Часть 1

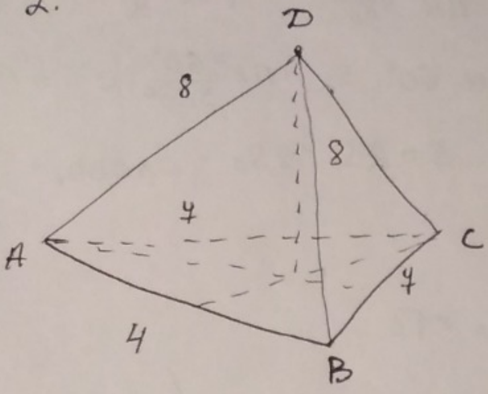
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

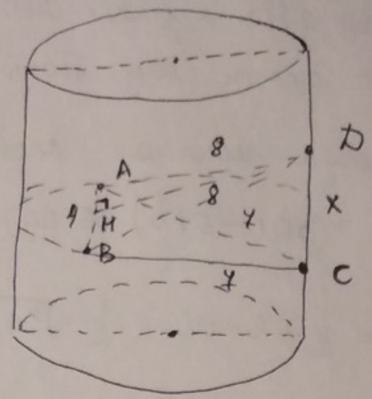
Шифр: **21101433**

ID профиля: **343200**

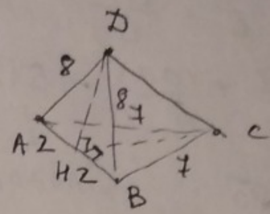
Вариант 24

2. чистовик 4





радиус будет найден,
если $\angle DHC = 90^\circ$



$DH^2 = 64 - 4 = 60 \Rightarrow DH = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$; $CH^2 = 49 - 4 = 45 \Rightarrow CH = 3\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD^2 = CH^2 + DH^2 = 60 + 45 = 105 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow CD = \sqrt{105}$

ОТВЕТ: $\sqrt{105}$.

21101433 (U343200 M1297203)

ЧИСТОВИК (3)

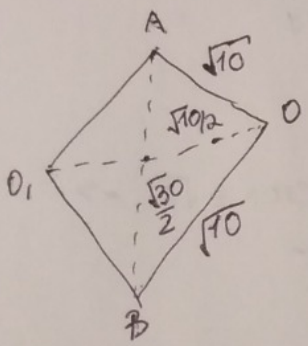
площадь сектора окр-ти рад $2\sqrt{10}$ и углом $120°$ $S_1 = \pi R^2 \cdot \frac{120°}{360°} = \pi \cdot 40 \cdot \frac{1}{3} =$

$= \frac{40\pi}{3}$; площадь сектора окр-ти рад. $\sqrt{10}$ и углом $60°$ $S_2 = \pi r^2 \frac{60°}{360°} =$

$= \pi \cdot 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10\pi}{6}$, тогда искомая площадь $S = 2S_1 + 2S_2 - S_{AOBO_1} =$

$= 2\left(\frac{40\pi}{3} + \frac{10\pi}{6}\right) - 5\sqrt{3} = (30\pi - 5\sqrt{3})$ кв ед.

$S_{AOBO_1} = \frac{1}{2} AB \cdot OO_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{3}$



ОТВЕТ: $S = (30\pi - 5\sqrt{3})$ кв ед

ЧИСТОВИК $a_1 = a$ - ? 1

1. $S = a_1 + \dots + a_9 = 9a + \frac{8 \cdot 9}{2} d = 9d + 36d$, a - первый член, d - разница прогрессии

$$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S - 4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+4d)(a+17d) > 9a + 36d - 4 \\ (a+9d)(a+12d) < 9a + 36d + 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 21ad + 68d^2 - 9a - 36d + 4 > 0 \\ a^2 + 21ad + 108d^2 - 9a - 36d - 60 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 21ad + 68d^2 - 9a - 36d + 4 > 0 \\ 0 > a^2 + 21ad + 108d^2 - 9a - 36d - 60 \end{cases}$$

сложим два нер-ва с одинаковым знаком:

$$a^2 + 21ad + 68d^2 - 9a - 36d + 4 > a^2 + 21ad + 108d^2 - 9a - 36d - 60$$

$$\Leftrightarrow 40d^2 < 64 \Rightarrow d^2 < 1{,}6 = 0{,}16 \cdot 10 \Rightarrow |d| < 0{,}4 \cdot \sqrt{10}$$

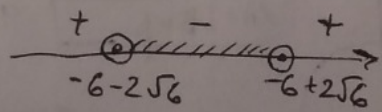
d - целое, т.к. прогрессия состоит из целых чисел и разница между целыми числами - целая, $d \neq 0$, т.к. прогрессия возрастает $\Rightarrow d = 1$, т.к. $2^2 > 1{,}6$ (отриц. не подходит, т.к. прогр. возр.). Подставим это значение:

$$\begin{cases} a^2 + 21a + 68 - 9a - 36 + 4 > 0 \\ a^2 + 21a + 108 - 9a - 36 - 60 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 12a + 36 > 0 \\ a^2 + 12a + 12 < 0 \end{cases}$$

