Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101437**

ID профиля: **384237**

Вариант 24

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10) \quad (2) \end{cases}$ Черновик

$-6a-2b \le 10$

$3a+b \ge -5$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2 \le 10$

$a^2+b^2 \le -6a-2b$

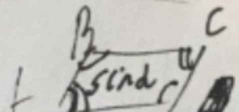
$x^2-2ax+y^2-2ay-6a-2b \le 10$

$x^2-2ax+y^2-2y$ $\quad x^2+y^2-2(ax+by)$ ~~$-6a-2b$~~ ≤ 10

$-6a-2b \le 10$ $\quad x^2+y^2 \le 2ax+by$

$2a^2+2b^2-3c^2$

$S_{ABCD} = \frac{\ldots}{} \sin\alpha$



x^2+y^2

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$6a-2ax-2yb$

$(x+y)^2-2xy+(a+b)^2-2ab \quad -2ax-2yb \le 10$

$a^2+2ab+b^2-2ab$

$(x+y)^2+(a+b)^2-2x(y+a)-2b(y+a) \le 10$

$(x+y)^2+(a+b)^2-2(y+a)(x-b) \le 10$

$x^2+2xy+\ldots$

$S_{ap} = ab \cdot xy$

$(x+y)^2-2xy+a^2+2ab+b^2-2ab = 200$

21101437 (U384237 M1301696)

(3) ~~M~~ Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x; y)$ таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система нер-в.

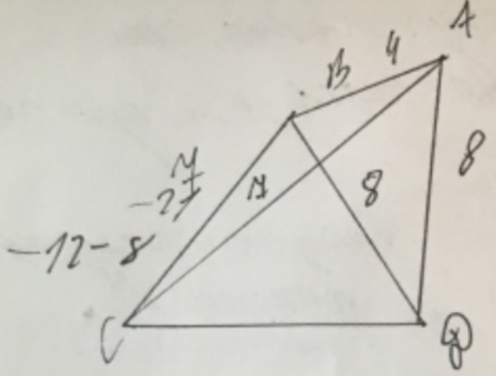
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

$(\cancel{x-a})^2 \cancel{=} (\cancel{x-a})^2$

21101437 (U384237 M1301696)

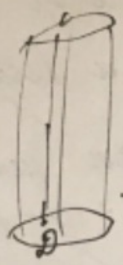
Чернетка



$16 \cdot 6$

S фігури M

$11^2 4 \dots$



min(x;y)
|
мінімум
з 2 чисел

$a_{10} = a_1 + 9d$
$a_{13} = a_1 + 12d$

$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) =$

$= a_1^2 + 21d + 108d^2 < S + 60$

$- \; a_2 - 2d - 68d^2 < a - S$

$+ \; a^2 + 2d + 68d^2 < S + 60$

$a_{10} = a_1 + 9$
$a_{13} = a_1 + 12$

$(a_1 + 9)(a_1 + 12) =$

$= a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a^2 + 36 + 60$

$9a_1 + 96$

$40d^2 < 64$

$d^2 < \frac{64}{40}$

$d < \frac{8}{\sqrt{40}}$

$d < \frac{8}{2\sqrt{10}}$

$\frac{8}{2\sqrt{10}}$ 2

$\frac{64}{40} < 4$

$d < 2$

$d = 1$

$\times 12$
12
144

$a^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$96|4$
24
16

$D = 144 - 48 = 98 \; 96$

$96 = 4 \cdot$
96

16
$\times 6$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$D = 144 - 4 \cdot 36$

$(a_1 + 6)^2 > 0$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 144 - 48 = 96$

$a_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{2}$

21101437 (U384237 M1301696)

(2) ! AB - диаметр. Черновик

$\angle ACB \perp$ оси $\cancel{x^2-2x}$

$\triangle ACB$ - диаметр но

$CA = \sqrt{47}$

$AD = \sqrt{62}$

$AC = BC = CA$

Т.к.: AB - лежит в плоскости

$\cancel{t^2+ax+b}$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2 \le 10$$

$$a^2+b^2 \le 10$$

S-?

