Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101470**

ID профиля: **99795**

Вариант 24

$$\left(x^2\cdot(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \cancel{2}x\cdot(x^2-4)^{-\frac{1}{2}} + x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2-4)^{-\frac{3}{2}}\cdot\cancel{2}x = 0$$

$$1\,\cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}} = \frac{1}{2}x^2\cdot\cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}}\cdot\frac{1}{(x^2-4)}$$

$$R_{min} = \frac{8}{2\sqrt{8-4}} = \frac{8\ \ 4}{2} = 2$$

$$1 = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x^2-4}\ ;\quad 2x^2-8 = x^2$$

$$x^2 = 8$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

$$x^2 = 9\ ;\ x = 3$$

$$R = \frac{9}{2\sqrt{9-4}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

$$\begin{array}{r|l} 56 & 4 \\ -4 & 14 \\ \hline 16 & \end{array}$$

$56 = 4\cdot 14$

$$\frac{9\sqrt{5}}{10} \ \overset{>}{\vee}\ 2$$

$$\begin{array}{r} \times\ 81 \\ 5 \\ \hline 405 \end{array}$$

$9\sqrt{5} \vee 20$

$81\cdot 5 \vee 400$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 10$$

$$y = -3\cancel{x}$$

$$x^2 + \cancel{6x} + \cancel{9} + 9x^2 - \cancel{6x} + \cancel{1} = \cancel{10}$$

$$x^2 + 9x^2 = 0\ ;\ 10x^2 = 0\ ;\ x = 0$$

$$y = -3x-5$$

$$y^2 + x^2 = 10$$

$$9x^2 + 15x + 25 + x^2 = 10$$

$$10x^2 + 15x + 15 = 0$$

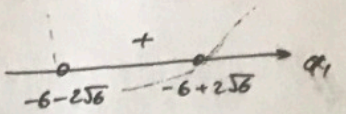
$$2x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$D = 9 - < 0$$

$17 \times 4 = 68$ $68 + 4 = 72$ $72 - 36 = 36$ $12 \times 9 = 108$ $108 - 60 = 48$ $48 - 36 = 12$ $99 - 36 = 63$

$D/4 = 36 - \cancel{12} = \cancel{\ } = 24$

$a_1 = -6 \pm \sqrt{24} = -6 \pm 2\sqrt{6}$

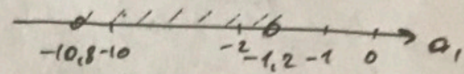


$2 < \sqrt{6} < 3$

$2{,}5 \approx 2{,}4$

$-6 - 2 \cdot 2{,}4 = -6 - 4{,}8 = -10{,}8$

$-6 + 2 \cdot 2{,}4 = -6 + 4{,}8 = -1{,}2$



$a_1 = -10$: $S = -90 + 36 = -54$

$a_5 = -6$; $a_{18} = 7$ $a_{10} = -1$; $a_{13} = 2$

$-42 > -54 - 4 = -58$ $-2 < 6$

$a_1 = -6$: $S = -54 + 36 = -18$

$a_5 = -2$; $a_{18} = 11$

$-22 > -22$

$a_1 = -11$: $S = -99 + 36 = -63$

$a_5 = -11 + 4 = -7$ $a_{18} = -11 + 17 = 6$ $a_{10} = -11 + 9 = -2$ $a_{13} = -11 + 12 = 1$

