Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101411**

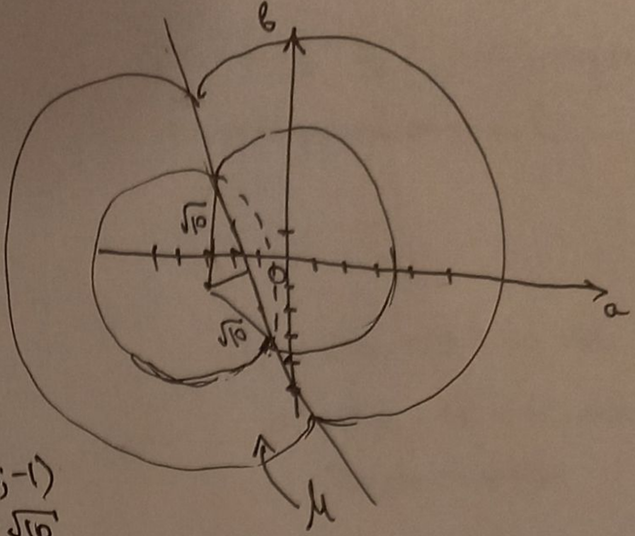
ID профиля: **370784**

Вариант 24

Черновик №1.

(a,b):

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10).\end{cases}$$



1) $10<-6a-2b$ $a^2+b^2\le 10$ - окружность.

2) $10\ge -6a-2b$

$b\ge -3a-5$ l_1

$a^2+b^2\le -6a-2b$

$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$ - окр. с ц. $(-3;-1)$ и $r=\sqrt{10}$

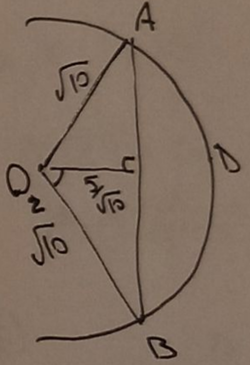
$b=\frac{a}{3}$ - l_2

$\frac{1}{3}\cdot(-3)+\cancel{\ldots}(-1)(1)=0 \Leftrightarrow l_1\perp l_2$

16·6

l_1: $3a+b+5=0$

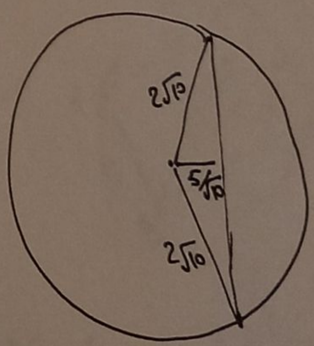
$\rho((-3;-1);l_1)=\left|\frac{3\cdot(-3)-1+5}{\sqrt{9+1}}\right|=\frac{5}{\sqrt{10}}<\sqrt{10}$



$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=60^\circ\Rightarrow\alpha=120^\circ$

$S_{O_2ADB}=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2=\pi\cdot\frac{10}{3}$

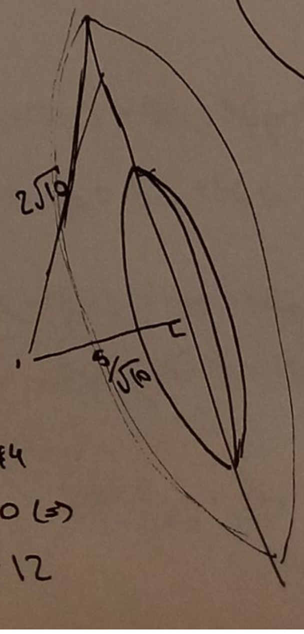
$S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sin 120^\circ=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

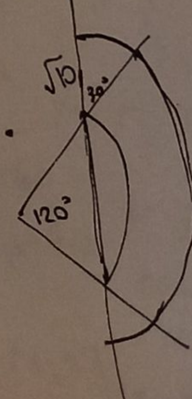


$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot2\sqrt{10}}=\frac{1}{4}$

$\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$

$S_D=\frac{\arccos(-\frac{7}{8})}{2\pi}\cdot\pi R^2$





$\frac{x^4}{4(x^2-4)}$ $R^{2\prime}=\frac{4x^3(x^2-4)-2x\cdot x^4}{16(x^2-4)^2}=0$

