Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101212**

ID профиля: **814682**

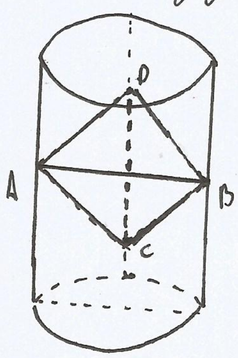
Вариант 24

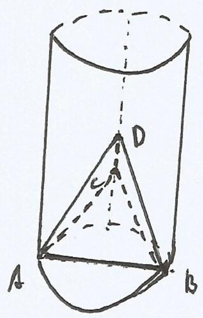
Чистовик (1 лист) Вариант 24

№2

1) Для того, чтобы найти наименьший возможный радиус цилиндра необходимо, чтобы наименьшая из граней лежала в плоскости, ⊥ оси цилиндра. А. Т.к. CD ∥ оси ц. AB должна быть ⊥ оси ц., т.к. △ACB и ADB равнобедренные.

2) Чтобы радиус был наименьшим, необходимо, чтобы AB совпало с диаметром.

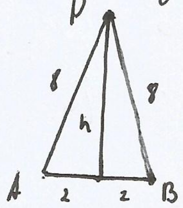




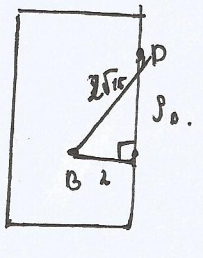
← Есть 2 варианта расположения D и C: или в разных подпространствах или в одном.

(Рисунки не в масштабе)

3) Найдем $\rho(D;(\alpha))$, где α – плоскость, содерж. A, B и ⊥ оси:



$h_D = \sqrt{64-4} = 2\sqrt{15}$



$\rho_D = \sqrt{60-4} = \sqrt{56}$

4) Аналогично найдём $\rho(C;(\alpha))$:

$h_C = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $\rho_C = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$.

Из рисунков п. 2 видно, что CD – это либо $\sqrt{56}-\sqrt{41}$, либо $\sqrt{56}+\sqrt{41}$.

Ответ: $2\sqrt{14}-\sqrt{41}$ или $2\sqrt{14}+\sqrt{41}$

Чистовик (лист №2)   Вариант 24

№1

1) S - сумма первых 9 членов а.п. $S = \frac{a_1 + a_1 + 8k}{2} \cdot 9 = 9a_1 + 36k$

$a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4k)(a_1 + 17k) = a_1^2 + 21ka_1 + 68k^2$

$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9k)(a_1 + 12k) = a_1^2 + 21ka_1 + 108k^2$

2) $$\begin{cases} a_1^2 + 21ka_1 + 68k^2 > S - 4 \\ a_1^2 + 21ka_1 + 108k^2 < S + 60. \end{cases}$$

3) $a_{10} \cdot a_{13}$ больше, чем $a_5 \cdot a_{18}$ как минимум на 40 (т.к. все числа целые). Однако из условий $a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$, а $a_5 \cdot a_{18} > S - 4$, видно, что $a_{10} \cdot a_{13} - a_5 \cdot a_{18} \leq 62$, а т.к. $40k^2 \leq 62$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $k > 0$, $\underline{k = 1}$

4) Теперь перепишем те ур-я из 2 и 1 пункта с $k = 1$:

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 6)^2 > 0 \quad (1) \\ a \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6}) \quad (2) \end{cases}$$

$(\approx 4{,}9)$

(1) $\rightarrow$ $a_1 \neq -6$

(2) $\rightarrow$ $a \in (-10{,}9; -1{,}1)$

Т.о. нам подходят a_1:

$\{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

Ответ: $\{-10; -9; -8; -7; \cancel{-6}; -5; -4; -3; -2\}$

Чистовик (лист №3)

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10). & (2) \end{cases}$$

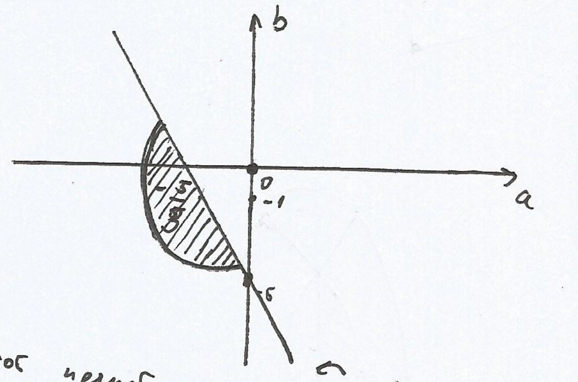
1) Из условия (2) видно, что $a^2+b^2 \le 10$, а значит, что $(x;y)$ может покрыть круг радиусом $\sqrt{10}$, из каждой точки которого строят ещё один круг с таким-же радиусом.