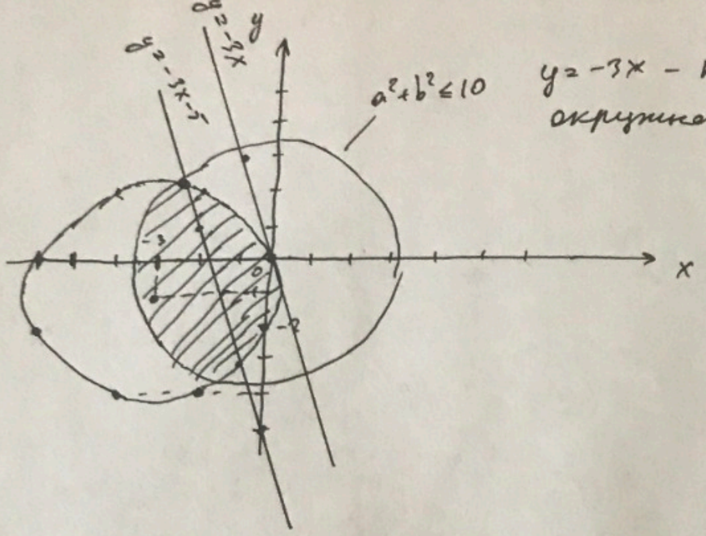
$-42 > -67$ $-2 < -63 + 60 = -3$

$a_1 = -1$: $S = -9 + 36 = 27$

$a_5 = -1 + 4 = 3$; $a_{18} = -1 + 17 = 16$ $a_{10} = 8$; $a_{13} = 11$

$48 > 23$ $88 < 27 + 60 = 87$

Чистовик

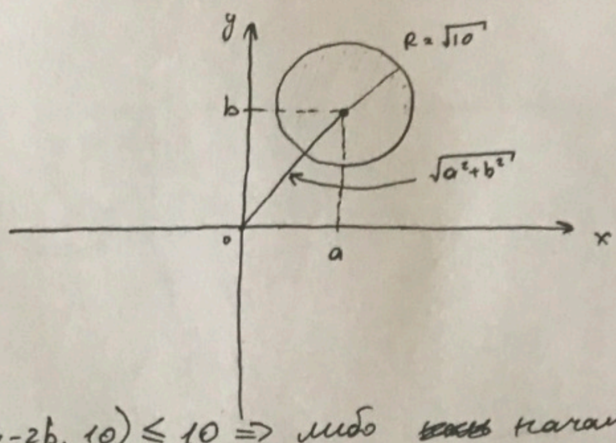


$y=-3x$ – касательная к окружности в т. $(0;0)$

Заштрихованная область – искомая фигура.

21101470 (U99795 M1301616)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,\ 10)\end{cases}$$



1. $-6a-2b\ge 0$

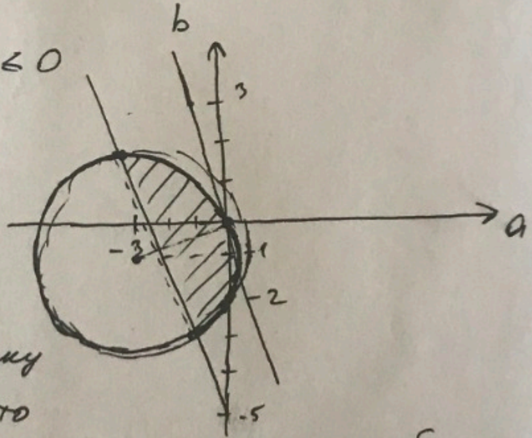
$-3a\ge b$

2. $a^2+b^2\le \min(-6a-2b,\ 10)\le 10 \Rightarrow$ либо начало системы координат лежит внутри окружности радиуса $\sqrt{10}$, либо на этой окружности.

3. $\begin{cases}-3a\ge b\\ -6a-2b<10\\ a^2+b^2\le -6a-2b\end{cases}$

$a^2+6a+9-9+b^2+2b+1-1\le 0$

$$\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10\\ -3a\ge b\ (b\le -3a)\\ -3a<5+b\ (b>-3a-5)\end{cases}$$



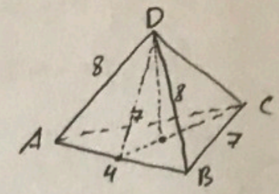
Т.о. если мы выбираем точку из заштрихованной области, то все условия выполняются. Если берем точку из области $b\le -3a-5$, то $-6a-2b>10$, а если из оставшейся области, то условия не выполняются.

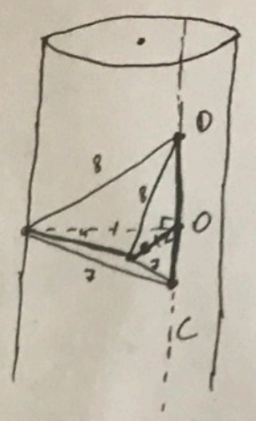
$AB = 4$

$AC = CB = 7$

$AD = DB = 8$

CD – ?