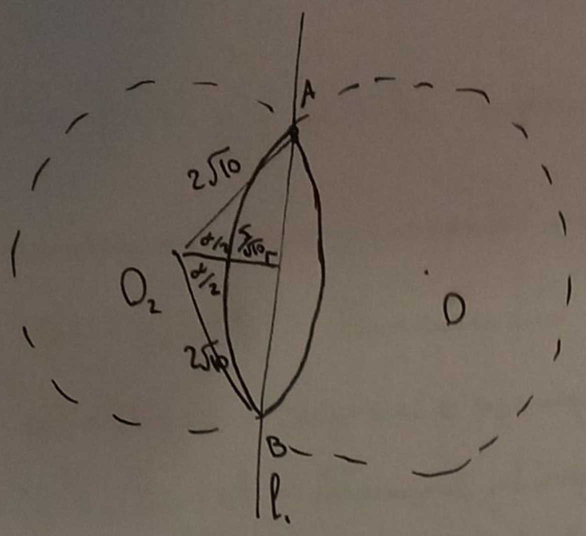
$x^2\ne 4$

$\Leftrightarrow 4x^2-12-2x^2=0\Leftrightarrow$

$2x^2=12$

Черновик 52.

(3)



$S_м = 2(S_D - S_\Delta)$, т.к. фигура симметрична отн-но l_1

$a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -6$

~~$D = 144 - 4 \cdot 36 =$~~

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 144 - 48 = 96 = 4 \cdot 24 = 16 \cdot 6$

$a_1 \in \left(\frac{-12-4\sqrt6}{2}; \frac{-12+4\sqrt6}{2}\right)$

$a_1 \in (-6-2\sqrt6; -6+2\sqrt6)$

$(2\sqrt6)^2 = 24$

$4^2 < (2\sqrt6)^2 < 5^2$

1) $l_1: \ 3x + y + 5 = 0$

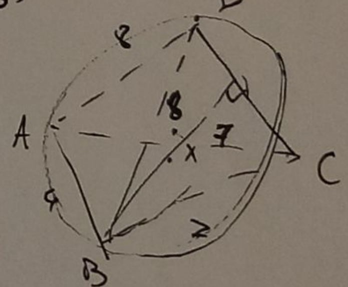
$\rho(O_2; l_1) = \left|\frac{3\cdot(-3) - 1 + 5}{\sqrt{3^2+1^2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{10}}$

2) $\hat{AOB} = \alpha$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac14$

$\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{4^2} - 1 = \frac18 - 1 = -\frac78$

$S_D = S_0 \cdot \frac{S_D}{S_0} = \pi R^2 \cdot \frac{\arccos(-\frac78)}{2\pi} = 20\arccos(-\frac78)$



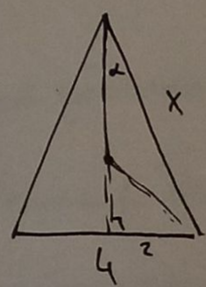
3) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$S = 9a_1 + \sum_1^8 p = 9a_1 + 36p$

$a_5 = a_1 + 4p$

$a_5 a_{18} > S - 4 \Leftrightarrow (a_1 + 4p)(a_1 + 17p) > 9a_1 + 36p - 4$

$a_1^2 + 68p^2 + 21a_1p > 9a_1 + 36p - 4$



$a_{10}a_{13} < S + 60 \Leftrightarrow (a_1 + 9p)(a_1 + 12p) > 9a_1 + 36p + 60$

$a_1^2 + 108p^2 + 21a_1p < 9a_1 + 36p + 60$

$40p^2 < 64$

$|p| < \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \in [1; 2]$

$\Rightarrow p = 1$

$r = \frac{4}{2\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{2}{x}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac1x\sqrt{x^2-4}$

~~$\sin 2\alpha =$~~

$r = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}$

Черновик №1.