$$a^2+b^2 \le -6a-2b$$

$$\cancel{a^2+}\ a(a+6)+b(b+2) \le 0$$

$$x^2-2ax+y^2-2yb \le 0$$

$$x^2+y^2 \le 2ax+2yb$$

$$\cancel{x^2+y^2}$$

$$x^2+y^2 \le 2(ax+yb)$$

$$\frac{x^2+y^2}{2} \le ax+yb$$

$$\cancel{\frac{x^2+y^2}{2} \ge xy}$$

$$\cancel{xy \le ax+yb}$$

$$\cancel{ax-xy+yb \ge 0}$$

$$\cancel{\frac{a}{y}+\frac{b}{x} \ge 1}$$

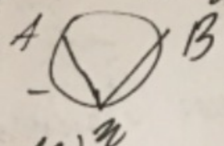
[illegible]

Т.к. $\triangle CDA = \triangle CDB$, то $AB \perp CD$, т.к. $CD \parallel$ оси, то $AB \perp$ оси;

$AB \in ABH$; $ABH \perp$ оси; H - проекция т. D на неё.

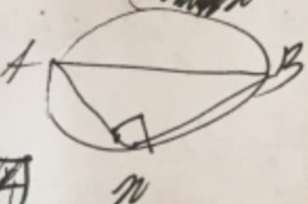
Имеем отношение чем больше $\frac{AB}{d}$ тем меньше d.

Т.к нам нужен d min, то



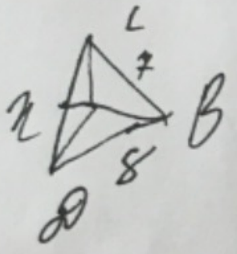
$\left(\frac{AB}{d_{max}}\right) = 1$, когда $AB = d$.

Т.е. AB- диаметр



, тогда т.к. $K = H$,

то $AH = BH$, т.к. $\angle AHB = 90°$, а AB- диам, то $AH = BH = 7\sqrt{2}$



по т. Пифагора $(HB)^2 - (BD)^2 = -(HD)^2$

$HD = 2\sqrt{14}$

Аналогично, $CH = \sqrt{41}$ $\quad CD^2 = CH^2 - 132^2$

$CD = HD + CH = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

$CH^2 = CB^2 - BH^2$

$49 - 8$

$\perp \triangle$

Чистовик   лист 1

№ 1

$a_{18} = a_1 + 17d$; $S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9 =$

$a_5 = a_1 + 4d$; $= a_1 + a_1 + \dots a_1 + d + 2d + \dots =$

$= 9a_1 + 36d$

Тогда получим (1) нер-во

$(a_1 + 17d)(a_1 + 4d) > 9a_1 + 36d - 4$

Аналогично получим (2) нер-во

$(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60$

$$\begin{cases} (a_1 + 17d)(a_1 + 4d) > 9a_1 + 36d - 4 \quad (1) \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60 \quad (2) \end{cases}$$

Из (1)

$a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4$

Из (2)

$a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60$

Вычтем из (2) - (1)

$40d^2 < 64$

$d^2 < \frac{64}{40}$. Т.к. $a_1; a_2 \dots a_n$ - целые, то и d - целое.

Ст-по d т.к. прогрессия возрастающая, то $d > 0$ и значит единственное подходящее целое d это $d = 1$

$d = 1$.