1) В тетр. $\triangle ABD$ и $\triangle ACB$ – р/б

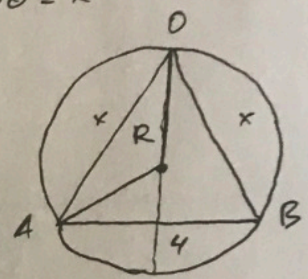
Проекция DC на (ABC) совпадает с ~~перпен~~ высотой в р/б $\triangle ABC \Rightarrow AB \perp DC$ (по Th. о 3-х перпендикулярах)

Т.о. $AB \perp$ оси симметрии цилиндра.

2) Через отр. AB проведём плоскость, перпендикулярную DC.

Она будет перпендикулярна и оси $\Rightarrow$ сечение цилиндра этой плоскостью – окружность. Пусть эта плоскость $\cap\, DC =$ т. O. Тогда $\triangle ABO$ – вписанный.

3) $\triangle ADO = \triangle BDO \Rightarrow AO = BO$. Пусть $AO = BO = x$



$DO = \sqrt{8^2 - x^2}$; $CO = \sqrt{7^2 - x^2}$

$CD = \sqrt{8^2 - x^2} + \sqrt{7^2 - x^2}$

$$S_{ABO} = \frac{4x^2}{4R} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{x^2 - 2^2}$$

$$\frac{x^2}{R} = 2\sqrt{x^2 - 4}; \quad R = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\left(x^2 \cdot (x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}}\right)' = 2x \cdot (x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2 - 4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{2} x^2 \cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}} \cdot \frac{1}{(x^2 - 4)}$$

$$2x^2 - 8 = x^2; \quad x^2 = 8$$

$$R_{min} = \frac{8}{2 \cdot \sqrt{8 - 4}} = 2$$

$$CD = \sqrt{64 - 8} + \sqrt{49 - 8} = \sqrt{56} + \sqrt{41} = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$$

$\boxed{\text{Ответ: } CD = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}}$

Чистовик

1.

$S = \sum_{i=1}^{9} a_i$

$a_5 \cdot a_{18} > S-4$

$a_{10} a_{13} < S+60$

$a_1 - ?$

$a1. = a_1$

$a2. = a_1 + b$

$a3. = a_1 + 2b$

$\vdots$

$a9. = a_1 + 8b$

$\frac{1+8}{2} \cdot 8 = 36$

$S = 9a_1 + 36b$

$(a_1+4b)(a_1+17b) > 9a_1 + 36b - 4$

$(a_1+9b)(a_1+12b) < 9a_1 + 36b + 60$

$a_1^2 + 17a_1b + 4a_1b + 4 \cdot 17b^2 > 9a_1 + 36b - 4$

$a_1^2 + 21a_1b + 4 \cdot 17b^2 > 9a_1 + 36b - 4$

$a_1^2 + 21a_1b + 9 \cdot 12b^2 < 9a_1 + 36b + 60$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1b - 9a_1 - 36b > -4 \cdot 17b^2 - 4 \\ a_1^2 + 21a_1b - 9a_1 - 36b < 60 - 9 \cdot 12b^2 \end{cases}$

$a_1^2 + (21b-9)a_1 - 36b + 4 \cdot 17b^2 + 4 > 0$

$a_1^2 + (21b-9)a_1 - 36b + 9 \cdot 12b^2 - 60 < 0$

$60 - 9 \cdot 12b^2 > -4 - 4 \cdot 17b^2$

$64 > b^2(9 \cdot 12 - 4 \cdot 17) = 4b^2(9 \cdot 3 - 17) = 40b^2$

$b^2 < \frac{64}{40} = \frac{8}{5}$; $b < \sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{1,6} < 2$

$b = 1$, т.к. прогрессия возрастающая и сост. из целых чисел.

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 - 9a_1 - 36 + 4 \cdot 17 + 4 > 0 \\ a_1^2 + 21a_1 - 9a_1 - 36 - 60 + 9 \cdot 12 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+6)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -6 \\ a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6}) \Rightarrow \text{т.к. } a_1 \text{ - целое, то} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a_1 = -10 \\ a_1 = -9 \\ a_1 = -8 \\ a_1 = -7 \\ a_1 = -6 \text{ - не уд.} \\ a_1 = -5 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -3 \\ a_1 = -2 \end{array} \right.$

стр. 1

Т.о. a_1 может принимать значения: $-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2$.

