Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101331**

ID профиля: **286839**

Вариант 24

Вариант 24 лист 7

Чистовик

№3

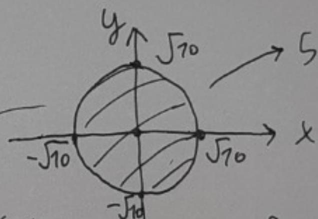
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b, 10)\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$a^2+b^2\le 10$ при любых a и b

$a\in[-\sqrt{10};\sqrt{10}]$ $b\in[-\sqrt{10};\sqrt{10}]$

$a=0$ и $b=0$ подходит



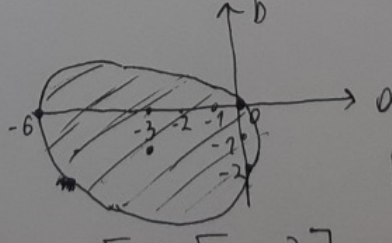
$S=\pi r^2=$
$=\pi\cdot 10$

Эта область точно включена в фигуру М.

$$\left.\begin{array}{l}a^2+b^2\le 10\\ a^2+b^2\le -6a-2b\end{array}\right\}\text{ верно при любых } a \text{ и } b$$

$a^2+6a+b^2+2b\le 0$

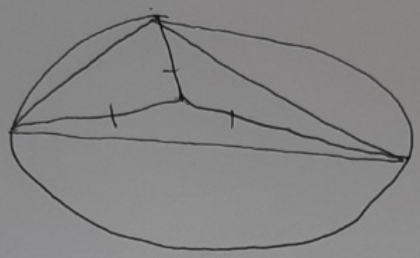
$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$



$b\in[-\sqrt{10};\sqrt{10}-1]$

$a\in[-\sqrt{10};\sqrt{10}-3]$

Черновик



$$\sqrt{x^2}' = \left(+\frac{1}{2}\right)\cdot 2x \cdot (x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

Вариант 24 лист 2

Чистовик №1 (продолжение)

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$D = 144 - 144 = 0$

$(a_1 + 6)^2 > 0$ $a_1 \neq -6$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 144 - 48 = 96$

$a_1 = \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{2} = -6 \pm \sqrt{24} =$

$= -6 \pm 2\sqrt{6}$

$a_1 \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6})$

$2\sqrt{6} < 5$, т.к $4 \cdot 6 < 25$

$2\sqrt{6} > 4$, т.к. $4 \cdot 6 > 16$

$a_1 \in \mathbb{Z}$ $a_1 \in [-10; -2]$

$a_1 \neq -6$ $a_1 \in [-10; -6) \cup (-6; -2]$

$a_1 = -10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$

$d = 1$

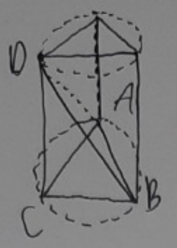
Ответ: $a_1 = -10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$

21101331 (U286839 M1299163)

Вариант 24 лист 3

Чистовик

№2



$AB = 4$

$AC = CB = 7$

$AD = DB = 8$ $CD = ?$

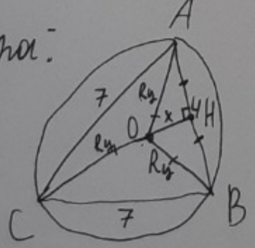
~~Если $\angle ABC$~~ ~~$AB^2 + B$~~

Если $\triangle ABC$ лежит в плоскости, которая параллельна плоскости, в которой лежит окружность цилиндра, то минимальный радиус цилиндра = радиусу описанной окружности $\triangle ABC$, $\angle ACD = 90^\circ$ и $\angle BCD = 90^\circ$

В этом случае $CD = \sqrt{DB^2 - CB^2} = \sqrt{AD^2 - AC^2} =$

$= \sqrt{64 - 49} = \sqrt{15}$

R цилиндра:



O лежит на серед. перпенд. к стороне AB

$AH = HB$ $\angle AHC = 90^\circ$

равнобедр $\triangle$: медиана CH = = высота CH

OH лежит на CH

$OH = x$

$x + R_ц = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{49 - 4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$x^2 + 4 = x^2 + AH^2 = OA^2 = R_ц^2$

