Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101319**

ID профиля: **375657**

Вариант 24

Чистовик

№1

~~Д~~ Дано:

S – сумма 9 пер. чл. ариф. прогрессии $\quad d>0$

$a_1, a_2, a_3 \dots a_9 \in Z \Rightarrow d \in Z$

$a_5 a_{18} > S-4 \qquad a_{10} a_{13} < S+60$

Найти: a_1

1) $\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+4d) \cdot (a_1+17d) > \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9 - 4 \\ (a_1+9d) \cdot (a_1+12d) < \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9 + 60 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} (1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 - 9a_1 - 36d + 4 > 0 \\ -a_1^2 - 21a_1 d - 108d^2 + 9a_1 + 36d + 60 > 0 \end{cases}$

$+$

$\|$

$-40d^2 + 64 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d^2 < \frac{64}{40} \Leftrightarrow d^2 < 1.6 \Leftrightarrow d < 4 \cdot \sqrt{0.1}$

при этом $d \in Z$, ~~т~~ т.к. $a_1 - a_2 \in Z$

и прогрессия возрастает $\Rightarrow d > 0$

$\begin{cases} 0 < d < 4\sqrt{0.1} \\ d \in Z \end{cases} \Rightarrow \underline{d = 1}$

$1 \vee 4\sqrt{0.1}$

$<$

$1 \vee 1.6$

$<$

2) Подставляем $d=1$ в (1)

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1+68-9a_1-36+4>0 \\ a_1^2+21a_1+108-9a_1-36-60<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+12a_1+36>0 \\ a_1^2+12a_1+12<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+6)^2>0 \text{ - всегда} \\ (a_1+6+2\sqrt{6})(a_1+6-2\sqrt{6})<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

при: $a_1^2+12a_1+12=0$

$$D=144-48=96$$

$$a_1=\frac{-12\pm\sqrt{96}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1=-6-2\sqrt{6} \\ a_1=-6+2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -6-2\sqrt{6}<a_1<-6+2\sqrt{6}$$

$\cancel{a_1 \in \{-6}$ $\quad \cancel{2\sqrt{6} \approx} 4 \quad 4<2\sqrt{6}<5$

$$-2<-6+2\sqrt{6}<-1$$

$$-11<-6-2\sqrt{6}<-10$$

$a_1 \in \{-10; -9; \dots -2\}$

Ответ: $\{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$

Чистовик

№3

Дано: $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10) \end{cases}$

S_M - ?

Решение:

1) $a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10) \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -6a-2b \le 10 \\ a^2+b^2 \le -6a-2b \end{cases} \\ \begin{cases} -6a-2b \ge 10 \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b+3a+5 \ge 0 \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \end{cases} \quad B(-3;-1) \\ \begin{cases} b+3a+5 \le 0 \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases} \quad O(0,0) \end{array}\right.$

$b+3a+5=0$

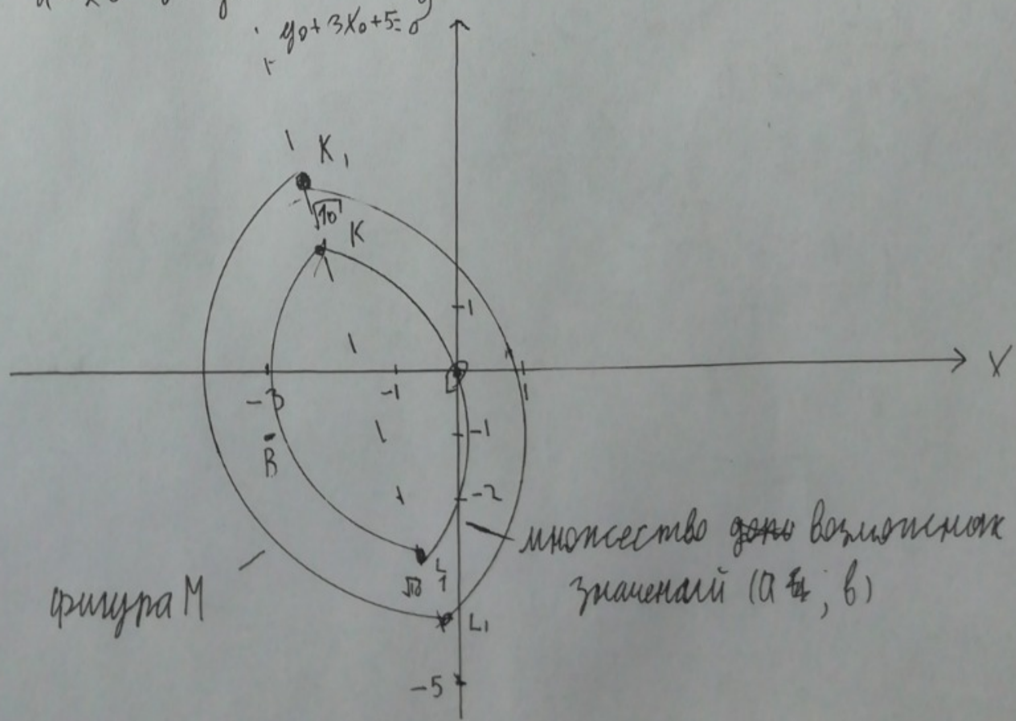
$y_0 = -3x_0 - 5$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10$