$\boxed{\text{Ответ: } a_1 \text{ принимает значения: } -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2}$

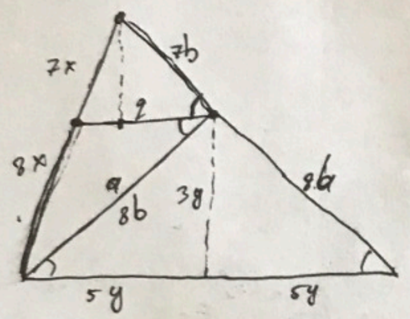
Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101470**

ID профиля: **99795**

Вариант 24



$$\frac{b}{a+b} = \frac{7}{15}$$

$15b = 7a + 7b;$

$7a = 8b;$

$\cancel{14 = \frac{1}{2} \cdot 7b \cdot q \cdot \sin\frac{\varphi}{2}}$

$\cancel{16 = \frac{1}{2} \cdot 8b \cdot q \cdot \sin\frac{\varphi}{2}}$

$$\cos\varphi = \frac{1 - tg^2\frac{\varphi}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \frac{9}{25}}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{\cancel{16}^{\,2}}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{25}}{\cancel{24}_{\,3}} = \frac{2}{3}$$

$AC^2 = \cancel{\#}\ 49b^2 + 64b^2 - 2 \cdot 56b^2 \cdot \cos\varphi =$

$= 49b^2 + 64b^2 - 2 \cdot 56 \cdot \frac{2}{3} b^2$

$$\begin{array}{r} 64 \\ +\ 49 \\ \hline 113 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 113 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 339 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 224 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 339 \\ -\ 224 \\ \hline 115 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 345 \end{array}$$

$\log_a b = \frac{1}{\log_a c}$

$\log_a b - \frac{1}{\log_a c} = 0$

$\log_a b = \log_c a$

$a = n\cdot 33$; $b = m\cdot 33$; $c = k\cdot 33$

m, n, k – взаимно простые

$a = n\cdot 11\cdot 3$; $b = m\cdot 11\cdot 3$; $c = k\cdot 11\cdot 3$

$n\cdot 11\cdot 3\cdot m\cdot k = 3^{19}\cdot 11^{15}$

$n\cdot m\cdot k = 3^{18}\cdot 11^{14}$, взаимопростые.

$\begin{cases} n = 1 \\ m = 3^{18} \\ k = 11^{14} \end{cases}$ – 6 вариантов.

$a, b, c:\ 33,\ 3^{18}\cdot 33,\ 11^{14}\cdot 33$

$3\cdot 11 \quad 3^{19}\cdot 11 \quad 3\cdot 11^{15}$

$a = 33,\ b = 33,\ c = 3^{18}\cdot 11^{14}\cdot 33$ НОК

$m\cdot n\cdot k$

$\cancel{n\cdot k = 3^{18}\cdot 11^{14}}$

$\cancel{m = 3^{a}\cdot 11^{b}}$

$\cancel{n = 3}$

$n = 3$:

$m = 3^{a}\cdot 11^{b}$

$n = 3^{k}\cdot 11^{d}$

$k = 3^{18-a-k}\cdot 11^{14-b-d}$

$m = 3^{a}\cdot 11^{b}$

$n\cdot k = 3^{18-a}\cdot 11^{14-b}$.

$n = 3 \Rightarrow k = 3^{17-a}$.