Тогда система преобразуется

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1 - верно всегда, т.к. $(a_1+6)^2 > 0$, кроме $a = -6$)

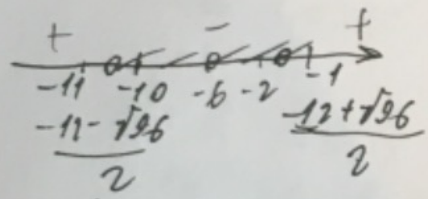
21101437 (U384237 M1301696)

№1 продолжение   Чистовик   лист 2

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 96 = 16 \cdot 6$; $9 < \sqrt{96} < 10$

$a_{1,2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{96}}{2}$; т.к. a_1 - целое, то



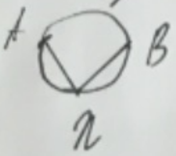
Видим, что при целых a_1;

$a_1 = -10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2.$

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2.$

Чугдвин (V2) Лист 3

Рассмотрим $\triangle CDA$ и $\triangle CDB$; Т.к. они равны, то $AB \perp CD$.
Но CD должно быть $\parallel$ оси цилиндра. А значит и $AB \perp$ оси цилиндра. $AB \in$ пл. ABK; K-пр. C и D на пл. ABK.

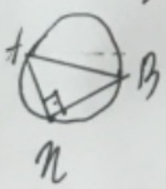


Тогда $ABK \perp$ оси цилиндра.

Отсюда получим, что чем больше $\frac{AB}{d}$, тем меньше d.

Т.к. нам нужен d_{min}, то $\frac{AB}{d}_{max}$ должно $=1$, отсюда $AB = d$

Т.е. AB - диаметр.



Тогда, т.к. $AC = BC$, то и их проекции на (ABK), тоже равны.
Значит $AK = BK$. Из $\triangle AKB$ ($\angle AKB = 90^\circ$) и AB - диаметр $AB=4$; получим $AK = BK = 2\sqrt{2}$

Тогда из (рис 3.)

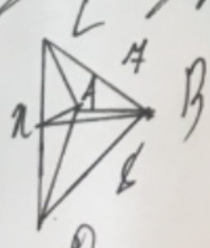


рис 3.1

По теореме Пифагора, получим, из $\triangle BKD$

$$|KD|^2 = |BD|^2 - |KB|^2 =$$
$$= 64 - 8 = 56$$
$$KD^2 = 56$$
$$KD = 2\sqrt{14}$$

Аналогично из $\triangle CKB$; получим

$CK^2 = CB^2 - BK^2 = 41$;
$CK = \sqrt{41}$; Т.к. $CD = CK + KD$, то $CD = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

№3) Чистовик   лист 4

Есть 2 случая

$a^2+b^2 \leq 10$ и $a^2+b^2 \leq -6a-2b$

$-6a-2b \geq 10$ $\quad$ $-6a-2b \leq 10$

$a^2+b^2=10$ (1)

$a^2+b^2-6a-2b=0$ (2)

$-6a-2b=10$ (3)

Рассмотрим ГМТ

ГМТ (1) - окр. с центром

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101437**

ID профиля: **384237**

Вариант 24

$a = xyn$

$b = yzn$

$c = nzn$

НОД $n = 11\cdot 3$ — 18 четыре

$xyzn = $ НОК $= 3^{19}\cdot 11^{15}$

$xyz = 3^{18}\cdot 11^{14}$

$abc = x^2y^2z^2n^3$ $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{7}$

? 18 24

$x+y+z=18$

$\frac{18\cdot 17\cdot 16}{14\cdot 13\cdot 12}$

$\frac{5}{18}\cdot\frac{\cancel{7}}{7}$ 126 $+18$ 206 $\times 16$ 1236 $+2060$ 32 4436

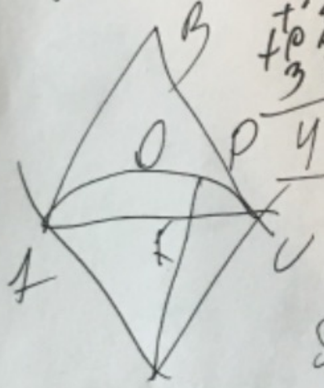
$\frac{14}{13}$ 42 $\frac{3}{6}$ $\frac{6}{7}$