$A(a;b)$ - центр окружности

$a=x_0 \quad b=y_0$

2)



3) M - состоит из двух секторов окружностей в ~~це~~ центрах B и O с радиусом $2\sqrt{10}$

Найдем координаты K и L

$$\begin{cases} y_0 = -3x_0 - 5 \\ y_0^2 + x_0^2 = 10 \end{cases}$$

~~$10x_0^2 + 30x_0 +$~~

$(-3x_0 - 5)^2 + x_0^2 = 10 \qquad 9x_0^2 + 30x_0 + 25 + x_0^2 - 10 = 0$

$x_0^2 + 3x_0 + 1.5 = 0$

$x_{K,L} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3}}{2} \qquad x_L = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2} \qquad x_K = \dfrac{-3-\sqrt{3}}{2}$

$y_K = \dfrac{9 + 3\sqrt{3} - 10}{2} \qquad y_K = \dfrac{3\sqrt{3} - 1}{2} \qquad y_L = \dfrac{-3\sqrt{3} - 1}{2}$

$KL = \sqrt{\left(\dfrac{-3-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}-1}{2} - \dfrac{-3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{3+27} = \sqrt{30}$

~~$K_1L_1 = \sqrt{30} + 2\sqrt{10} = \sqrt{10}(2+\sqrt{3})$~~ $K_1L_1 = \sqrt{30} + 2\sqrt{10}$

$\dfrac{K_1L_1}{\sin\angle K_1OL_1} = 2(2\sqrt{10})$

$\sin\angle K_1O_1L_1 = \dfrac{\sqrt{30} + 2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$

$S_M = 2\left(\dfrac{\arcsin\frac{\sqrt{3}+2}{4}}{\pi} \cdot (2\sqrt{10})^2 - 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{4}\right) =$

$= \dfrac{80\arcsin\frac{\sqrt{3}+2}{4}}{\pi} - 10\sqrt{3} - 20$

Ответ: $\dfrac{80\arcsin\frac{\sqrt{3}+2}{4}}{\pi} - 10\sqrt{3} - 20$

Черновик

$a_1^2 \cdot 21d > S - 4$ $\qquad S = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9$

$a_1^2 \cdot 21d < S + 60$ $\qquad 9a_1 + 36d - 4$

$a_1^2 \cdot 21d > 9a_1 + 36d - 4$

$a_1^2 \cdot 21d < 9a_1 + 36d + 60$

$$\begin{cases} a_1^2 \cdot 21d - 9a_1 - 36d > -4 \\ a_1^2 \cdot 21d - 9a_1 - 36d < 60 \end{cases}$$

$a_1^2 \cdot 21d - 9a_1 - 36d + 4 > 0$ $\qquad 3d(7a_1^2 - 12)$

~~$81 - 4 \cdot 21d(36d + 4) =$~~

~~$= 81 - 42 \cdot 36d^2 -$~~

$a_1^2 \cdot 21d - 9a_1 - 36d + 4 > 0$

$81^2 - 84d(4 - 36d) =$

$= 81 - d \cdot 84 \cdot 4 + 36 \cdot 84d^2$

$7 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3^2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101319**

ID профиля: **375657**

Вариант 24

Чистовик
Вариант-21

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{N}$$

Найти: кол-во решений

Решение:

1) $a = 3^x \cdot 11^y \quad b = 3^m \cdot 11^l \quad c = 3^v \cdot 11^z$

$1 \leq x \leq 19 \quad 1 \leq y \leq 15$
$1 \leq m \leq 19 \quad 1 \leq l \leq 15$
$1 \leq v \leq 19 \quad 1 \leq z \leq 15$

2) ~~Пусть $x = m$~~ ~~$x < m$, $x < v \Rightarrow x = 1$~~

~~Пь~~

Пусть $x \leq m \leq v$, тогда
$x = 1$, а $v = 19$, m – $\cancel{19}$ 17 вариантов

3) Пусть $y \leq l \leq z$, тогда
$y = 1$, а $z = 15$, l – $\cancel{15}$ 13 вариантов
ещё можно сделать 6 перестановок

Всего ~~$19 \cdot 15 = 285$~~ $17 \cdot 13 \cdot 6 = 1326$

~~Ответ: 285~~ ~~4) В каждой тройке можно менять числа → в одной тройке ещё 6 комбинаций~~

~~Ответ: 285~~

4) ещё случаи, когда $x = 1 \quad m = 1, 19 \quad v = 19$
$y = 1 \quad z = 15 \quad l = 1, 15$
$3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$

5) $1326 + 18 = 1344$

Ответ: 1344

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$;

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$;

~~Когда~~ При каких x 2 из них равны, а 3 больше на 1

Решение:

1) ОДЗ: $\begin{cases} 29-x>0 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ -x-1>0 \\ 29-x\neq 1 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ \sqrt{\left(\frac{x}{7}+7\right)}\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x<29 \\ x>-49 \\ x<-1 \\ x\neq 28 \\ x\neq 0 \quad x\neq -2 \\ x\neq -42 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -49<x<-1 \\ x\neq 0 \\ x\neq -42 \end{cases}$

2) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = \log_{\frac{x}{7}+7}(x+1)^2$

3) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) \cdot \log_{\frac{x}{7}+7}(x+1)^2 \cdot \log_{(x+1)^2} 29-x =$

$= \log_{\sqrt{29-x}}(x+1)^2 \cdot \log_{(x+1)^2} 29-x = 2$

4) Пусть любое из них равно y, тогда

$y \cdot y \cdot (y+1) = 2$ $\quad y^3+y^2-2=0$ $\quad y^2+2y+2=0$ $D<0$

$y_1 = 1$ $\quad y \in \varnothing$

5) При варианта

(1) $\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2 \\ \log_{(x+1)^2}(29-x)=1 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1 \\ \log_{(x+1)^2}(29-x)=2 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1 \\ \log_{(x+1)^2}(29-x)=1 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2 \end{cases}$

Чистовик

№5

б) (1) $\begin{cases} \frac{x}{7} + 7 = 29 - x \\ 29 - x = x^2 + 2x + 1 \\ -x - 1 = \sqrt{\frac{x}{7} + 7} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 23 \cdot 7 \\ x^2 + 3x - 28 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = \frac{x}{7} + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23 \cdot 7}{8} \\ x_1 = -7 \quad x_2 = +4 \\ x^2 + 2x + 1 = \frac{x}{7} + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$

(2) $\begin{cases} \frac{x}{7} + 7 = \sqrt{29 - x} \\ 29 - x = (x^2 + 2x + 1)^2 \\ -x - 1 = \sqrt{\frac{x}{7} + 7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{x}{7} + 7)^2 = 29 - x \\ x_1 = -7 \quad x_2 = +4 \\ x^2 + 2x + 1 = \frac{x}{7} + 7 \end{cases}$

$(-\frac{7}{7} + 7)^2 = \sqrt{29 + 7}$ $\qquad 49 - 14 + 1 = -\frac{7}{7} + 7$

$6 = 6$ $\qquad 36 \neq 6$

$x = -7$ - не подходит

$\frac{4}{7} + 7 = \sqrt{25}$ $\qquad x = 4$ - не подходит

$7\frac{4}{7} \neq 5$

(3) $\begin{cases} \frac{x}{7} + 7 = \sqrt{29 - x} \\ 29 - x = \cancel{-x-1} + x^2 + 2x + 1 \\ -x - 1 = \frac{x}{7} + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} + 7 = \sqrt{29 - x} \\ x = -7; \ x = +4 \\ x = -7 \end{cases}$