$n =$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

НОД = 7

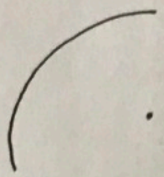
НОК = $7\cdot 7\cdot 3$

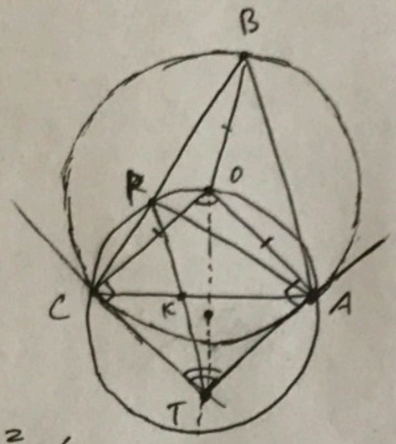
$1,\ 3^{17},\ 11^{14}\cdot 3$

$3^{18}\cdot 11^{14} = m\cdot n\cdot k$

$CP^2 = 49x^2 + q^2 + 14xq\cdot\cos\theta$

$AP^2 = 64x^2 + q^2 + 16xq\cos\theta$

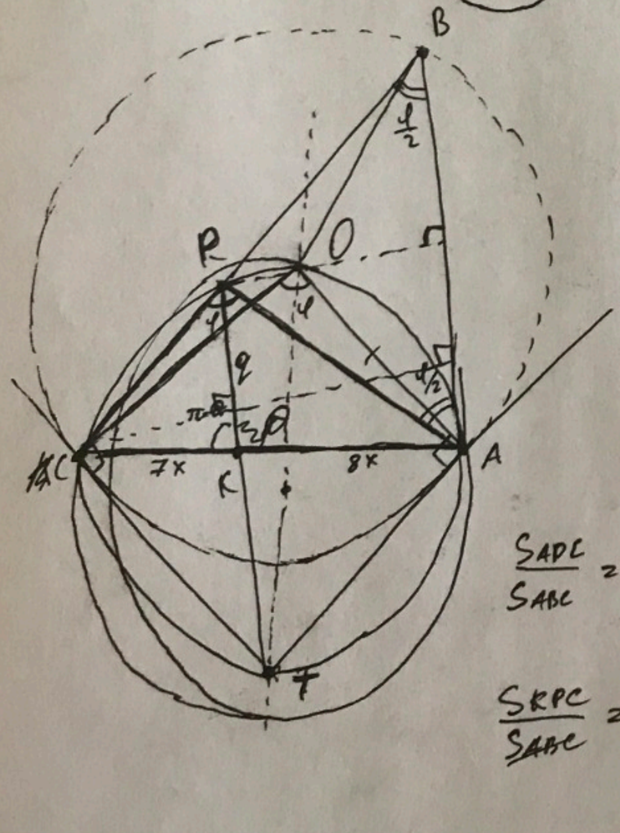




2
15
×15
75
15
225
× 2
450

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$



$\frac{1}{2} CK \cdot h = 14$

$\frac{1}{2} AK \cdot h = 16$

$\frac{CK}{AK} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot H$

S

$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{CP\cdot AC}{AC\cdot CB} = \frac{CP}{BC}$

$\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \frac{CP\cdot CK}{CB\cdot AC} = \frac{CK}{AC}\cdot\frac{S_{APC}}{S_{ABC}}$

Чистовик

Вар. 24

6 (продолжение)

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$

$AC - ?$

Пусть $CP = 7b \Rightarrow PB = AP = 8b$

$\frac{\varphi}{2} = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{3}$

$\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$S_{APK} + S_{CPK} = 30 = \frac{1}{2} \cdot 7b \cdot 8b \cdot \sin\varphi$

$60 = 56b^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$; $b^2 = \frac{\overset{15}{\cancel{60}}}{\underset{14}{\cancel{56}}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}} \cdot 3 \cdot \sqrt{5}}{14 \cdot \cancel{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{14}$

$AC^2 = 49b^2 + 64b^2 - 2 \cdot 56 \cdot b^2 \cdot \cos\varphi =$

$= 113b^2 - 112 \cdot \frac{2}{3} b^2 = b^2 \cdot \frac{113 \cdot 3 - 112 \cdot 2}{3}$

$AC^2 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\sqrt{5}}{14} \cdot \frac{115}{\cancel{3}} = \frac{345\sqrt{5}}{14}$

$AC = \sqrt{\frac{345\sqrt{5}}{14}}$

$\boxed{\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{450}{7}; \ AC = \sqrt{\frac{345\sqrt{5}}{14}}}$

Чистовик

Вар. 24.