(3.) $M = \{(x;y) \mid \exists (a;b) \ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \ \& \ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;10)\}$

Выясним, какое множество точек задает второе ур-е.

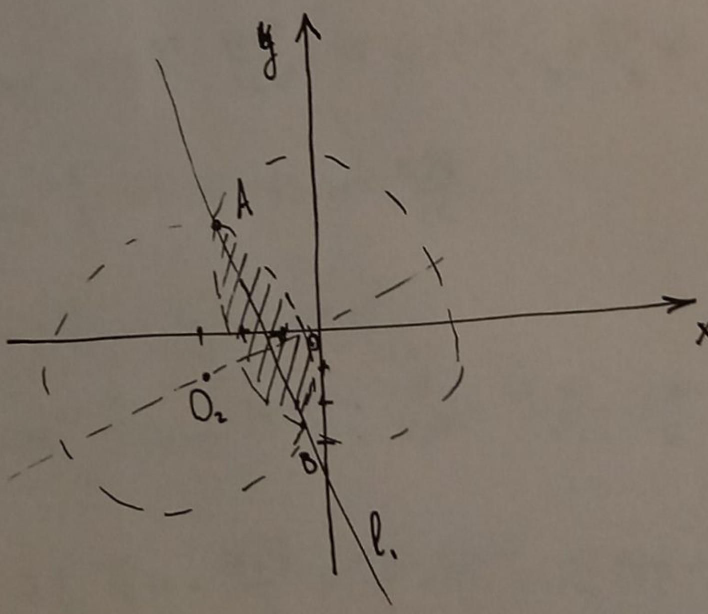
1) $10 < -6a-2b$ – область под прямой $y=-3x-5$

$a^2+b^2 \le 10$ – окр-ть с центром в $(0;0)$ и радиусом $r=\sqrt{10}$

2) $10 \ge -6a-2b$ – область над прямой $l_1: y=-3x-5$

$a^2+b^2 \le -6a-2b \Leftrightarrow (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$ – окружность с центром в $(-3;-1)$ и радиусом $r=\sqrt{10}$

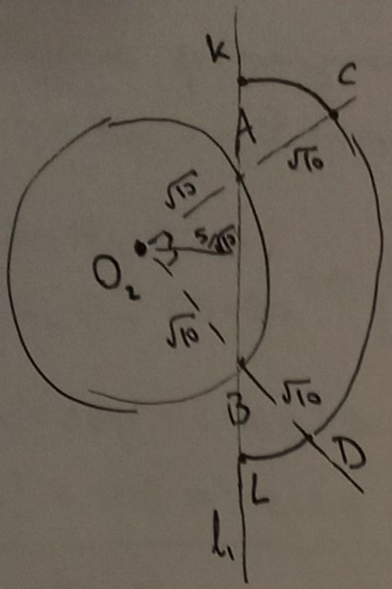
Т.е. ур-е $a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;10)$ задает пересечение двух окружностей (потому что прямая $l_2: y=\frac{1}{3}x$, соединяющая центры окружностей, перпендикулярна l_1 ($\frac{1}{3}\cdot(-3)+(-1)\cdot(-1)=0 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$)).



Множество M задает объединение окружностей радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в точках, расположенных в заштрихованной области.

~~[illegible]~~. Найдем площадь этой фигуры.

Чистовик №2.



$$\frac{S_M}{2} = S_{\triangle O_2CD} - S_{O_2AB} + S_{\triangle KAC} + S_{\triangle BLD}$$

1) $l_1:\ 3x+y+5=0$

$$\rho(l_1; O_2) = \left| \frac{3\cdot(-3)-1+5}{\sqrt{3^2+1^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

2) $A\hat{O_2}B \leftrightarrows \alpha$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$$S_{\triangle O_2CD} = \pi R^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = \pi\cdot(2\sqrt{10})^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{40}{3}\pi$$

$$S_{O_2AB} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

3) $K\hat{A}C = L\hat{B}D = O_2\hat{A}B = 30^\circ$

$$S_{\triangle KAC} = S_{\triangle LBD} = \pi\cdot r^2\cdot\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\cdot 10}{12} = \frac{5\pi}{6}$$

4) $S_M = 2\left(\frac{40}{3}\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(15\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) = 30\pi - 5\sqrt{3}$

Ответ: $30\pi - 5\sqrt{3}$.

