Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101302**

ID профиля: **366076**

Вариант 24

~~Бело~~ Чистовик.

№1

Решение: Пусть d - шаг прогрессии, тогда $d \in \mathbb{Z}$ и $d>0$.

$S = a_1+\dots+a_9 = 9a_1+d+\dots+8d = 9a_1+36d$;

$a_5\cdot a_{18} = (a_1+4d)(a_1+17d) = a_1^2+21da_1+68d^2$;

$a_{10}\cdot a_{13} = (a_1+9d)(a_1+12d) = a_1^2+\cancel{21}21da_1+108d^2$

Тогда из условия => $\begin{cases} a_1^2+21da_1+68d^2 > 9a_1+36d-4 \\ 9a_1+\cancel{36}36d+60 > a_1^2+21da_1+108d^2 \end{cases}$ =>

=> $\cancel{a_1^2+21d}a_1+68d^2+9\cancel{a_1+36d}+60 > \cancel{a_1^2+21d}a_1+108d^2+9\cancel{a_1+36d}-4$ =>

=> $68d^2+60 > 108d^2-4$ => $64 > 40d^2$ => $d^2 < \frac{64}{40}$ => $d^2 < \frac{8}{5}$, тогда

$d<2$ и $d \in \mathbb{Z}$ и $d>0$ => $d=1$

Зная, что $d=1$, запишем $a_{10}\cdot a_{13} < S+60$:

$a_1^2+21a_1+108 < 9a_1+36+60$ => $a_1^2+12a_1+12<0$ =>

=> $(a_1+6)^2 < 24$ => $a_1+6 \in [-4;4]$ => $a_1 \in [-10;-2]$

~~Ответ: $a \in \{-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2\}$~~;

Примечание: для данных a условие $a_5\cdot a_{18} > S-4$ выполняется т.к. тогда $a_1^2+12a_1+36>0$ => $(a_1+6)^2>0$ => только $a=-6$ не подх. Тогда

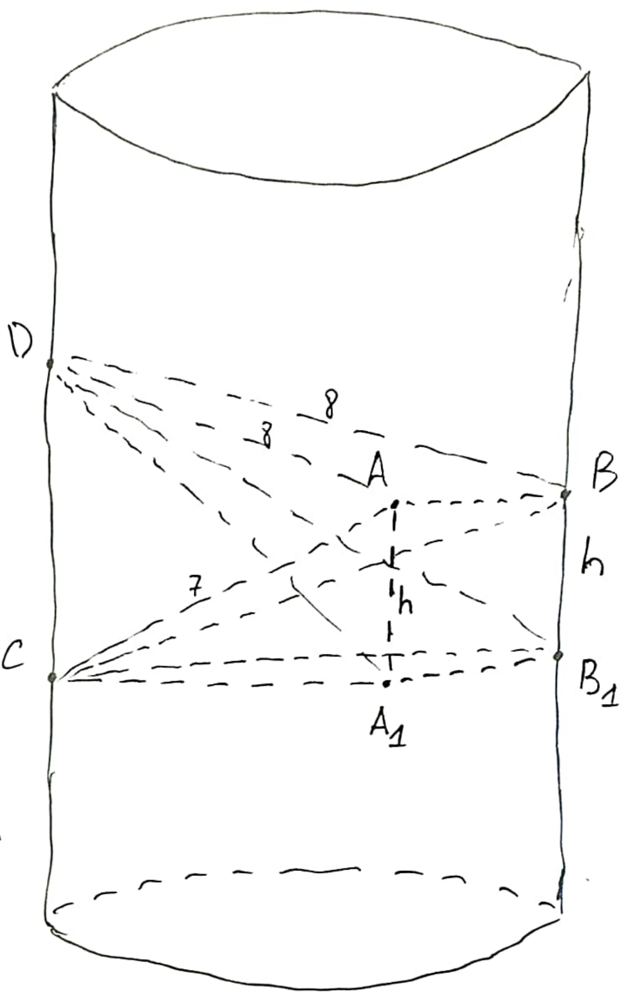
Ответ: $a \in \{-10,\cancel{6},-8,-7,-5,-4,-3,-2\}$

Чистовик

№2

2

Решение: Проведём из т. C плоскость ∥ плоскости основания цилиндра. Назовём эту пл-сть α. Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на α соответственно. Также C — проекция D на α, т.к. CD ∥ оси цилиндра.



~~Пусть $AA_1 = BB_1 = h$.~~

(~~$AA_1=BB_1$~~) Пусть $AA_1=BB_1=h$.