$x = -7$: $\quad -\frac{7}{7} + 7 = \sqrt{36}$

$6 = 6$

$x = -7$ - подходит

3

Чистовик

№5

б) (2) $\begin{cases} \frac{x}{7}+7=\sqrt{29-x} \\ 29-x=(x+1)^4 \\ -x-1=\sqrt{\frac{x}{7}+7} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$-x-1=\sqrt{\frac{x}{7}+7} \iff x^2+2x+1=\frac{x}{7}+7$

$\Leftrightarrow$

$7x^2+13x-\cancel{36}\,42=0$

~~$D=169+4\cdot7\cdot36$~~ $D=13^2+42^2$

$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169+1764}}{14}$

$x_1=\frac{-13+\sqrt{1933}}{14}$ – п.к не входит в ОДЗ $x_2=\frac{-13-\sqrt{1933}}{14}$ – п.к. не входит в ОДЗ

$x\in\varnothing$

Ответ: -7

$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}$ $\quad x^2+2x+1=\frac{x}{7}+7$

$\frac{\pi}{4\cdot 2\pi}$ $\quad T$

63 $\quad$ 84

16 $\quad$ 8

17 $\quad$ 64

$7x^2+13x-42=0$ $\quad \frac{x^2}{49}+2x+49=29-x$

$\frac{x^2}{49}+3x+20=0$

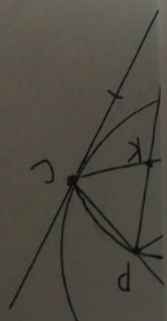
$x^2+2x+1=\frac{x}{7}+7$

$x^2+\frac{13x}{7}-6=0$

$x^2+1\frac{6}{7}x-6=0$

$13^2+42^2=$ $\quad x^2+\cancel{3}147x+980=0$

$=$



$-49\cdot 14+13\sqrt{1933}$

$\sqrt{1933}$

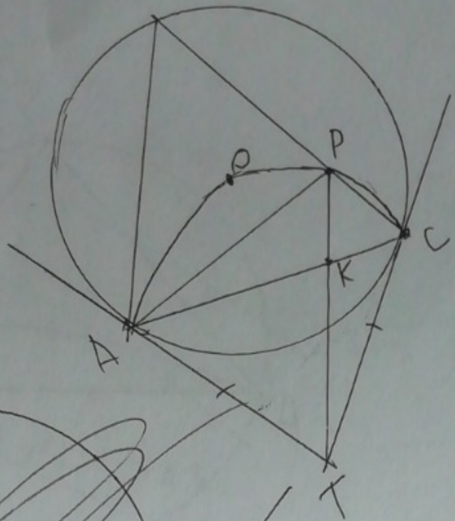
1·

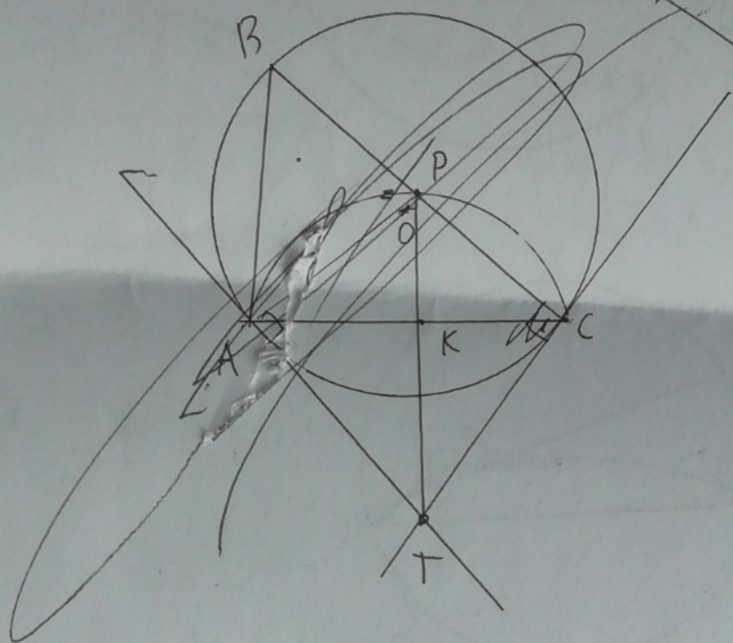
196

49 $\quad$ -686

17·13·6 ≡

1,19   1,19, 19





17·13·6 =

= ~~4~~ 102·13 =

= 1326