$(3\sqrt{5} - R_ц)^2 + 4 = R_ц^2$

Вариант 24 лист 1

Чистовик

№1

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9=S$

$a_9>a_8>a_7>a_6>\ldots>a_2>a_1$

$a_i\in\mathbb{Z}$

$a_2=a_1+d$ $\to d>0$ возрастающая арифм прогрессия $d\in\mathbb{Z}$ ($a_1\in\mathbb{Z}$ и $a_2\in\mathbb{Z}$ значит и $d\in\mathbb{Z}$)

$a_3=a_1+2d$ $S=9a_1+36d$

$\ldots$

$a_9=a_1+8d$

$a_1=?$

$a_5\cdot a_{18}>S-4$

$(a_1+4d)\cdot(a_1+17d)>9a_1+36d-4$

$(a_1+9d)\cdot(a_1+12d)<9a_1+36d+60$

$a_1^2+21a_1d+68d^2>9a_1+36d-4$

$a_1^2+21a_1d+108d^2<9a_1+36d+60$

$9a_1+36d+60+a_1^2+21a_1d+68d^2>9a_1+36d-4+a_1^2+21a_1d+108\cdot d^2$

$64>40d^2$

$\frac{64}{40}>d^2$ $\frac{8}{5}>d^2$ $d\in(-\sqrt{\frac{8}{5}};\sqrt{\frac{8}{5}})$

$d>0\to d\in(0;\sqrt{\frac{8}{5}})$

$1<\sqrt{\frac{8}{5}}<2$ $d\in\mathbb{Z}$

$S=9a_1+36$ $d=1$

$a_1^2+21a_1+68>9a_1+36-4$

$a_1^2+21a_1+108<9a_1+36+60$

$a_1^2+12a_1+36>0$

$a_1^2+12a_1+12<0$

21101331 (U286839 M1299163)

Вариант 24

Чистовик лист 4

№2 (продолжение)

$$45 + R_y^2 - 6\sqrt{5} \cdot R_y + 4 = R_y^2$$

$$R_y = \frac{49}{6\sqrt{5}} \to CD = \sqrt{75}$$

Если $\triangle ABC$ не лежит в плоскости $\parallel$ плоскости окружности цилиндра:

Если ABD лежат в плоскости окр цилиндра:

$\angle BDC = 90^\circ$

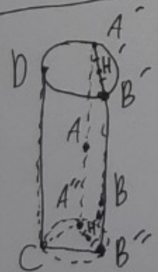
$\angle ADC = 90^\circ$

$CD^2 + DB^2 = CB^2 = 49 = CD^2 + 64$

$CD^2 + AD^2 = AC^2 = 49 = CD^2 + 64$

$CD^2 \geq 0$

такого случая не бывает.



$\angle DAC = \angle DBC$

из теоремы косинусов для

$\triangle CBD$ и $\triangle CAD$ $\left\{ \begin{array}{l} AD = BD = 8, \\ AC = CB = 7, \\ CD \text{ - общая сторона} \end{array} \right.$

$BB'' + B'B = AA'' + A'A = $
$= CD$

$\triangle A'B'D =$
$= \triangle A''B''C$

картинка симметрична относительно плоскости $DH'H''C$.

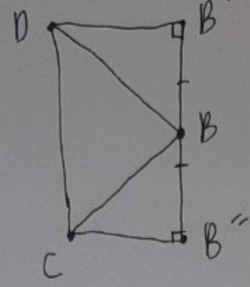
Из этого следует, что $AA'' = BB''$ и $AA' = BB'$.