Чистовик 5 з.

1. Пусть p - разность прогрессии.

$$S = 9a_1 + p\sum_{i=1}^{8} i = 9a_1 + 36p$$

$$\begin{cases} a_5 a_{18} > S-4 \\ a_{10} a_{13} < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+4p)(a_1+17p) > S-4 \\ (a_1+9p)(a_1+12p) < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 68p^2 + 21a_1p > 9a_1 + 36p - 4 \\ - \\ a_1^2 + 108p^2 + 21a_1p < 9a_1 + 36p + 60 \end{cases}$$

$$-40p^2 > -64 \Rightarrow |p| < \underbrace{\frac{4}{\sqrt{10}}}_{>1} < 2$$

Прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел, следовательно её разность целая и положительная. Т.е. нам подходит только $p=1$.

1) $a_1^2 + 68\cdot 1 + 21a_1\cdot 1 > 9a_1 + 36\cdot 1 - 4 \Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \Leftrightarrow (a_1+6)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -6$

2) $a_1^2 + 108\cdot 1 + 21a_1\cdot 1 > 9a_1 + 36\cdot 1 + 60 \Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \Leftrightarrow a_1 \in (-6-2\sqrt{6};$
$; -6+2\sqrt{6})$

$$4^2 < (2\sqrt{6})^2 < 5^2 \Rightarrow 4 < 2\sqrt{6} < 5 \Rightarrow \begin{cases} -11 < -6-2\sqrt{6} < -10 \\ -2 < -6+2\sqrt{6} < -1 \end{cases}$$

С учетом обоих условий, $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$. Причем все эти числа подходят, т.к. они удовлетворяют обоим условиям.

<u>Ответ:</u> $\{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$.

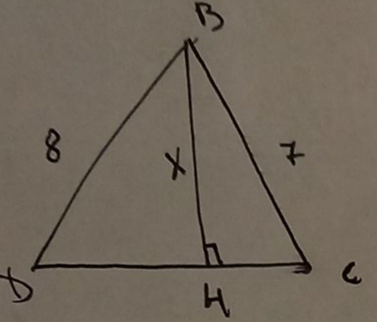
Чистовик $\sqrt{5}$

$$\ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ - неподх.} \\ x^2 \neq 4 \\ 2x^2 - 8 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 8$$

Нетрудно убедиться, что $x = \sqrt{8}$ - действительно точка минимума функции $R(x)$.

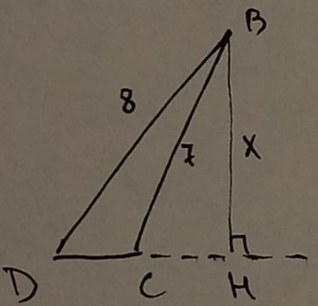
Теперь найдем значения CD для этого x.

1)



$$CD = DH + CH = \sqrt{64 - x^2} + \sqrt{49 - x^2} = \sqrt{56} - \sqrt{41}$$

2)

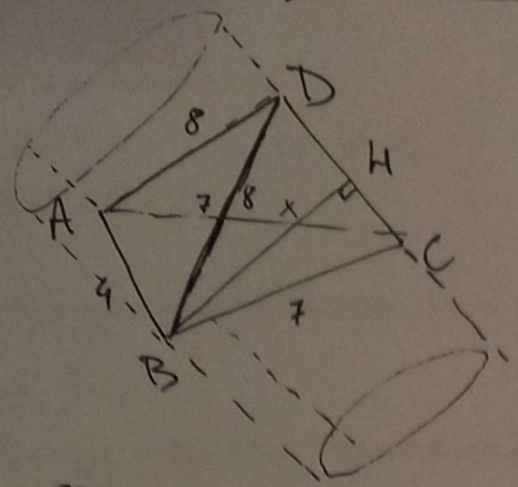


$$CD = DH - CH = \sqrt{64 - x^2} - \sqrt{49 - x^2} = 2\sqrt{14} - \sqrt{41}$$

Ответ: $\{2\sqrt{14} - \sqrt{41};\ 2\sqrt{14} + \sqrt{41}\}$.