2) Везде ниже этой прямой будет

$-6a-2b > 10$,

и значит, что $a^2+b^2 \le 10$.

и решением будет часть круга с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$, отсечённая этой прямой.

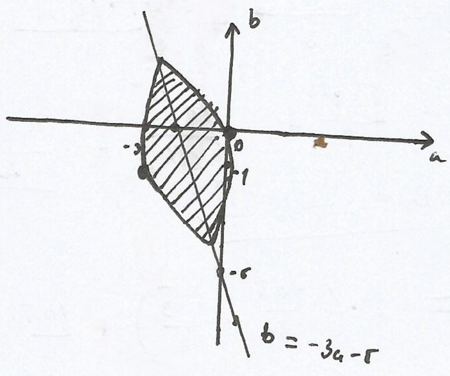


3) А когда мы находимся выше этой прямой, то $a^2+b^2 \le -6a-2b$:

$a^2+6a+9+b^2+2b+1 \le 10$

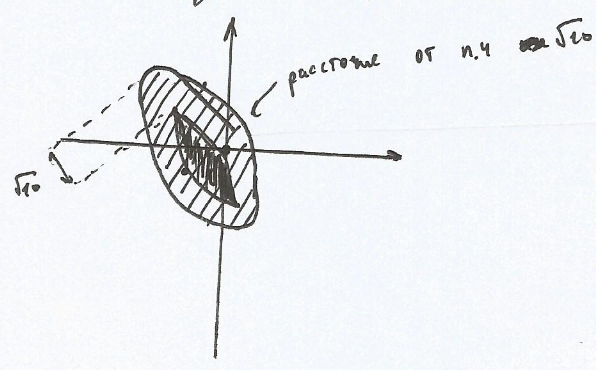
$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$ ← это - окружность с центром $(-3;-1)$ и $R=\sqrt{10}$.

4) Нарисуем оба этих круга на одном графике



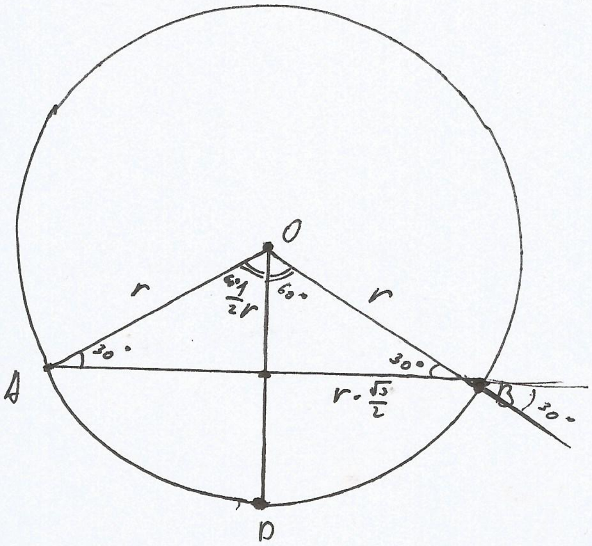
← это - симметрична относительно прямой $b=-3a-5$

5) Соответственно K выглядит так:



№3 (Продолжение)

6)



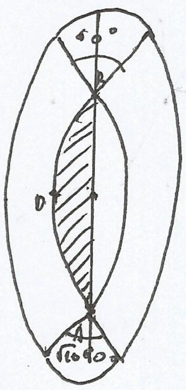
$$S(AOBD)=\frac{\pi r^2}{3}$$

$$S(AOB)=\cancel{2}\left(r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}r\cdot\cancel{2}=\frac{\sqrt{3}r^2}{4}$$

$$\cancel{\text{Т.о. } S(ABD)=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2}$$

$$\cancel{r=\sqrt{10}\Rightarrow S(ABD)=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 10=\frac{10\pi}{3}-\frac{10\sqrt{3}}{4}=\frac{10\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{2}}$$

7)

