Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101073**

ID профиля: **137286**

Вариант 24

Чистовик. Лист 1 из 5

Задача 1.

r - разность арифметической прогрессии.

$a_9 = a_1 + 8r$

$S = \frac{(a_1+a_9)\cdot 9}{2} = \frac{(a_1+a_1+8r)\cdot 9}{2} = (a_1+4r)\cdot 9 = 9a_1 + 36r.$

$a_5 = a_1 + 4r$

$a_{18} = a_1 + 17r$

$a_5 a_{18} = (a_1+4r)(a_1+17r) = a_1^2 + 21ra_1 + 68r^2$

$a_{10} = a_1 + 9r$

$a_{13} = a_1 + 12r$

$a_{10} a_{13} = (a_1+9r)(a_1+12r) = a_1^2 + 21ra_1 + 108r^2$

$\begin{cases} a_5 a_{18} > S-4, \\ a_{10} a_{13} < S+60; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 21ra_1 + 68r^2 > 9a_1 + 36r - 4, \\ a_1^2 + 21ra_1 + 108r^2 < 9a_1 + 36r + 60; \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1^2 + 21ra_1 - 9a_1 - 36r) > -68r^2 - 4, \\ (a_1^2 + 21ra_1 - 9a_1 - 36r) < -108r^2 + 60. \end{cases}$

$-68r^2 - 4 < (a_1^2 + 21ra_1 - 9a_1 - 36r) < -108r^2 + 60.$

Заметим, что $-68r^2 - 4 < -108r^2 + 60.$

$40r^2 < 64$

$r^2 < 1,6$

$r^2 < \frac{16}{10}$

$r < \frac{4\sqrt{10}}{10}.$

$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$

$3 < \sqrt{10} < 4$

$\frac{12}{10} < \frac{4\sqrt{10}}{10} < \frac{16}{10} \Rightarrow r < 1,6.$

21101073 (U137286 M1303258)

$r = a_2 - a_1$. Т.к. a_2, a_1 - целые ~~ч~~ числа, r - целое.

Т.к. прогрессия возрастающая, $r > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} r < 1{,}6 \\ r > 0 \\ r \in \mathbb{Z} \end{array}\right| \Rightarrow r = 1.$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 - 9a_1 - 36 > -68-4, \\ a_1^2 + 21a_1 - 9a_1 - 36 < -108+60; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0, \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+6)^2 > 0, \\ (a_1 - (-6+2\sqrt{6}))(a_1 - (-6-2\sqrt{6})) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -6, \\ -6-2\sqrt{6} < a_1 < -6+2\sqrt{6}. \quad (1) \end{cases}$$

$$a_1^2 + 12a_1 + 12 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 - 12 = 24 = (2\sqrt{6})^2$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = -6+2\sqrt{6} \\ a_1 = -6-2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$\sqrt{576} < \sqrt{600} < \sqrt{625}$

$24 < \sqrt{600} < 25$

$2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$

$-11 < -6-2\sqrt{6} < -10{,}8$

$-1{,}2 < -6+2\sqrt{6} < -1$

По условию $a_1 \in \mathbb{Z}$. ~~Уравнению~~ Неравенству (1) удовлетворяют следующие целые числа: $-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2$.

Таким образом, a_1 может принимать следующие значения: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$.

$\boxed{\text{Ответ: } -10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2.}$

Чистовик. Лист 3 из 5

Задача 3.