13

34 $\frac{4}{7}$ $\frac{23}{34}$

$\frac{S_{AOK}}{S_{CPK}} = \frac{8}{7}$ $\frac{20}{34}$ $\frac{2}{34}$

$\frac{10}{17}$



$\operatorname{arctg} = \frac{3}{5}$

$S - \frac{9}{34}$

34 $\times 4$ 136

$34\cdot 4$ $23\cdot 7$ $\frac{2}{23}$ $\frac{\ }{7}$ 1

21101437 (U384237 M1301697)

$a = x_1 n$

№2 Дана числа

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

$\left(\frac{x}{7}\right)^2 - \frac{9}{49}$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-1-x)$

$\frac{x}{7}+7=(x+1)^2$

$\log_{\frac{x}{7}+7}(29-x) = 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-1-x)$

$\left(\frac{x}{7}+7\right)^2 = 29-x$

-7

$\log_{\frac{x}{7}+7}(29-x) = \log_{\frac{x}{7}+7}(-x-x)$

147
-133
14

-147
$+133$
14
-380
-130

$1 = \log_{\frac{x}{7}+7}(29-x)\cdot\log_{\frac{x}{7}+7}(-1-x)$

$\frac{1}{2}\log_{x+1}29-x = \log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)\,(2+\log_{\frac{x}{7}}$

8
49
$\times 9$
441
-810

$+6$
$+9$

$\log_{29-x}-(x+1)$

$\frac{ab}{2} = \frac{1}{l}$

49
$\times 3$
147

$(147)^2$

$ab = \frac{2}{l}$

$\sqrt{361}$

21
21
21

$80\cdot 49$
49
00
392
3920

$y(y+1)=\frac{2}{y}$

$D=$

$a=b$

$a^2=\frac{2}{l}$

$(49\cdot 3)^2 - 80\cdot 49$

$y^2=\frac{2}{y+1}$

$y^2(y+1)=2$

$19(49\cdot 9-80) =$

$=4\cdot 491$

133

$(y+1)y^2=2$

49
$\times 19$
171
$+19$
361

$y+1$
431

$x^2+2x+1=29-x$

$x^2+3x-28=0$

$D=9+4\cdot 28$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm 11}{2}$

28
$\times 4$
112
$+9$
121

$\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=4 \end{array}\right.$

$y^3+y^2=2$

$y=1$ и 19^2

$7\cdot 19$

$29-x=\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$29-x=\frac{x^2}{49}+49+2x$

$29-x=\frac{x}{7}+7$

$22-x=\frac{x}{7}$

$22\cdot 7-7x=x$

$22\cdot 7=8x$

$x=\frac{22}{7}\cdot 8$

$\frac{x^2}{49}+3x+20=0$

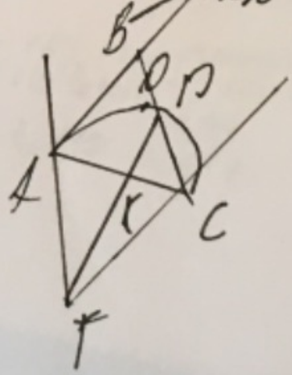
$x^2+49\cdot 3+20\cdot 49=0$

$x_{1,2}=\frac{-49\cdot 3\pm 133}{2}$

21101437 (U384237 M1301697)

Чистовик №3 Лист 3

а) Т.к. $\angle ABC = x$, то
$\angle AOC = 2x$
И-то AT и CT - касательные ($OA \perp AT$; $OC \perp TC$),
тогда $AOCT$ - четырехугольник
$\angle ATC = 180 - 2x$
Точки $O; A; P; C; T$ лежат на окружности.
Значит
$\angle TPC = \angle TAC = x$; $TP \parallel AB$
$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{8}{7} = \frac{BO}{PC}$ Т.к. $= \frac{AK}{KC}$ $\triangle PKC$ - подобен $\triangle BAC$



И-то $k = \frac{7}{15}$
$S_{ABC} = S_{CPK} \cdot \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{450}{7}$