Вариант 24

Чистовик лист 5

№2 (продолжение 2)

Если $AA' = AA'' = BB' = BB''$:



$BB' = BB''$

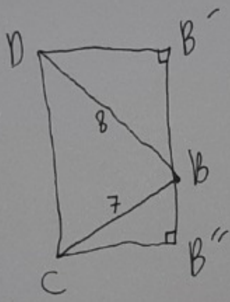
$CB = 7$

$DB = 8$ $\quad CB'' = DB'$

$\triangle DB'B = \triangle CB''B$

(по 2 сторонам и углу)

Но $DB \neq CB$ такого не бывает



$BB'' = x$ $\quad CD = x+y$

$BB' = y$

$DB' = z = CB''$

$z^2 + x^2 = 7^2 = 49$

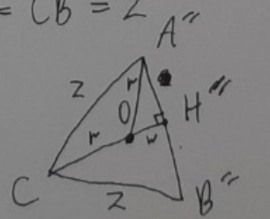
$z^2 + y^2 = 8^2 = 64$

$(y-x)\cdot(x+y) = y^2 - x^2 = 64 - 49 = 15$

$(x+y)^2 \geq (x+y)\cdot(x-y)$

$x+y \geq \sqrt{15}$ $\quad CD \geq \sqrt{15}$

$A''C = CB'' = z$



$AB = A''B'' = 4$

$ABB''A''$ – прямоугольник

$A''H'' = 2 = B''H''$

$(r+w) = \sqrt{z^2-4}$

$w^2 + 4 = r^2$

$4 + \left(\sqrt{z^2-4} - r\right)^2 = r^2$

$4 + z^2 - 4 = 2\cdot\sqrt{z^2-4}\cdot r$

$r = \dfrac{z^2}{2\sqrt{z^2-4}}$

$r = ?$ мин

Вариант 24

Чистовик лист 5

№ 2 (продолжение 3)

$$r = \frac{z^2}{2\sqrt{z^2-4}}$$

$p = z^2$ $\quad$ $p \geq 0$ $\quad$ $z > 0$ $\quad$ $p > 0$

$$r = \frac{p}{2\sqrt{p-4}}$$

$$0 = r' = \frac{1 \cdot 2\sqrt{p-4} - p \cdot 2 \cdot (\sqrt{p-4})'}{4 \cdot (p-4)}$$

$$(\sqrt{p-4})' = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{p-4}} \qquad p \neq 4$$

$$0 = \frac{2\sqrt{p-4} - \frac{p}{\sqrt{p-4}}}{4 \cdot (p-4)} \qquad 0 = 2 \cdot (p-4) - p = \\ = p - 8$$

$p = 8 = z^2$

$z = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$r = \frac{8}{2\sqrt{8-4}} = 2$$

$r_{мин} = 2$

мин r при

$z^2 + x^2 = 8 + x^2 = 49$

$x = \sqrt{41}$

$x > 0$

$y > 0$

$8 + y^2 = 64$

$y^2 = 56$ $\quad$ $y = \sqrt{56}$

$CD = x + y = \sqrt{41} + \sqrt{56}$

Ответ: $CD = \sqrt{41} + \sqrt{56}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101331**

ID профиля: **286839**

Вариант 24

лист 1 Вариант 24 Чистовик

№4

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

если одно из чисел a, b, c делится не на степень 3 или 11, то НОК тоже делится на эту степень.

a, b и c имеют вид:

$a = 3^{a_1} \cdot 11^{a_2}$

$b = 3^{b_1} \cdot 11^{b_2}$

$c = 3^{c_1} \cdot 11^{c_2}$

$a_1; a_2; b_1; b_2; c_1; c_2$ — каждое из них: 0 или натуральное число

$\max(a_1; b_1; c_1) = 19$ (иначе $НОК \neq 3^{19} \cdot 11^{15}$)

$\max(a_2; b_2; c_2) = 15$

$33 = 3^1 \cdot 11^1$

$\min(a_1; b_1; c_1) = 1$ (иначе $НОД \neq 33$)

$\min(a_2; b_2; c_2) = 1$

~~$(3 \cdot 2 \cdot 19) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 15)$ троек натуральных чисел a, b, c.~~

со степенями 3:

если $b_1 \neq a_1 \neq c_1$: $3 \cdot 2 \cdot (19-2)$ случаев

выбор числа, равного 19; выбор числа, равного 1; выбор последнего натур. числа от 2 до 18

если $a_1 = b_1 = c_1$, то $a_1 = b_1 = c_1 = 1 = 19$ противоречие такого не бывает

ровно 2 числа из a_1, b_1, c_1 равны:

если 2 числа равны 1 и 1 число = 19: 3 случая

если 2 числа равны 19 и 1 число = 1: 3 случая лист 2 Чистовик Вариант 24

№4 (продолжение)

$17 = 19 - 2$

со степенями 3: $3 \cdot 2 \cdot 17 + 3 + 3 + 0$ случаев $=$

$= 3 \cdot 2 \cdot 18$ случаев

аналогично со степенями 11:

$3 \cdot 2 \cdot 13 + 3 + 3 + 0 = 3 \cdot 2 \cdot 14$ случаев

$13 = 15 - 2$

Всего троек $(a; b; c)$:

$(3 \cdot 2 \cdot 18) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 14) = 36 \cdot 18 \cdot 14 =$

$= 648 \cdot 14 = 9072$

Ответ: 9072

Чистовик Вариант 24 лист 5

№ 5 (продолжение 2)

если $x = -7$, то

$y = \log_{\sqrt{36}}(6) = 1$

$z = \log_{36} 36 = 1$

$w = \log_{\sqrt{6}}(6) = 2$

$x = -7$ подходит

2 случай:

$2\log_a b = \log_b c = \log_c(a) - 1$

$$2 \cdot \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} = \frac{1}{\log_c(b)} = \log_c(a) - 1$$

$k = \log_c(a) \qquad l = \log_c(b)$

$$\frac{2l}{k} = \frac{1}{l} = k - 1$$

$$l = \frac{1}{k-1}$$

$$\frac{2}{k \cdot (k-1)} = k - 1$$

$k \cdot (k^2 - 2k + 1) - 2 = 0$

$k^3 - 2k^2 + k - 2 = 0$

$(k-2) \cdot (k^2 + 1) = 0$

$k^2 + 1$ всегда > 0

$k = 2 \rightarrow l = 1$

$c^2 = a$

$-1 - x = c = b = \sqrt{\frac{x}{7} + 7}$

$$x^2 + 2x + 1 = \frac{x + 49}{7}$$

$(x^2 + 2x + 1)^2 = 29 - x$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x - 28 = 0$ решение не подходит

$7x^2 + 13x - 42 = 0$

$D = 169 + 168 \cdot 7 = 1345$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{1345}}{14}$$

$x < -1$

$$\boxed{x = \frac{-13 - \sqrt{1345}}{14}}$$

Чистовик варинант 24 лист 6

№ 5 (продолжение 3)

③ случай $\log_c(a) = \log_b(c) = 2\log_a(b) - 1 =$

$= 2 \cdot \dfrac{\log_c(b)}{\log_c(a)} - 1$

$\log_c(a) = p \qquad \log_c(b) = r$

$$p = \frac{1}{r} = \frac{2r - p}{p}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{2r - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r}} = 2r^2 - 1$$

$1 = 2r^3 - r \qquad 2r^3 - r - 1 = 0$

$(r-1)\cdot(2r^2 + 2r + 1) = 0$

$2r^2+2r+1$ всегда больше 0, т.к $D = 4 - 8 < 0$

$r = 1$

$p = 1$

$c = a = b$

$\sqrt{29 - x} = \sqrt{\frac{x}{7} + 7} = -x - 1$

$203 - 7x = x + 49$

$154 = 8x$

$77 = 4x$

$\boxed{x = \frac{77}{4}}$, но $x < -1$

$x = \frac{77}{4}$ не подходит

Ответ: $x = -7$

Чистовик Вариант 24 лист 3

№5

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$,

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$29-x>0$, т.к. $\sqrt{29-x}>0$ (из первого log)

$x<29$

$\frac{x}{7}+7>0$, т.к. $\sqrt{\frac{x}{7}+7}>0$ (из третьего log)

$x>-49$

$-x-1>0$ (из третьего log)

$x<-1$

$-49<x<-1$

$\sqrt{29-x}\neq 1 \rightarrow x\neq 28$ (из первого log)

$(x+1)^2\neq 1 \rightarrow x\neq 0; x\neq -2$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}\neq 1 \rightarrow x\neq -42$

$x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=\log_{(-x-1)}\left(\sqrt{29-x}\right)$