($AA_1=BB_1$, т.к. $AB \parallel \alpha$, иначе не соблюдалось бы равенство $AD=DB$ и $AC=CB$)

Мы также знаем, что $AC=CB=7$ и $AD=DB=8$, тогда из th. Пифагора для $\triangle AA_1C \Rightarrow CA_1=\sqrt{49-h^2}$;

Также $AB=A_1B_1=4$.

Раз α ∥ пл-ти осн. цилиндра, то радиус цилиндра = радиусу опис. окр. $\triangle A_1B_1C = R$. В $\triangle CA_1B_1$ опустим высоту CH из вершины C. Тогда $A_1H=B_1H=\frac{A_1B_1}{2}=2 \Rightarrow CH=\sqrt{A_1C^2-A_1H^2}=\sqrt{49-h^2-4}=\sqrt{45-h^2}$;

Тогда с одной стороны $S_{\triangle CA_1B_1}=\frac{A_1B_1\cdot CH}{2}=2\sqrt{45-h^2}$.

С другой стороны $S_{\triangle CA_1B_1}=\frac{CB_1\cdot A_1B_1\cdot CA_1}{4R} \Rightarrow 2\sqrt{45-h^2}=\frac{49-h^2}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow R=\frac{49-h^2}{2\sqrt{45-h^2}}=\frac{45-h^2}{2\sqrt{45-h^2}}+\frac{4}{2\sqrt{45-h^2}}=\frac{\sqrt{45-h^2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{45-h^2}}$; Обозначим $\frac{\sqrt{45-h^2}}{2}$ за x, тогда минимальная $R=\min(R)=\min(x+\frac{1}{x})$

Но по неравенству Коши: $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\geq\sqrt{1} \Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2 \Rightarrow \min(R)=$

$=2$. Причем $R=2$ достигается только когда $x=\frac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{45-h^2}}{2}=\frac{2}{\sqrt{45-h^2}} \Rightarrow 45-h^2=4 \Rightarrow h=\sqrt{41}$;

Чистовик

3

Тогда $A_1C = B_1C = \sqrt{49 - h^2} = 2\sqrt{2}$.

Теперь проведём пл-сть β через AB так, что $\beta \parallel$ пл-ти основания цилиндра. Пусть T – точка пересечения β и CD, тогда $AT = CA_1 = 2\sqrt{2}$, тогда по th Пифагора $DT = \sqrt{AD^2 - AT^2} = \sqrt{64 - 8} = 2\sqrt{14}$, $CT = AA_1 = h = \sqrt{41}$, тогда $DC = DT + CT = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$. ~~Заметим, что T обязана понадлежать DC, иначе AD~~ Если T лежит вне DC, то $DC = DT - CT = 2\sqrt{14} - \sqrt{41}$; $(2\sqrt{14} - \sqrt{41} > 0 \Rightarrow$ подх.)

Ответ: $2\sqrt{14} + \sqrt{41}$ или $2\sqrt{14} - \sqrt{41}$;

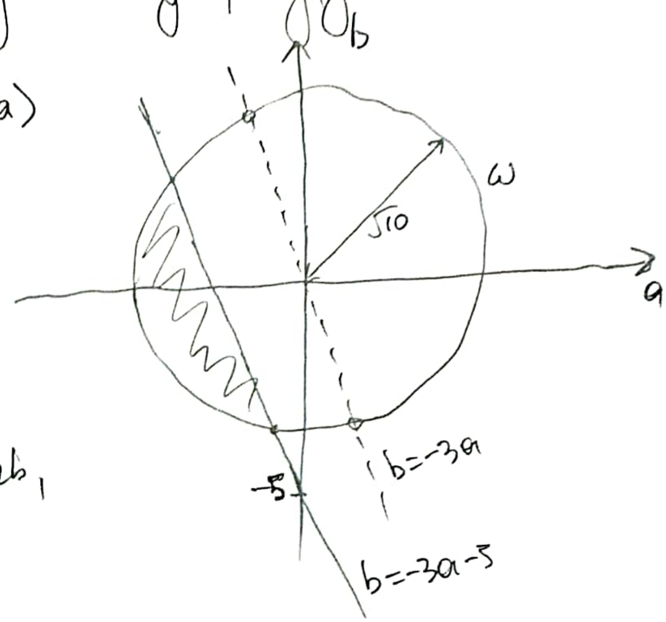
Чистовик

№3

<u>Решение</u>: Заметим, что данная нам система равносильна следующей:

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$$

Тогда нашу фигуру можно изобразить на графике в осях $b(a)$



~~Верхней строке системы соответствует~~ ~~Вся область~~

~~Посмотрим~~ Заметим, что нижняя строка нашей системы превращается в строку $a^2+b^2 \le -6a-2b$, когда $-6a-2b \ge 10 \Leftrightarrow b > -3a-5$.