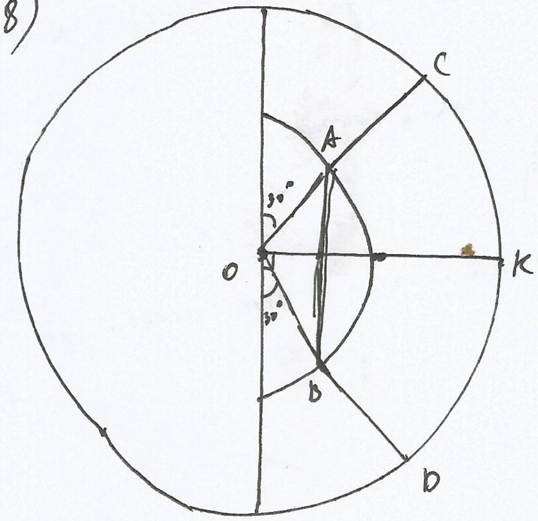


~~Площадь нарисованной фигуры~~

Найдём площадь краёв: из рисунка видно, что они под углом 60°. Т.о. их $S=\frac{\pi r^2}{6}=\frac{\pi 10}{6}=\frac{5\pi}{3}$.

$$\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$$

8)



$$S(OCDK)=\frac{\pi(2r)^2}{3}=\frac{4\cdot 10\pi}{3}=\frac{40\pi}{3}$$

$$S(OAB)=\frac{\sqrt{3}r^2}{4}=\frac{\overset{5}{\cancel{10}}\sqrt{3}}{\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$S(ACKDB)=\frac{40\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

9) $$S(M)=2\cdot\left(\frac{40\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{10\pi}{3}=\frac{80\pi}{3}-\frac{10\sqrt{3}}{2}+\frac{10\pi}{3}=$$

