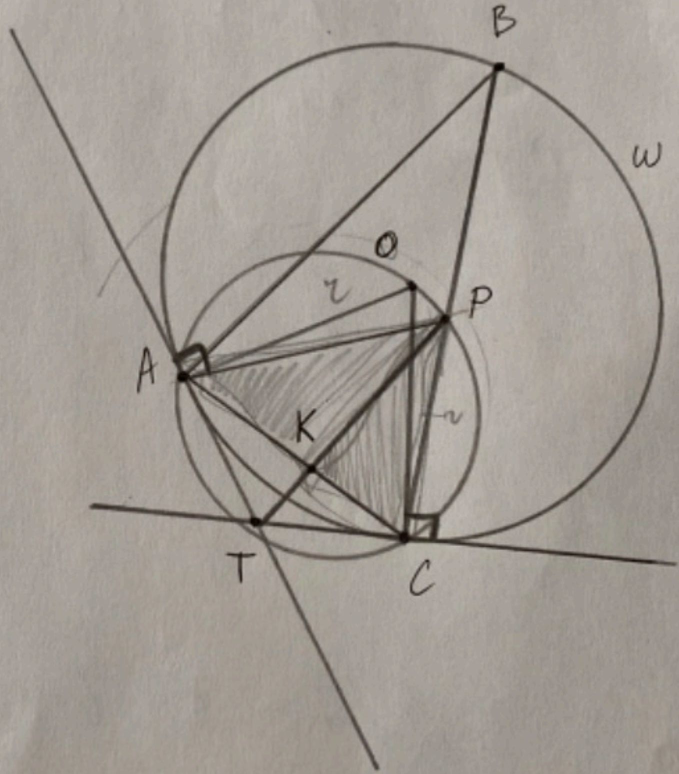
$$\frac{34}{7}\cdot 16+\frac{34}{7}\cdot 16\cdot\frac{49}{16}$$

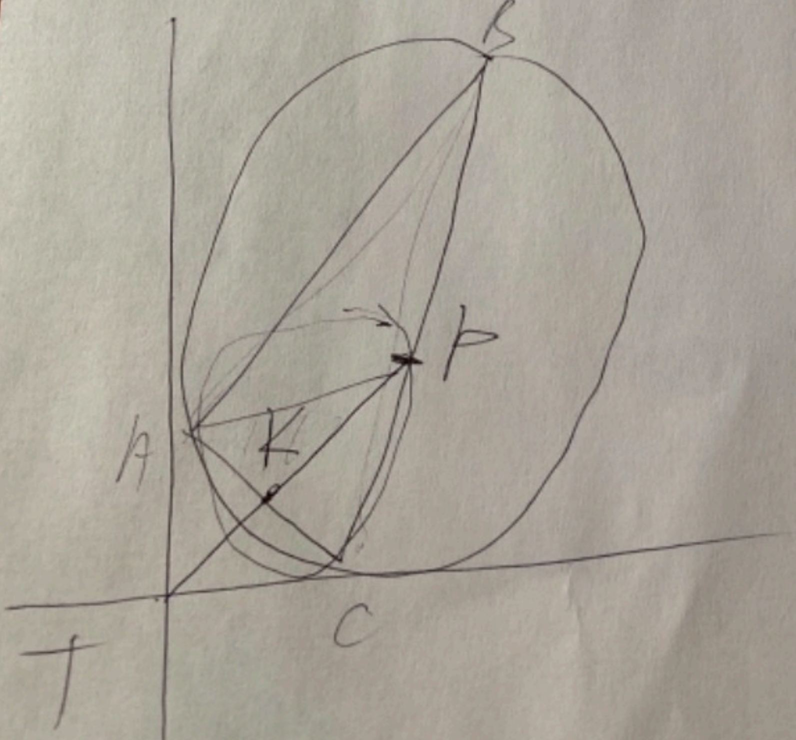
$$\left(\frac{34}{7}\right)^2\cdot 49\cdot 4$$

$$\frac{34}{7}\left(4+\frac{49}{16}-2\cdot 2\cdot 7\cdot\frac{8}{17}\right)$$

$=$

№7





2101660 (U152253 M1296018)

$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{\ }{5}$ $\min S(M) - ?$

№3 $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10 \\ a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$