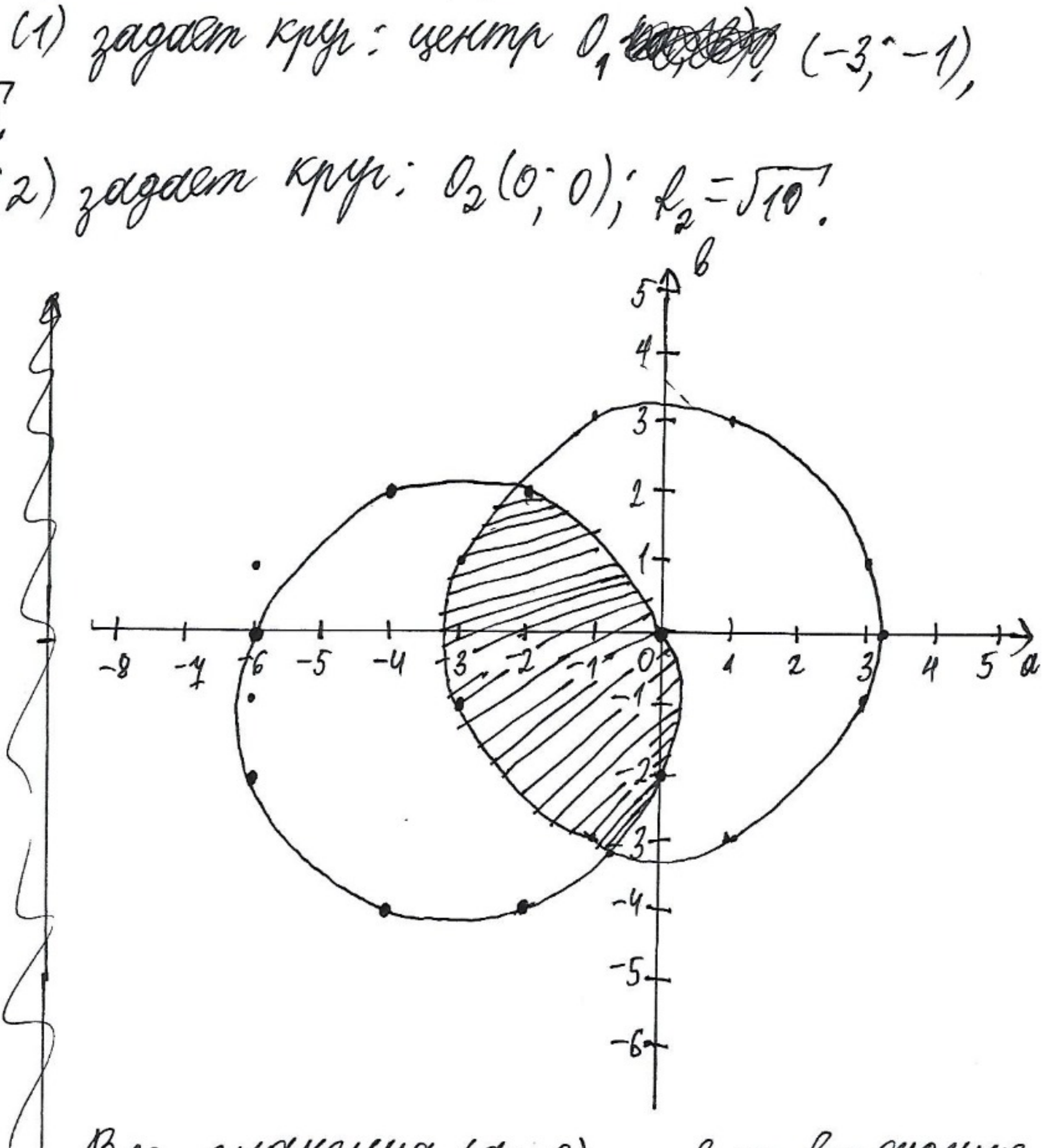
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10,\\ a^2+b^2\le -6a-2b,\\ a^2+b^2\le 10;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 10, \quad (3)\\ (a^2+6b+9)+(b^2+2b+1)\le 10, \quad (1)\\ a^2+b^2\le 10. \quad (2)\end{cases}$$

В системе координат $(a;b)$:

Неравенство (1) задает круг: центр O_1 $(-3;-1)$, радиус $R_1=\sqrt{10}$.

Неравенство (2) задает круг: $O_2(0;0)$; $R_2=\sqrt{10}$.



Все значения $(a;b)$, удовлетворяющие неравенствам (1) и (2) находятся в заштрихованной области.