$$=30\pi-5\sqrt{3}$$

Ответ: $30\pi-5\sqrt{3}$

Черновик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)\end{cases}$$

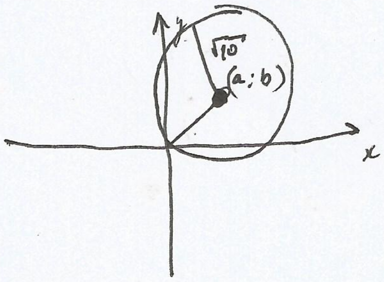
$-6a-2b=0$

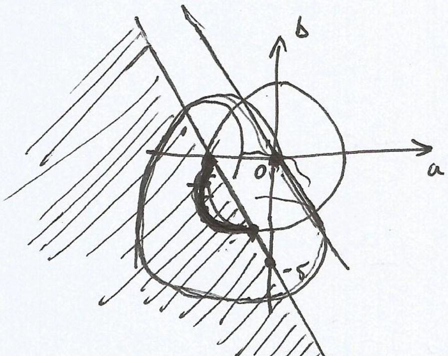
$b=-3a$

$b=-3a-5.$

$-6a-2b=10.$

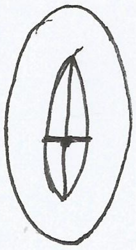
$-\frac{5}{3}$

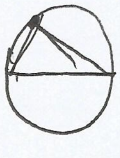


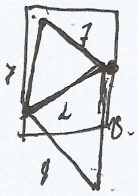


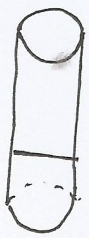
$-6a-2b\le 10$

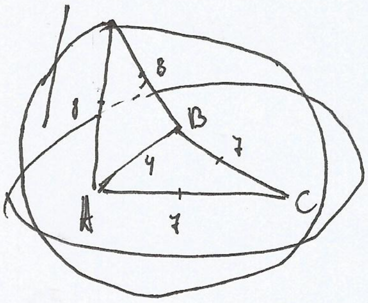
$-3a-5\le b$









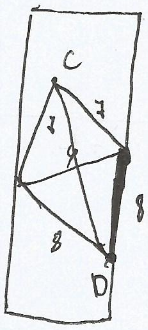


2. Наименьший радиус цилиндра — это 2, т.к. $|AB| \parallel \alpha$

A

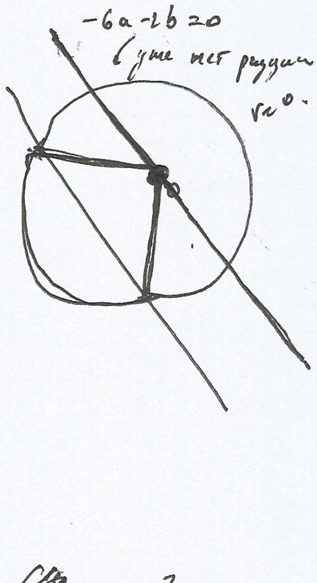
$a^2+b^2\le 6a-2b!$

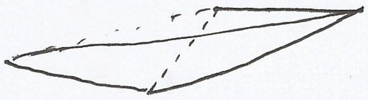
$a^2+b^2\le 6a-2b!$



$a^2=0+b^2$

$-6a-2b=0$ (уже нет радиуса $r=0$.



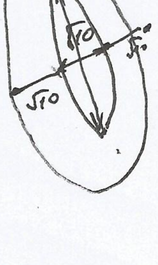


$a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10$

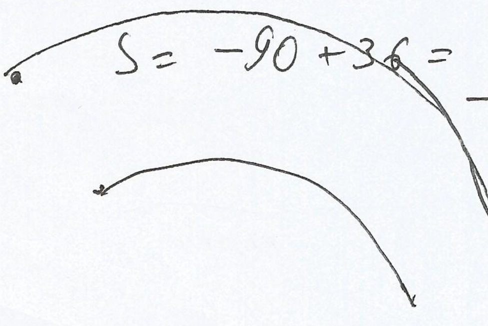
$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10.$

$\boxed{\text{СР}}$.

$-1.2-$



$S=-90+36=\underline{-64}$ $-2>-64$ -4



Чернвик.

S - сума перших 9 членів а. п. a_1

$\underbrace{a_1 \quad a_1+k \quad a_1+2k \quad a_1+3k}_{4}$ . . .

$\frac{a_1 + a_1 + 3k}{2} \cdot 4 = \boxed{a_1 + 6k}$

$\overbrace{1+2+3+4}^{10} + \overbrace{5+6}^{11} + \overbrace{7+8}^{15} =$

$S = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9$ $\qquad \frac{a_1 + a_1 + 8k}{2} \cdot 9 = \boxed{9a_1 + 36k}$

$S = 9a_1 + 36k$

$a_5 \cdot a_{18} > S - 4$;

$a_5 = (a_1 + 4k)$

$a_{18} = (a_1 + 17k)$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1k + 68k^2 > 9a_1 + 36k - 4 \\ a_1^2 + 21a_1k + \end{cases}$$

$\times \begin{array}{r} 12 \\ 9 \\ \hline 108 \end{array}$

$a_{10} \cdot a_{13} - a_5 \cdot a_{18} \leq 64$.

$\cancel{40k^2}$

$\geq S - 4 + f$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$(a + 6)^2 > 0$

$40k^2 = S + 60 - d$

$40k^2 = S + 56 + f - d$.

$-6 \pm \sqrt{36 - 12} = -6 \pm \sqrt{24}$ $\approx \boxed{4{,}9}$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 = 0$

$-6 - 4{,}9$

$-6 + 4{,}9$

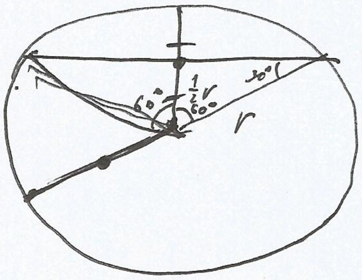
$-6 \pm \sqrt{36 - 12} = -6 \pm \sqrt{24} =$

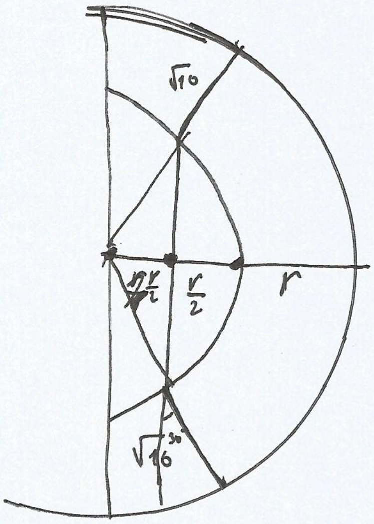
$-1{,}1$

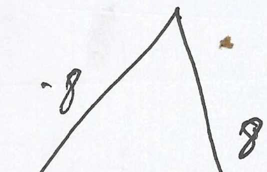
$= -6 \pm 2\sqrt{6}$

Черновик.