$D = 144 - 4 \cdot 12 = 12 \cdot 8 = 3 \cdot 2^5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+6)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -6 \\ (a + 6 + 2\sqrt{6})(a + 6 - 2\sqrt{6}) < 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow a = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6}$



$a \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6})$

$$4 < 2\sqrt{6} < 5 \Rightarrow \begin{cases} -6 - 2\sqrt{6} > -11 \\ -6 - 2\sqrt{6} < -10 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -6 + 2\sqrt{6} > -2 \\ -6 + 2\sqrt{6} < -1 \end{cases} \Rightarrow a \in [-10; -2]$$

кроме -6

ОТВЕТ: $-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2$

21101433 (U343200 M1297203)

3. Чистовик 2

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)\end{cases}$ внутр. часть окр-ти и сама окр-ть - окр-ть с центром (a,b) и радиусом $\sqrt{10}$

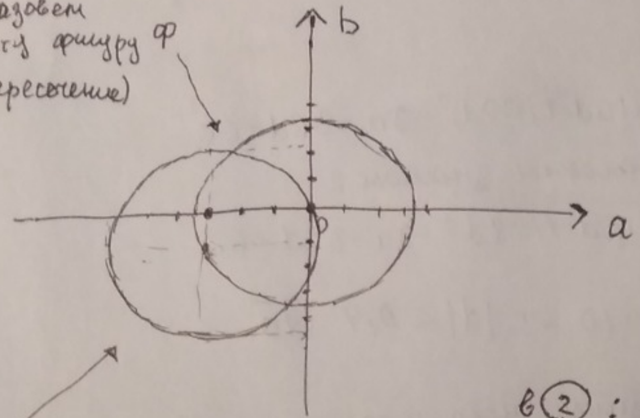
$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2\le -6a-2b \\ a^2+b^2\le 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10 \\ a^2+b^2\le 10\end{cases}$

$(a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10 \Rightarrow (a+3)^2+(b+1)^2\le 10)$

- две окр-ти на пл-ти (aOb) с центрами $(-3;-1)$ и $(0;0)$ и рад $\sqrt{10}$ (и внутр. части)

$\sqrt{10}>3$

назовем эту фигуру Ф (пересечение)



найдем точки пересечения:

$\begin{cases}a^2+6a+b^2+2b=0 & (1) \\ a^2+b^2-10=0 & (2)\end{cases}$ вычтем:

$6a+2b+10=0$

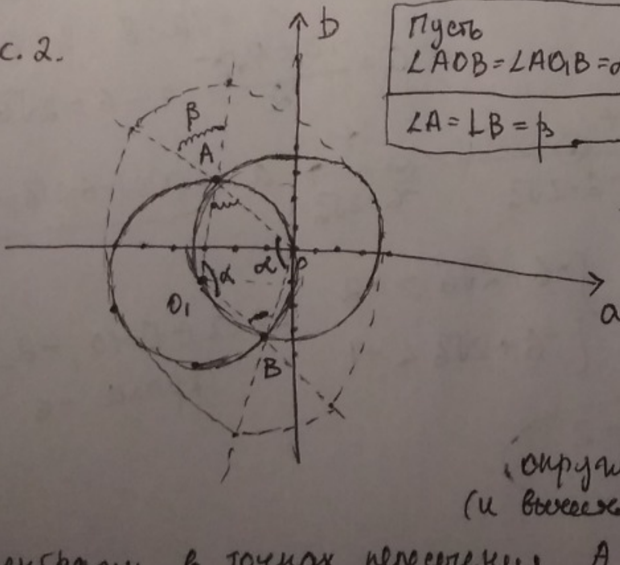
$3a+b=-5 \Rightarrow b=-3a-5$, подставим

в (2): $a^2+(3a+5)^2-10=a^2+9a^2+30a+25-10=$
$=10a^2+30a+15=0 \Rightarrow 2a^2+6a+3=0$

$D=36-24=12 \Rightarrow a=\frac{-6\pm 2\sqrt{3}}{4}=-1{,}5\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $b=\frac{-1\mp 3\sqrt{3}}{2}$

подходящие a и b - это коор-ты точек области пересечения окружностей на рис. включая границы. Искомая площадь фигуры M - это площадь фигуры, состоящей из точек, удаленных от фигуры Ф не дальше, чем на $\sqrt{10}$.

рис. 2.



Пусть $\angle AOB=\angle AO_1B=\alpha$

$\angle A=\angle B=\beta$

Эта фигура изобр. на рис. 2
Она состоит из двух одинаковых частей секторов окружностей с радиусами $2\sqrt{10}$ и центрами в $(0;0)$ и $(-3;-1)$ и двух частей секторов окружностей секторов окру-тей с радиусами $\sqrt{10}$ (и вычесть ромб $AOBO_1$ т.к. его площадь посчитано 2 раза) и центрами в точках пересечения A и B.