$2\cdot\log_{\sqrt{29-x}}\left(\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right)$

$a=\sqrt{29-x}$ $b=\sqrt{\frac{x}{7}+7}$ $c=(-x-1)$

даны числа: $2\cdot\log_a(b)=y$; $\log_c(a)=z$; $\log_b(c)=w$

первое число второе число третье число

21101331 (U286839 M1299164)

Чистовик Вариант 24 лист 4

№5 (продолжение)

$\sqrt{78} > a > \sqrt{30}$

при $x=-49$ при $x=-1$

$0 < b < \sqrt{\frac{48}{7}}$

при $x=-49$ при $x=-1$

$48 > c > 0$

при $x=-49$ при $x=-1$

есть 3 случая: $y = z = w - 1$ 1 случай

$y = w = z - 1$ 2 случай

$z = w = y - 1$ 3 случай

1 случай: $2 \cdot \log_a(b) = \log_c(a) = \log_b(c) - 1 = \log_b\left(\frac{c}{b}\right)$

$\frac{2 \cdot \log_c(b)}{\log_c(a)} = \log_c(a) = \frac{\log_c\left(\frac{c}{b}\right)}{\log_c(b)} = \frac{1 - \log_c(b)}{\log_c(b)}$

$\log_c(b) = m$

$\log_c(a) = n$

$\frac{2m}{n} = n = \frac{1-m}{m}$

$m = \frac{n^2}{2} \rightarrow n = \frac{1 - \frac{n^2}{2}}{\frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n^2} - 1$

$\sqrt{2m} = \frac{1-m}{m}$

$2m = \frac{1 - 2m + m^2}{m^2}$

$2m^3 - m^2 + 2m - 1 = 0$

$(m - \frac{1}{2}) \cdot (2m^2 + 2) = 0$

$2m^2 + 2$ всегда > 0

$m = \frac{1}{2}$

$\log_c(a) = n = 1$

$\log_{(-x-1)}(\sqrt{29-x}) = 1$

$-x - 1 = \sqrt{29-x}$

$x^2 + 2x + 1 = 29 - x$

$x^2 + 3x - 28 = 0$

$(x+7) \cdot (x-4) = 0$

$x = -7; 4$

$x < -1$

$\boxed{x = -7}$

21101331 (U286839 M1299164)

Черновик 1 из 2

~~168 · 8 + 1 =~~

$168 \cdot 8 + 1 = 1345$

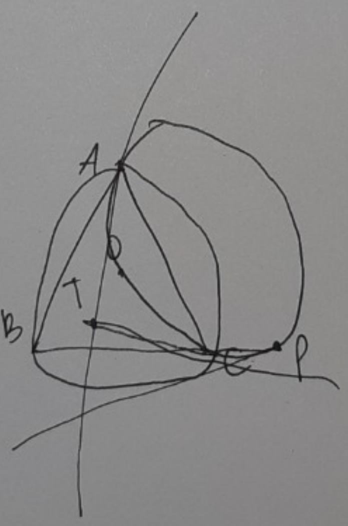
$$\begin{array}{r} \times\, 168 \\ 8 \\ \hline 1344 \end{array}$$

1345

$1345 \,|\, 5$

$\;|\, 269$

от 30 до 40



Черновик 2 из 2

$36 \cdot 18$

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 18 \\ \hline 288 \\ 36\ \ \\ \hline 648 \end{array}$$

$720 - 72$

$$\begin{array}{r} \times\ 648 \\ 14 \\ \hline 2592 \\ 648\ \ \\ \hline 9072 \end{array}$$

$3^{19} \cdot 11^{15}$

$3^{7} \cdot 11^{7}$

$3^{5} \cdot 11^{8}$

$9072 = \cancel{1008 \cdot 9} = 504 \cdot \cancel{18} =$

$\cancel{= 252 \cdot 18 \cdot 2} =$

$= 28 \cdot \cancel{18} \cdot \cancel{18}$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

-2 и -4

31 до 33

от 25 до 31

$x^4 + 4x^2 + 1 + 4x^3 + 4x + 2x^2 + x -$

$-29 = 0$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x - 28 = 0$

$35^2 = 1050 +$