Также $-6a-2b > 0 \Rightarrow b < -3a$

Тогда если $b \le -3a-5$ и $b < -3a$, то все точки $(x;y)$ на окр-ти ω (окр с центром в $(0;0)$ и $R=\sqrt{10}$) нам подх. Иначе нам подх все точки на прямой $b=-3a-5$

Тогда ответом будет площадь закр. фигуры.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101302**

ID профиля: **366076**

Вариант 24

~~№~~ №4 Чистовик (1)

Решение: $НОД(a,b,c) = 33 = 3 \cdot 11$;

$НОК(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$; $a,b,c \in \mathbb{N}$

Разложим a, b и c на простые мн-ли:

$a = 3^{x_1} \cdot 11^{y_1}$; $b = 3^{x_2} \cdot 11^{y_2}$; $c = 3^{x_3} \cdot 11^{y_3}$;

Заметим, что кроме 3 и 11 никакое простое в разложение a, b и c входить не может, иначе этот простой множитель входил бы в НОК. Тогда раз в НОД 3 и 11 входят в первой степени, то ~~найдётся~~ все $x_j \geq 1$ и $y_j \geq 1$. Раз в НОК 3 входит в 19 степени и 11 входит в 15, то все $x_j \leq 19$ и все $y_j \leq 15$. Также найдётся $x_j = 1$, $x_i = 19$, $y_k = 1$ и $y_m = 15$. Следовательно остаётся 1 переменная x_p из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ и 1 переменная из множества $\{y_1, y_2, y_3\}$. Пусть наша ~~не~~ еще неопр. переменная из 1-го множества $= n$, неопр. переменная из ~~мн~~ 2-го множества $= t$, тогда n — любое натуральное число $\in [1;19]$ и t — любое натуральное число $\in [1;15]$.
Тогда всего вариантов определения n и t $= 19 \cdot 15$ ~~= кол-во подх.~~

~~Треск (19·15=285)~~ $= 285$. Осталось распределить степени

~~Ответ: 285~~

между ~~числами~~ числами a,b,c: определим все степени кроме n и t и тогда n и t определятся однозначно. Посчитаем кол-во вариантов расстановки $x_j = 1$ и $x_i = 19$, а также $y_k = 1$ и $y_m = 15$: их всего $\cancel{C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot C_3^2}$ $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1$. Для каждого варианта расстановки этих степеней у нас есть 285 способов выбрать ост. 2 степени.
Тогда всего кол-во способов $= C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 285 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 285 = 10260$