$A\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+3\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2};\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}\right)$, тогда $AB^2=(\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2=30$

$(AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2)$, по Т. косинусов: $\cos\alpha=\frac{AO^2+BO^2-AB^2}{2\cdot AO\cdot OB}=$
$=\frac{10+10-30}{2\cdot 10}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=120^\circ$, тогда $\beta=\frac{360-2\alpha}{2}=60^\circ$

21101433 (U343200 M1297203)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101433**

ID профиля: **343200**

Вариант 24

Чистовик (3)

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

$\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7$

$29-x=\frac{x^2}{49}+2x+49$

$\frac{x^2}{49}+3x+20=0$

$D=9-\frac{4\cdot 20}{49}=\frac{9\cdot 49-80}{49}=$

$=\frac{361}{49}=\left(\frac{19}{7}\right)^2$

$x=\frac{-\frac{21}{7}\pm\frac{19}{7}}{\frac{2}{49}}=\frac{(-21\pm 19)7}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=-140 \text{ – не в обл. опред.}\end{array}\right.$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$

$x^2+2x+1=29-x$

$x^2+3x-28=0$

$D=9+4\cdot 28=121$

$x=\frac{-3\pm 11}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=4 \text{ – не в области определения}\end{array}\right.$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}=-x-1$

$\frac{x}{7}+7=x^2+2x+1$

$x^2+\frac{13}{7}x-6=0$

$7x^2+13x-42=0$

$D=169+28\cdot 42=333$

$x=\frac{-13\pm\sqrt{333}}{14}$

$18<\sqrt{333}<19$

$\Rightarrow$ больший корень >0 не подходит

меньший не подходит, если его подставить

Если проверить для -7 условие верно: $\left\{\begin{array}{l}\log_6 6=1 \\ \log_{36}36=1 \\ \log_{\sqrt{6}}6=2\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ ОТВЕТ: -7

5. $\underset{1}{\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)}, \underset{2}{\log_{(x+1)^2}(29-x)}, \underset{3}{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)}$ чистовик 2

условие: $\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ (x+1)^2\neq 0\ (>0) \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ -x-1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \\ x\neq -1 \\ x\neq -42 \\ x<-1 \end{cases}$

-49 -42 -2 -1 0 28 29 x

$\Rightarrow x\in(-49;-42);(-42;-2);(-2;-1)$

есть три случая
I $1 = 2 = 3 - 1$
II $2 = 3 = 1 - 1$
III $1 = 3 = 2 - 1$

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$$

$$\log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$$

~~I $2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x) = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1) - 1$~~

~~$4\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(-x-1)}(29-x) = \frac{1}{\log_{(29-x)}(-x-1)} \Rightarrow \log_{(29-x)}(-x-1)$.~~

~~$\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{4}$~~

~~$x=-7$~~

используя свойства; $\boxed{\log_a b\cdot\log_c d = \log_a d\cdot\log_c b}$ можно заменить, что произведение трёх данных чисел равно двум, пусть одно из меньших чисел равно t, тогда $t^2(t+1)=2 \Rightarrow t^3+t^2-2=0$

$(t-1)(t^2+2t+2)=0 \quad D=4-8<0$ решений нет $\Rightarrow t=1 \Rightarrow$ два из этих чисел равна 1 и одно 2.

$\frac{-13\pm 18{,}5}{14}$ $\quad \frac{5{,}5}{4}$

21101433 (U343200 M1297204)

ЧИСТОВИК 1

4. $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 33 = 3^1 \cdot 11^1 \\ НОК(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$

$\begin{cases} a = 3^{a_1} \cdot 11^{a_2} \\ b = 3^{b_1} \cdot 11^{b_2} \\ c = 3^{c_1} \cdot 11^{c_2} \end{cases}$ тогда $\underset{(a,b,c)}{НОД} = 3^{\min(a_1,b_1,c_1)} \cdot 11^{\min(a_2,b_2,c_2)} = 3^1 \cdot 11^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \min(a_1,b_1,c_1) = 1 \\ \min(a_2,b_2,c_2) = 1 \end{cases}$ (1)

$\underset{(a,b,c)}{НОК} = 3^{\max(a_1,b_1,c_1)} \cdot 11^{\max(a_2,b_2,c_2)} = 3^{19} \cdot 11^{15} \Rightarrow \begin{cases} \max(a_1,b_1,c_1) = 19 \\ \max(a_2,b_2,c_2) = 15 \end{cases}$ (2)

из (1) и (2) следует, что хотя бы одно из чисел равно минимальному значению (1) и хотя бы одно максимальному (19 и 15), а третье принимает любое значение между ними включительно. Максимум и минимум в каждой тройке можно выбрать 6 способами

max	a_1	a_1	b_1	b_1	c_1	c_1
min	b_1	c_1	a_1	c_1	a_1	b_1

(для a_2, b_2, c_2 аналогич.), а среднее число определяется само собой. Далее значение для среднего числа можно выбрать 19 и 15 способами соответственно. Набор $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ определяет числа a, b и c однозначно. (~~Но из-за того, что числа a, b и c находятся в системе в одинаковом положении, то каждую тройку (a,b,c) мы посчитали 6 раз.~~) Тогда кол-во таких троек $N = \underbrace{(6 \cdot 19)}_{1\ тройка}\underbrace{(6 \cdot 15)}_{2\ тройка} = 10260$ ~~способов~~

ОТВЕТ: 10260.