№6 ABC - остроуг. Δ-к черновик

O - центр описанной окружности

окр через A, O, C пересекает BC в т. P

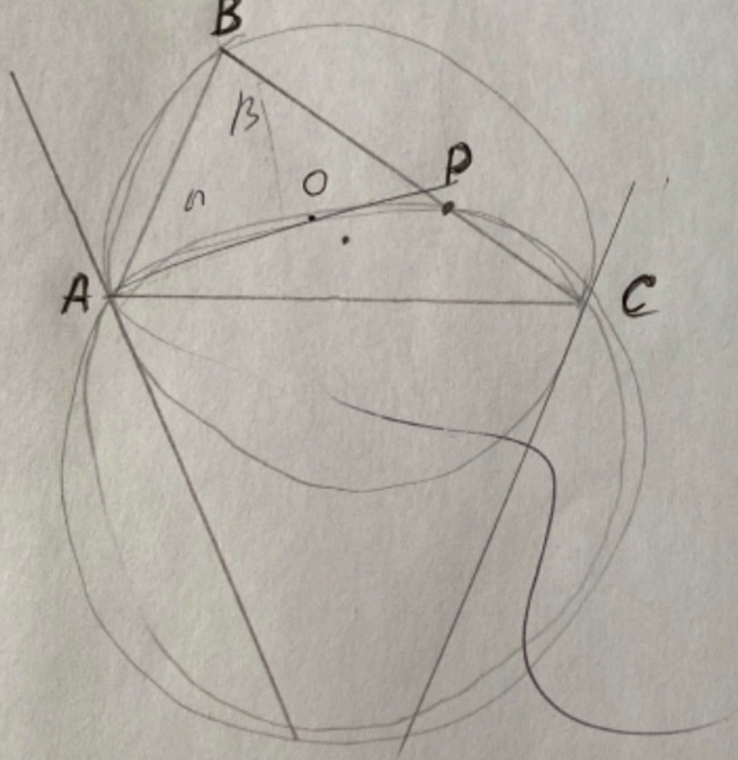
T - т. пересечения касательных к т. A, C.

$S_{APK} = 16$

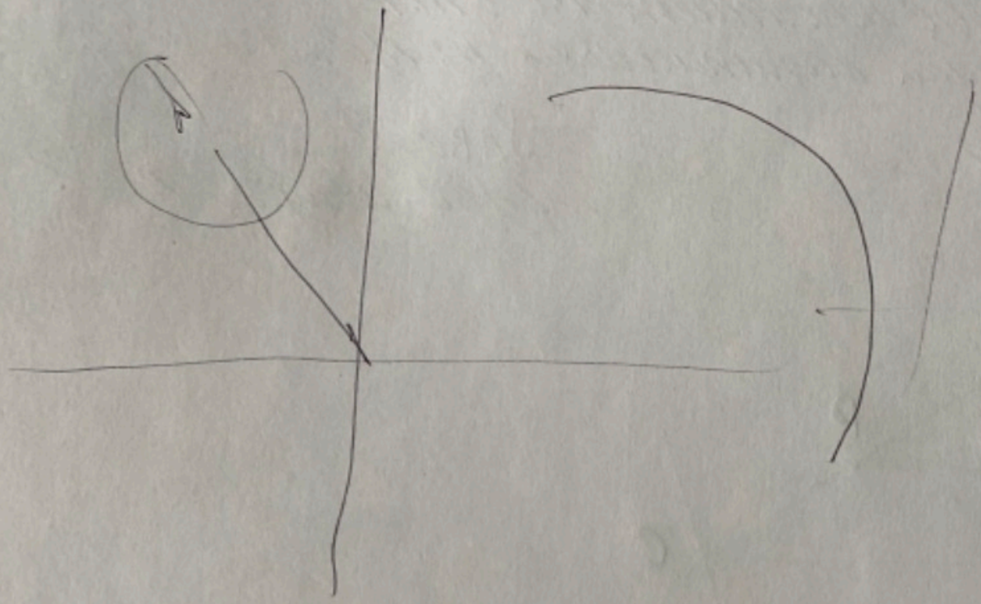
$S_{CPK} = 14$

S_{ABC} - ?

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$; AC - ?



21101660 (U152253 M1296018)



21101660 (U152253 M1296018)

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$

$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b+10)$

Шрихов?

$\min S(M)$ - ?

3

N5 log

x, при

Ок

$(x+1)^2$

$\log_{\sqrt{23x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$ log —

$\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)^2}(-x-1)$

$\log_{\sqrt{23x}}\left(\frac{x}{7}+1\right)$

log

$29-x=\frac{x}{7}+7$

$22=\frac{x}{7}+x$

$29-x=$

2

$22=\frac{8x}{7}$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=$

$134=8x$

$x=\frac{134}{8}=\frac{77}{4}=19\frac{1}{4}$

$\log_{\sqrt{23x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$(x+1)^2=\sqrt{29-x}$

$(x+1)^2=\sqrt{29-x}$

$\frac{x}{7}+7=-x-1$

$8=-\frac{8x}{7}$

$56=-8x$

$x=-7$

$29-x=-x-1$

меня ждут в Оксфорд на MATHEMATICS примеси

2 ... 152253 M1296018)

$lg0 = lg0$

$28 - x$