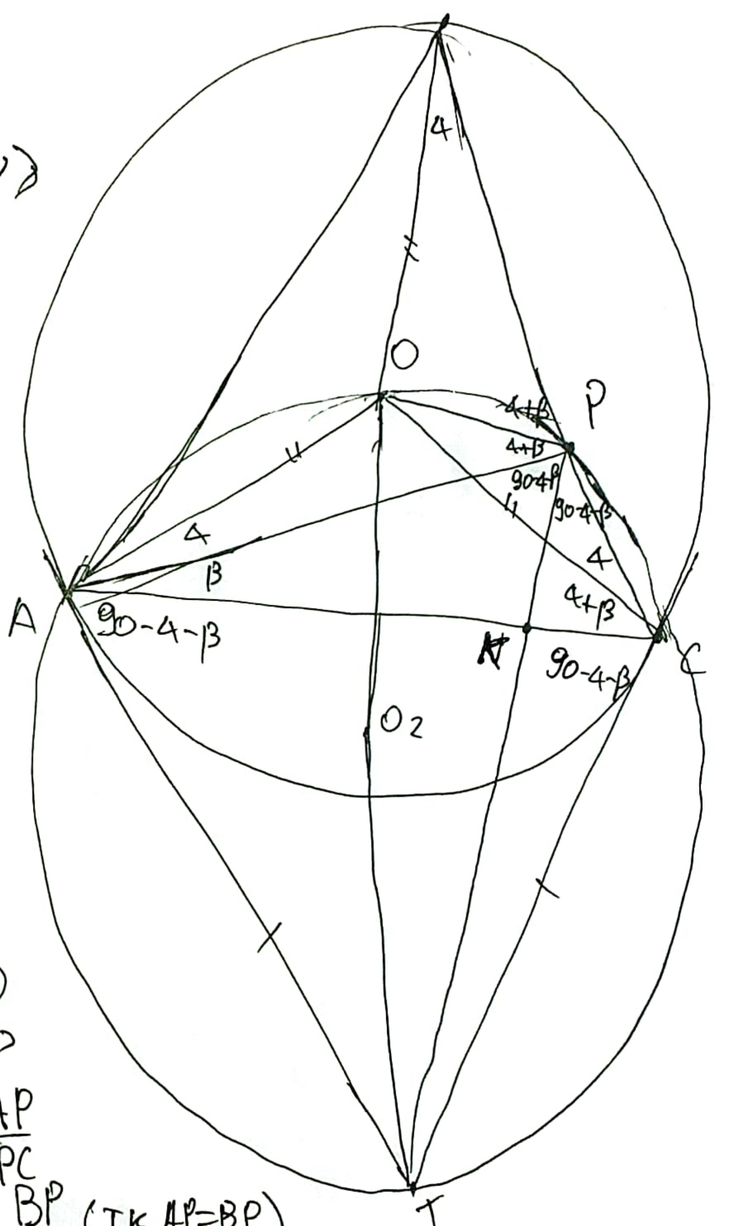
Ответ: 10260

Чистовик

№6

2

рис1.



Решение: а) При решении будем опир. на рис 1. Отметим O_2 — центр окр. через точки A, O и C (пусть это окр ν)

Пусть $\angle OAP = \alpha$, $\angle PAC = \beta$, тогда $OA = OC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCA = \alpha + \beta$. Тогда $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$. Тогда в четырёхугольнике $AOCT$ $\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow T \in \nu$. $\angle OAP = \angle OCP = \alpha$.

$\angle CAT = \angle CPT = 90 - \alpha - \beta$.

$\angle APT = \angle ACT = 90 - \alpha - \beta$.

$\angle OPA = \angle OCA = \alpha + \beta$.

Тогда $\angle OPB = 180 - \angle OPA - \angle APT - \angle TPC = \alpha + \beta$.

$\angle CBO = \angle BCO$ (т.к. $BO = CO$) $= \alpha$. Тогда $\triangle BOP = \triangle AOP \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = BP$. Тогда $\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$ (т.к. PK − биссектр в $\triangle APC$) $= \frac{BP}{PC}$ (т.к. $AP = BP$)

$= \frac{S_\triangle ABP}{S_\triangle APC}$. Но $\frac{AK}{KC} = \frac{S_\triangle APK}{S_\triangle CPK} = \frac{16}{14}$, также $S_\triangle APC = 16 + 14 = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_\triangle ABP}{30} = \frac{16}{14} \Rightarrow S_\triangle ABP = \frac{30 \cdot 16}{14}$. Тогда $S_\triangle ABC = S_\triangle APB + S_\triangle APC =$

$= 30 + 34\frac{2}{7} = 64\frac{2}{7}$

Ответ: $64\frac{2}{7}$;

Чистовик

3

№6 б) Заметим, что $S_{\triangle}ABC = S_{\triangle}ACT$.

$\angle ABO = \frac{180 - \angle ACB - \angle OBC - \angle OAC}{2} = 90 - 2\alpha - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 90 - \alpha - \beta \Rightarrow tg(90 - \alpha - \beta) = \frac{3}{5}$;

Пусть $OH = m$, ~~тогда~~ раз $\angle AOH = 90 - \alpha - \beta$, то $tg(\angle AOH) = \frac{OH}{AH} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = \frac{5 \cdot m}{3} \Rightarrow AC = \frac{10m}{3}$. Теперь $\angle TAH = 90 - \alpha - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AH}{HT} = \frac{3}{5} \Rightarrow TH = \frac{25}{9}m$. Тогда $S_{\triangle}TAC = 64\frac{2}{7} = \frac{450}{7} =$

$= \frac{TH \cdot AC}{2} = \frac{25}{9}m \cdot \frac{10m}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 = \frac{450}{7} \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow m = 9\sqrt{\frac{6}{35}} \Rightarrow AC = \frac{10m}{3} =$

$= 30\sqrt{\frac{6}{35}}$

Ответ: $30\sqrt{\frac{6}{35}}$