$\sin(120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$







$$\frac{\sqrt{10\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 6}}{\cancel{4}\,\cancel{2}} = \frac{h}{\cancel{2}}$$

$h = \sqrt{60}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101212**

ID профиля: **814682**

Вариант 24

1) Т.к. НОД$(a; b; c) = 33$,

$a = 33 \cdot 3^{k_1} \cdot 11^{t_1}$
$b = 33 \cdot 3^{k_2} \cdot 11^{t_2}$
$c = 33 \cdot 3^{k_3} \cdot 11^{t_3}$.

Если во всех 3 числах k или t не равны 0, то 33 – уже не НОД.

Следовательно нам минимум в одном из них $t = 0$, а в другом $k = 0$.

2) Найдем количество таких троек в упорядоченном виде:

$a = 33 \cdot 3^{k_1} \cdot 11^{t_1}$
$b = 33 \cdot 3^{k_2} \cdot 11^{0}$
$c = 33 \cdot 3^{0} \cdot 11^{t_3}$, а потом домножим на 6.

$$НОК = 33 \cdot 3^{\max(k_1, k_2)} \cdot 11^{\max(t_1, t_3)} = 3^{19} \cdot 11^{15}.$$

$$\begin{cases} \max(k_1, k_2) = 18 \\ \max(t_1, t_3) = 14. \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \exists\, k_1 = 18, \text{ то есть 19 вариантов для } k_2. \\ \exists\, k_2 = 18, \text{ то есть 19 вариантов для } k_1. \end{array}\right.$ → 38 вариантов.

$\left.\begin{array}{l} \exists\, t_1 = 14, \text{ то есть 15 вар для } t_3 \\ \exists\, t_3 = 14, \text{ то есть 15 вар для } t_1 \end{array}\right\} \to 30$ вар.

$38 \cdot 30 = 1140$ вар.

$1140 \cdot 6 = 6840$ вар, когда 3 числа различные ~~но в одном из них 3 числа равны, а~~

3) Также может получиться, что

$a = 33 \cdot 3^{k_1} \cdot 11^{t_1}$
$b = 33 \cdot 3^{k_2} \cdot 11^{t_2}$
$c = 33$

Аналогично получим 6840 вар.

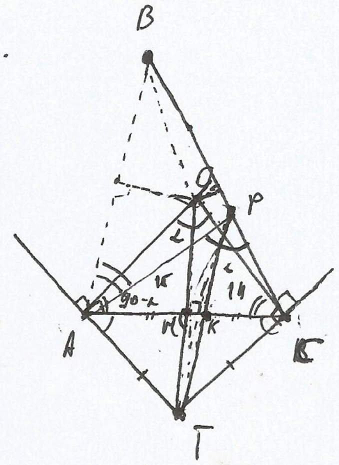
4) Однако мы забыли учесть, что некоторые числа повторяются. Всего таких повторений было: $(33 \cdot 3^{18} \cdot 11^{14}; 33 \cdot 3^{18} \cdot 11^{14}; 33)$; $(33; 33; 3 \cdot 3^{18} \cdot 11^{14})$, значит, из подсчитанных 13680 вариантов надо вычесть $3 \cdot 2 =$ $= 13674$.

(Т.к. a, a, b имеет только 3 разл. послед.)

Ответ: 13674

1

М – сер AC.



№6.

$AГ = ГC$, т.к это - касательные

$\widehat{AOC} = \widehat{APC}$, т.к. они опираются на общую дугу.

Т.к. $\frac{S(APK)}{S(PKC)} = \frac{16}{14}$, $\frac{AK}{KC} = \frac{16}{14}$.