6

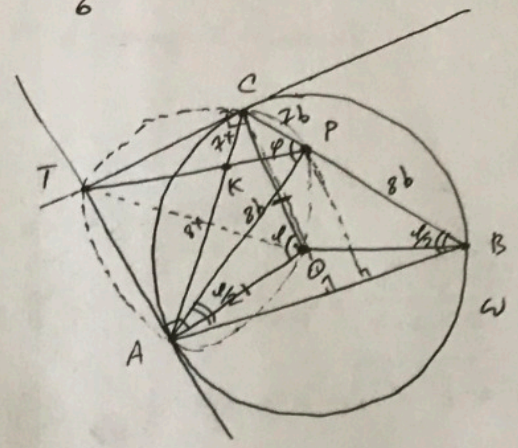
$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$

$S_{ABC} - ?$

$AC - ?$



1) Пусть вторая окр. – α.
$\triangle AOC$ вписан в α, четыр. $TCOA$ – вписанный ($\angle TCO + \angle TAO = 180$, т.к. OC и OA – радиусы в т. кас.)

Т.о. т. $T \in \alpha$.

2) $\left.\begin{aligned}\frac{1}{2} CK \cdot h = 14 \\ \frac{1}{2} AK \cdot h = 16\end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{CK}{AK} = \frac{7}{8}$

3) $\angle CPA = \angle COA$ (опир. на ту же дугу)

4) Пусть $\angle AOC = \varphi$ (центральный) $\Rightarrow \angle APC = \varphi$; $\angle ABC = \varphi/2$ (вписанный)

Т.о. $\angle APC$ – внешний к $\triangle APB \Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = \angle APC$
$\angle PAB + \varphi/2 = \varphi \Rightarrow \angle PAB = \varphi/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APB$ – р/б, $AP = PB$

5) $\triangle AOC$ – р/б $\Rightarrow$ биссектриса, проведённая из т. O, пройдёт через центр α и т. $T \Rightarrow \cup CT = \cup AT$.

6) $\angle CPT = \angle APT = \frac{\varphi}{2}$, т.к. опираются на равные дуги.
Т.о. $\angle TPA = \angle PAB = \frac{\varphi}{2} \Rightarrow KP \parallel AB$.
Т.о. $\triangle CPK \sim \triangle ABC$, $k = \frac{CK}{AC} = \frac{7x}{15x} = \frac{7}{15}$.

$\frac{S_{CPK}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{7^2}{15^2}$; $S_{ABC} = \frac{15^2}{7^2} \cdot 14 \cdot 2 = \frac{450}{7}$

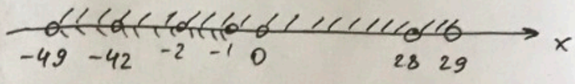
стр. 3

Чистовик Вар. 24.

5.

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

①. $\begin{cases} \frac{x}{7}+7>0 \\ 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ x+1\neq 0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ -x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-49. \\ x<29. \\ x\neq 28. \\ x\neq -1. \\ x\neq 0. \\ x\neq -2. \\ x\neq -42. \\ x<-1 \end{cases}$



т.о. $x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup$
$\cup(-2;-1)$

②. $\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(\cancel{29-x}\ x+1)^2}(29-x) \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)+1 \end{cases}$

1. $2\cdot\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{\log_{(29-x)}(x+1)^2}$

lo

стр. 2

21101470 (U99795 M1301617)

Чистовик

вар. 24.

4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

Пусть $a=n\cdot 33$, $b=m\cdot 33$, $c=k\cdot 33$, где m, n, k – взаимно простые натуральные числа.

Тогда $НОК = 33\cdot m\cdot n\cdot k = 3^{19}\cdot 11^{15}$

$$m\cdot n\cdot k = 3^{18}\cdot 11^{14}$$

~~Т.к. числа m, n, k могут принимать любые значения из трёх: 1, 3^{18}, 11^{14}~~

Найдём кол-во вариантов, когда произведение трёх взаимно простых чисел $= 3^{18}\cdot 11^{14} = \underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{18}\cdot\underbrace{11\cdot 11\cdot\ldots\cdot 11}_{14}$

Каждое ~~число~~ число может входить в состав ~~можно передать~~ одного из трёх чисел m, n, k. Т.о. всего вариантов:

$$3^{18+14} = 3^{32}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 3^{32} \text{ троек}}$$