~~[illegible]~~ Чистовик 5 4.

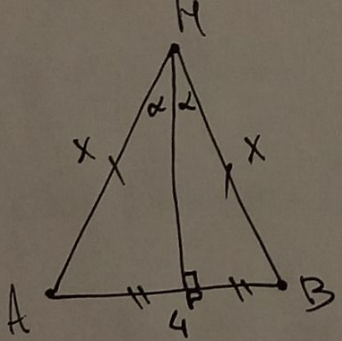
(2.)



CD параллельно оси цилиндра, и точки C и D лежат на его боковой поверхности, значит [CD] лежит на образующей цилиндра.

Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью, содержащей [AB] и перпендикулярной оси цилиндра. Она пересечет CD в точке H, $BH \perp CD$, $AH \perp CD$, т.к. $CD \parallel$ оси $\perp$ плоскости.

Кроме того, AH и BH равны как высоты в равных треугольниках. Т.о., ΔABH равнобедренный и вписан в окр-ть, радиус которой равен радиусу цилиндра.



$$R = \frac{4}{2\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}, \text{ где } \alpha = \widehat{BHP} = \widehat{AHP}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{x}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-4}$$

$$R(x) = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}$$

$$R^2(x) = \frac{x^4}{4(x^2-4)}$$

$$(R^2)'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3(4x^2-16) - 8x\cdot x^4}{16(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow \ldots$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101411**

ID профиля: **370784**

Вариант 24

Черновик 51

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=33 \\ \text{НОК}(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

$\frac{256}{9\cdot 34}+1=$

$=\frac{128}{9\cdot 17}+1=\frac{128+153}{153}=$

$=\frac{281}{153}$

$a=33\cdot x$

$b=33\cdot y$

$c=33\cdot z$

идет здесь 3^{18} и 11^{14}

1) $a=3^{19}\cdot 11$

$b=3\cdot 11^{15}$

$c=3^d\cdot 11^e$, $1\le d\le 19$, $1\le e\le 15$

$(1\cdot 1\cdot 19\cdot 15)\cdot 3\cdot 2 = 19\cdot 15\cdot 6$

-2

2) $a=3^{19}\cdot 11^n$, $n\in[2;15]$

$b=3^m\cdot 11^{15}$, $m\in[2;19]$

$c=33$

$(14\cdot 18\cdot 1)\cdot 6-1$

$\frac{5\cdot 16\cdot \cancel{7}}{\cancel{34}\cdot 3}=\frac{80}{51}$ $)-1$

$\frac{\cancel{128}\cdot \cancel{64}}{17\cdot \cancel{34}\cdot \cancel{225}}=$

$\frac{AB}{BC}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{10\cdot 8}{\sqrt{34}\cdot 15}=\frac{16}{3\sqrt{34}}$

$=y$

$\frac{256}{9\cdot 34}=$

~~3) $a=3^{19}\cdot 11^{15}$~~

3) $a=3^{19}\cdot 11^{15}$

$b=3\cdot 11$

$c=3\cdot 11$

$-\frac{5}{\sqrt{34}}=\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-\frac{256}{9\cdot 34}y^2}-\frac{16}{3\sqrt{34}}y^2$