а) Т.о. необходимо найти $\frac{BP}{PC}$ и тогда $S(ABC) = 30 \cdot \left(\frac{BP+PC}{PC}\right) = 30 + 30 \cdot \frac{BP}{PC}$

$\boxed{\text{Ответ: } 30 + 30\frac{BP}{PC}}$

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{(x+1)^2}(29-x).$$

$$\frac{\sin}{\cos}=\frac{3}{5}$$

$$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{2\log_{29-x}(x+1)}$$

$$(\sin)^2=\left(\frac{3}{5}\cos\right)^2$$

$$\sin^2 \cancel{+\cos^2 x}+\frac{9}{25}\cos^2 x+\cos^2$$

$$\cancel{\frac{x+49}{7}}$$

$$2\log_{29-x}(x+49)-2\log_{29-x}7=\frac{1}{2\log_{29-x}1}.$$

$$1=\frac{33}{25}\cos^2 x$$

$$2\log_{29-x}(x+49)-2\log_{29-x}7=\frac{1}{2\log_{29-x}(x+1)}!$$

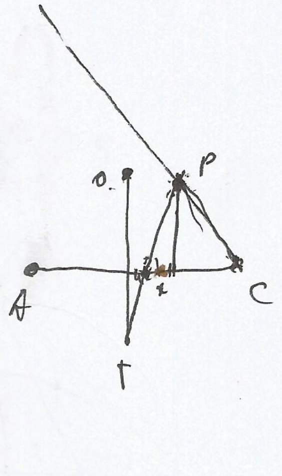
$$\boxed{\cos x=\frac{5}{\sqrt{33}}}$$

$$2\log_{29-x}(x+49)\cdot 2\log_{29-x}(x+1)-2\log_{29-x}7\cdot\log_{29-x}(x+1)=1!$$

$$\boxed{a,\ b,\ c=33}$$

~~3 2 1~~
~~3 1 2~~
~~1 3 2~~

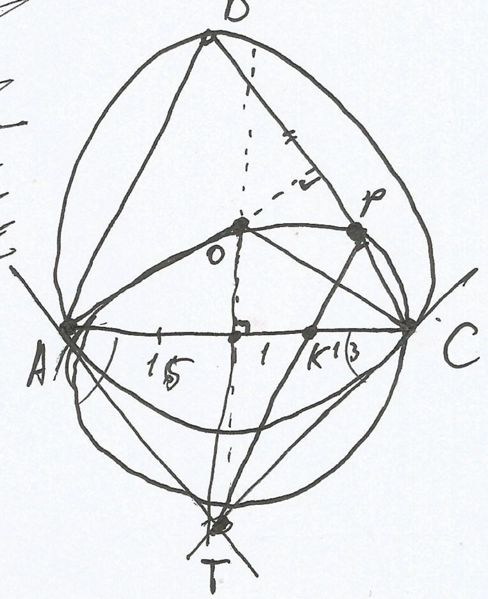
$$\frac{S(AOK)}{S(OKC)}=\frac{16}{14}$$

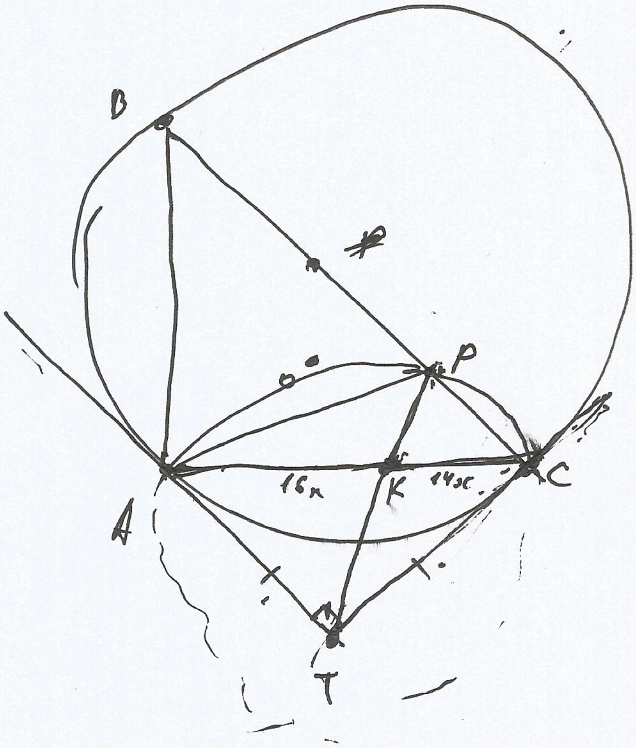


$$\begin{array}{r} 38 \\ \times\ 3 \\ \hline 114 \end{array}$$

Черновик.

a a b
a b a
b a a





$K_1 =$

Мод $(a; b; c)$...

$НоК = 3^{19} \cdot 11^{15}$.