а) Ответ: $\frac{450}{7}$

б) ~~$AC = \frac{7}{k} \cdot \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$~~
Т.к. $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$; то $\operatorname{tg} ABC = \frac{3}{5}$;
И-то
$AC = S_{ABC} \cdot \frac{3}{5} = \frac{450 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{90 \cdot 3}{7} = \frac{270}{7}$

Ответ: $\frac{270}{7}$

21101437 (U384237 M1301697)

Чистовик Лист 2

№1

Пусть:

$a = x \cdot y \cdot n$ Тогда: НОД$(a;b;c) = n = 11 \cdot 3$

$b = y \cdot z \cdot n$ НОК$(a;b;c) = xyz \cdot n = 3^{19} \cdot 11^{15}$

$c = x \cdot z \cdot n$

Ч-но $xyz = 3^{18} \cdot 11^{14}$

Осталось найти кол-во вариантов троек
А это различные варианты троек чисел 3 и 11,
так, чтобы их сумма давала соответственно
18 и 14

А их кол-во будет равно сумма всех возможных чисел от 1 до 18. (Сумма всех от 1 до 19) (учитывая)

Если преобразовать, получим Т.е. $\sum_{t_1=18}((18-t_1+1)) \cdot \sum_{t_2=14}(14-t_2+1) =$ $t_1 \le 18$ $t_2 \le 14$

$= (19+18+\ldots+1)(15+14+\ldots+13+\ldots+1) =$

$= (19 \cdot 9)(15 \cdot 7) = 17\,995$

Ответ: 17 995

Чистовик Лист 1
№ 2

Пусть $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=a$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)=c$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=b$

Тогда

$a=2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ (1) Тогда $ab=4\log_{29-x}$

$b=2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$ (2) $=\frac{2}{\log_{\frac{x}{7}+7}(29-x)}\cdot 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=$

$\frac{ab}{4}=\log_{29-x}(-x-1)$ $=4\log_{29-x}(-x-1)$

$\frac{ab}{2}=\log_{29-x}(-(x+1))^2=\frac{1}{c}$; $ab=\frac{2}{c}$; $abc=2$

$\frac{ab}{2}=\frac{1}{c}$.

Т.к. из условия мы знаем, что два числа равны, а третье на 1 больше, то мы имеем три числа y; y; $y+1$,

тогда $\frac{y^2}{2}=\frac{1}{y+1}$; $y^2(y+1)=2$; $y^3+y^2=2$. Т.к.

оче-но

$y=1$.

Тогда имеем 3 варианта

(I) $\begin{cases}(\sqrt{29-x})^2=\frac{x}{7}+7 \ (1)\\ (x+1)^2=(29-x) \ (2)\\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}=-(x+1) \ (3)\end{cases}$

(1): $29-x=\frac{x}{7}+7$, $\frac{8}{7}x=22$, $x=\frac{22\cdot 7}{8}$

(2) $x^2+3x-28=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-7\\x=4\end{array}\right.$ x - не совпадают, решений нет

$x\in\varnothing$

(II) $\begin{cases}\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7 \ (4)\\ (x+1)^4=(29-x) \ (5)\\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}=-(x+1) \ (6)\end{cases}$

Из (6): $\frac{x}{7}+7=(x+1)^2$; $\left(\frac{x}{7}+7\right)^2=(x+1)^4$

Из (4): $(x+1)^4=29-x$; $29-x=\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$x^2+49\cdot 3+20\cdot 49=0$ ... $\sqrt{D}=183$

$x_{1,2}=\frac{-49\cdot 3\pm 183}{2}$ $\left[\begin{array}{l}x=-130\\x=-4\end{array}\right.$ $x=-130$ - не подходит

(III) $\begin{cases}\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7 \ (7)\\ (x+1)^2=29-x \ (8)\\ \left(\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right)^2=-(x+1) \ (9)\end{cases}$

Из (9) $\frac{x}{7}+7=-x-1$;

$\frac{8}{7}x=-8$

$x=-7$

Ответ: -7

21101437 (U384237 M1301697)