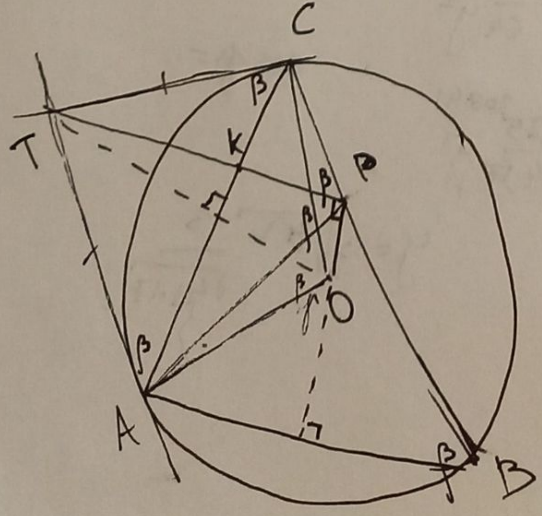
$\frac{25}{34}-\frac{80}{51}y^2+\ldots=1-\frac{281}{153}y^2+\ldots$

$AB=2BP\cos\beta$

$BC=BP\cdot\frac{15}{8}$

Итого: $19\cdot 15\cdot 6-2+14\cdot 18\cdot 6-1+1$.

$\beta+\alpha-90=90-\gamma$



$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$

$\frac{CP}{PA}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}=\frac{CK}{KA}$

а) S_{ABC} – ?

б) $\hat{ABC}=\text{arctg}\,\frac{3}{5}$

AC – ?

17

$(PT)\parallel(AB)$

$\frac{S_{CKP}}{S_{CAB}}=\left(\frac{CK}{CA}\right)^2=\left(\frac{7}{15}\right)^2$

$\text{tg}\,\beta=\frac{CT}{R}=\frac{3}{5}$ $CT=\frac{AC}{2\cos\beta}$ $\frac{AC^2}{4}=\frac{AC}{2\,\text{tg}\,\beta}\cdot\frac{AC}{2}\text{tg}\,\beta$

Черновик

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right),\ \log_{(x+1)^2}(29-x),\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$x<29$
$x\neq 28$
$x>-49$
$x\neq 0$
$x<-1$
$\frac{x}{7}+7\neq 1 \Leftrightarrow x\neq -42$

$x\in(-49;-42)\cup(-42;-1)$

1) $\log_{\sqrt{29-x}}(x/7+7)=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\frac{1}{2\log_{(x/7+7)}(29-x)}=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{x/7+7}(-2x-2)$

$AB=AC\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

$\frac{AP}{\sin\gamma}=\frac{CP}{\sin x}\Rightarrow\frac{\sin\gamma=y}{\sin x}=\frac{8}{7}$

$tg\beta=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{1}{tg^2\beta}+1=\frac{1}{\cos^2\beta}$ $\quad\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos 2\beta=2\cdot\frac{25}{34}-1=\frac{25-17}{17}=\frac{8}{17}$ $\quad\sin 2\beta=\frac{30}{34}=\frac{15}{17}$

$-\frac{8}{17}=\cos\gamma\cos x-\sin\gamma\sin x=\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-\frac{49}{64}y^2}-\frac{7}{8}y^2$

$\frac{64}{289}+\frac{49}{64}y^4-\frac{14}{17}y^2=1+\cancel{\frac{49}{64}y^4}-\frac{113}{64}y^2$

$\left(\frac{113}{64}-\frac{14}{17}\right)y^2=\frac{289-64}{289}=\frac{225}{289}=\frac{1025}{64\cdot 17}y^2$

$\cos\gamma=$

$y=\frac{3}{\sqrt{41\cdot17}}$

$\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)=\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\sqrt{\frac{688}{41\cdot17}}+\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot$