НОК - число, на кот. делятся a, b, c

$33 \cdot 3^{\max(K_1; K_3)} \cdot 11^{\max(t_1; t_2)}$

$\left[\begin{array}{l} K_1 = 18 \\ K_3 = 18 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 10 \\ t_2 = 10 \end{array}\right.$

$a = 33 \cdot 3^{K_1} \cdot 11^{t_1}$

$b = 33 \cdot 11^{t_2}$

$c = 33 \cdot 3^{K_3}$

При этом.

$K_1 = 18 \Rightarrow K_3 \in 1 \ldots 18$.

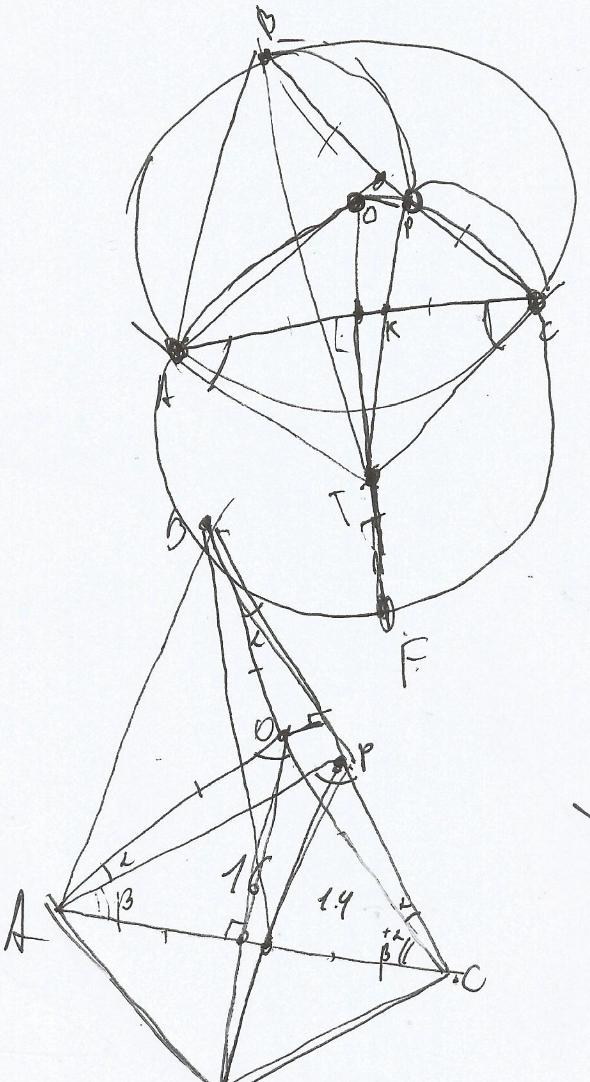
$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right)\left(\sqrt{29-x}\right)\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x)$$

$$2\log_{29-x}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right)\left(\sqrt{29-x}\right)\right) = \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)$$

$$4\log_{29-x}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right)\left(\sqrt{29-x}\right)\right) = \frac{1}{\log_{(\cancel{29-x})}(\cancel{-x-1})}$$

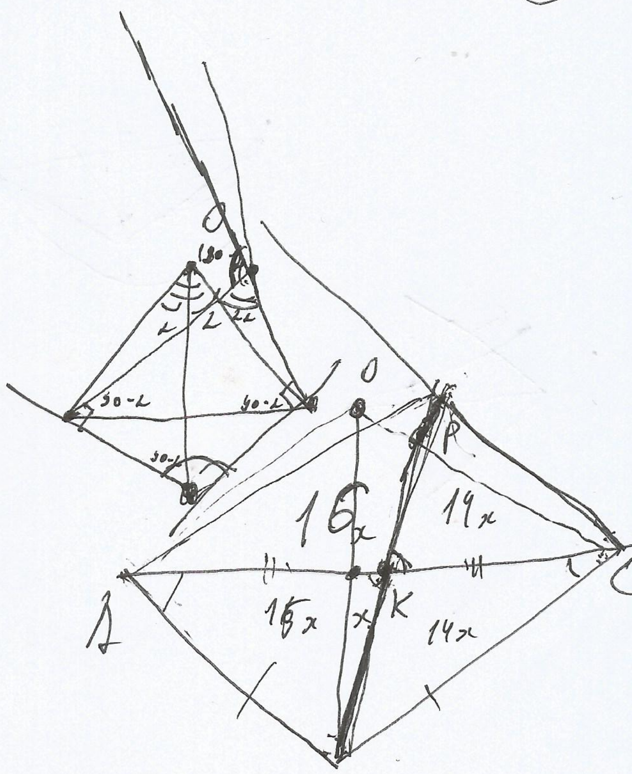
$$4\log_{(29-x)}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right)\sqrt{29-x}\right)\cdot\log_{(29-x)}(-\cancel{2}x-1) - \log_{(29-x)}(-\cancel{29}-x) = 0$$