41×17: 287, 41, 697; $697-9=688$

113×17: 791, 113, 1921

64×14: 256, 64, 896

$1921-896=1025$; $1025:15=6\ldots$; -30, 125

$1+\frac{49}{64}=\frac{64+49}{64}=\frac{113}{64}$

$225+64=289$

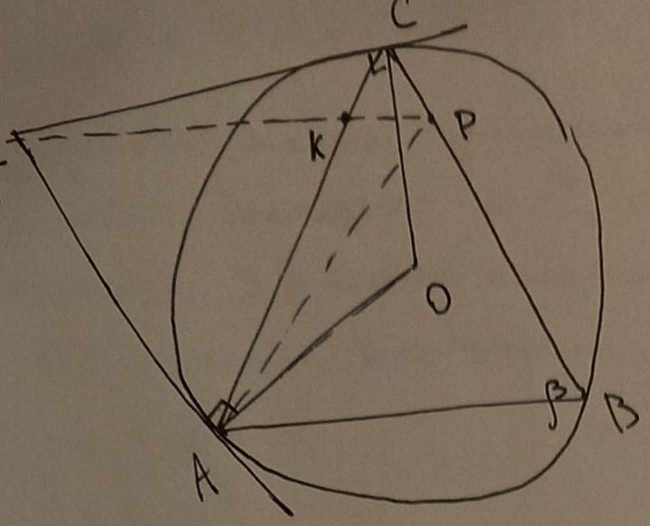
Черновик

$$\frac{9}{34} = \left(-\frac{80}{3\cdot 17} + \cancel{\frac{256}{18\cdot 17}}\ \frac{281}{18\cdot 17}\right) y^2 = \frac{y^2}{18\cdot 17}\left(-480 + 281\right)$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 30 \\ \hline 570 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times 18 \\ \hline 112 \\ 14 \\ \hline 252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 570 \\ +252 \\ \hline 822 \end{array} - 4 = \begin{array}{r} 818 \\ \times 6 \\ \hline 4908 \end{array}$$

Чистовик Б1.

⑥



$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$

а) S_{ABC} – ?

1) $\begin{cases} \hat{OCT}=90^\circ \\ \hat{OAT}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow OCTA$ - вписанный

Кроме того, по условию OPCA вписанный. Значит, все 5 точек O, P, C, T, A лежат на одной окружности.

2) $\hat{ABC} = \beta$

$\hat{TAC}=\beta$ как угол между хордой и касательной

$\hat{TPC}=\hat{TAC}=\beta$, т.к. они опираются на одну дугу $\overset{\frown}{TC}$.

$\hat{TPC}=\hat{ABC} \Rightarrow TP \parallel AB$

3) $\triangle CPK \sim \triangle CBA$ по 2м углам $\Rightarrow \frac{S_{CPK}}{S_{ABC}}=\left(\frac{CK}{CA}\right)^2$

$$\frac{S_{CPK}}{S_{APK}}=\frac{CK}{KA}=\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{CK}{CA}=\frac{7}{15}$$

$$S_{ABC}=S_{CPK}\cdot\left(\frac{CA}{CK}\right)^2=14\cdot\frac{15^2}{7^2}=\frac{2\cdot15^2}{7}=\frac{450}{7}$$

Ответ: 450/7.

Чистовик №2.

(4.) $\begin{cases} НОД(a,b,c)=33 \\ НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$

Из условия можно заключить, что среди чисел a, b, c есть хотя бы одно, делящееся на 3^{19}, хотя бы одно дел. на 11^{15}, хотя бы одно, содержащее 3 в первой степени (ровно), хотя бы одно содерж. 11 ровно в 1 степени. Рассмотрим случаи:

1) $a=3^{19}\cdot 11$
$b=3\cdot 11^{15}$
$c=3^d\cdot 11^e$, $1\le d\le 19$, $1\le e\le 15$

Таких троек $19\cdot 15$, причем, раз нам важен порядок, это число надо умножить ещё на $3\cdot 2$ и вычесть $1\cdot 3\cdot 2$ (число c может совпасть с a или b).

2) $a=3^{19}\cdot 11^n$, $2\le n\le 15$
$b=3^m\cdot 11^{15}$, $m\in[2;19]$
$c=33$

Таких троек $(14\cdot 18-1-1)\cdot 3\cdot 2$ (вычитаем случаи, когда $a=b$ или $n=m=1$)

3) $a=3^{19}\cdot 11^{15}$
$b=3\cdot 11^n$, $n\in[1;15]$
$c=3^m\cdot 11$, $m\in[1;19]$

Таких троек $(19\cdot 15-1)\cdot 6$ (вычли случай совпадения с 1).

Итого: $(19\cdot 15-1+14\cdot 18-1-1+19\cdot 15-1)\cdot 6=4908$.

Ответ: 4908.