$\frac{28}{34}$



$$\frac{AK}{KC} = \frac{16}{14}$$

$$\frac{S(AOK)}{S(}$$



~~Чистовик~~ ~~Вариант 24~~

Черновик.

№5

Разберём 1 случай, когда

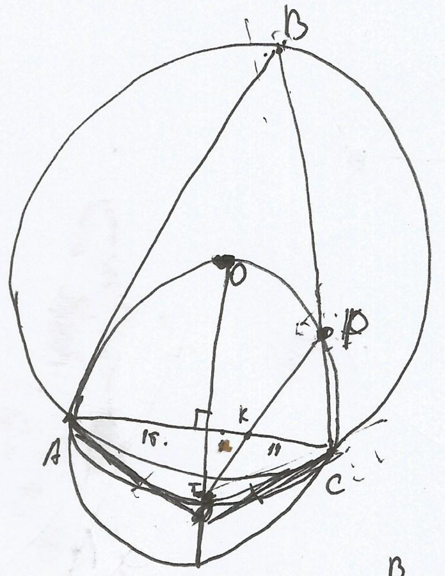
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x), \\ \log_{(x+1)^2}(29-x)+1 = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x) \\ \log_{(x+1)^2}\left((29-x)\cdot(x+1)^2\right) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(x+1)^2}(29-x) \\ \log_{(x+1)^2}\left((29-x)(x+1)^2\right) = \log_{\sqrt{\frac{x}{2}+7}}(-x-1) \end{cases}$$

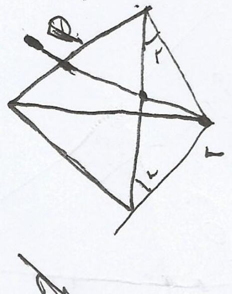
$x \in (-1; -\infty)$

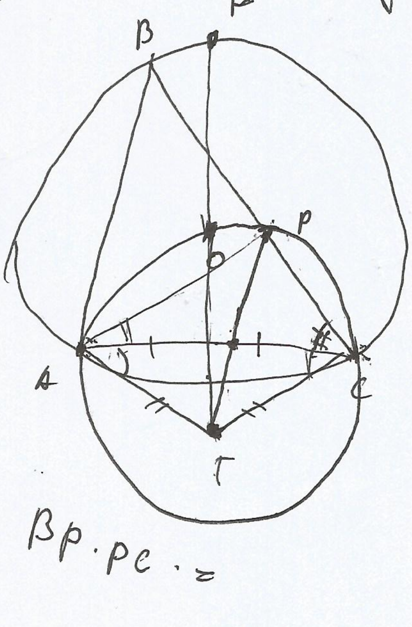
$\boxed{(-\infty; -1)}$

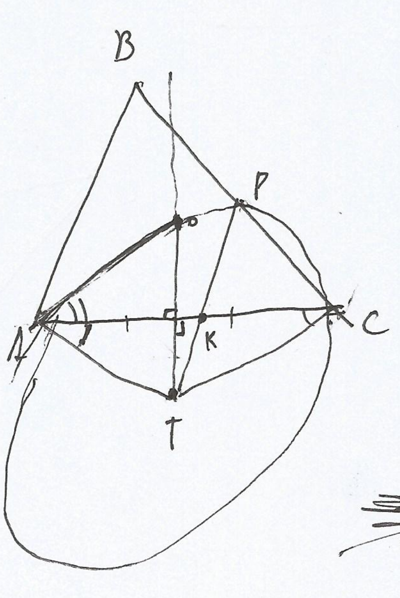


$$\boxed{\frac{BP}{PC} = ?}$$

$AB^2 = \cancel{BP \cdot PC}\, BC \cdot BP.$







$BP \cdot PC =$