21101073 (U137286 M1303258)

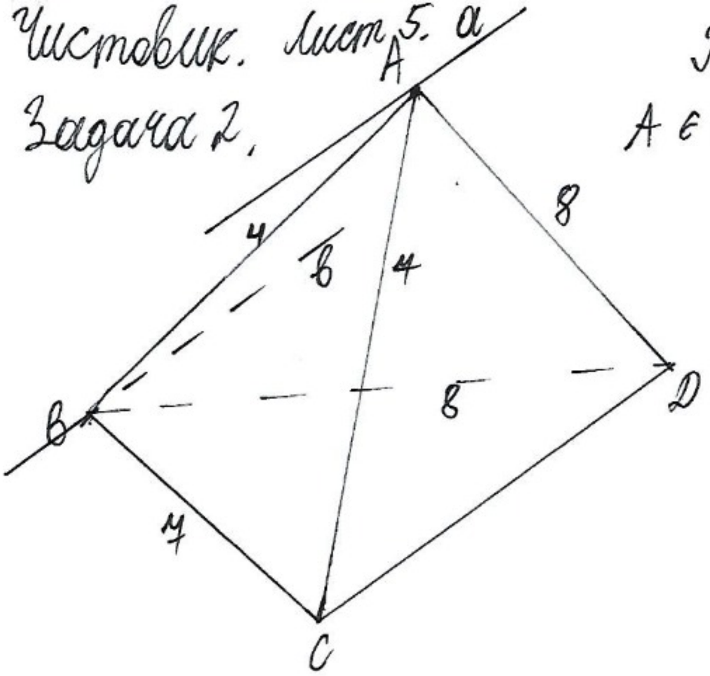
Неравенство (3) задает круг: центр $(x;y)$, $R_3=\sqrt{10}$.

Чистовик, лист 4 из 5

Этот круг должен иметь хотя бы одну общую точку с заштрихованной областью. Это произойдет, когда ~~точка (x; y) расположена не дальше, чем~~ точка (x; y) в заштрихованной области или когда расстояние от (x; y) до границы заштрихованной области не превосходит $\sqrt{10}$.

Чистовик. лист 5. а

Задача 2.



Т.к. $A \in$ цилиндру, $A \in a$, $a \parallel CD$, $a \in$ цилиндру.

Т.к. $B \in$ цилиндру, $B \in в$, $в \parallel CD$, $в \in$ цилиндру.

$\rho(CD, в)$ – высота $\triangle BCD$.

$\rho(CD, a)$ – высота $\triangle ACD$.

$\triangle BCD = \triangle ACD$ по 3 сторонам:

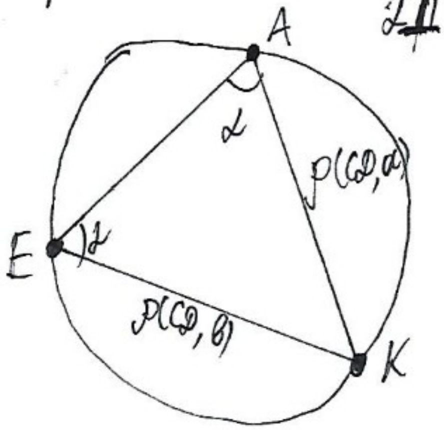
1) CD – общая

2) $BC = AC = 7$,

3) $BD = AD = 8$.

$\boxed{\rho(CD, в) = \rho(CD, a).}$

Некоторое сечение α ($A \in \alpha$, $\alpha \perp$ оси цилиндра)



$\alpha \cap в = E$

$\alpha \cap CD = K$

$2R = \dfrac{\rho(CD, a)}{\sin \alpha}$.

21101073 (U137286 M1303258)

Черновик: 1)

$a_1, r.$

$S=\frac{(a_1+(a_1+8r))\cdot 9}{2}=\frac{(2a_1+8r)\cdot 9}{2}=(a_1+4r)\cdot 9=9a_1+36r.$

$a_5=a_1+4r$

$a_{18}=a_1+17r$

$(a_1+4r)(a_1+17r)>9a_1+36r-4$

24^2

$a_1^2+21ra_1+68r^2>9a_1+36r-4$

$a_{10}=a_1+9r$

$a_{13}=a_1+12r$

$a_1^2+21ra_1+108r^2<9a_1+36r+60$

$(a_1^2+21ra_1-9a_1-36r)>-68r^2-4$

$(a_1^2+21ra_1-9a_1-36r)<-108r^2+60$

$-108r^2+60>-68r^2-4$

$40r^2<64$

$r^2<16$

$r<\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$3<\sqrt{10}<4$

$\frac{6}{5}<\frac{2\sqrt{10}}{5}<\frac{8}{5}.$

$r=1.$

$\begin{cases} a_1^2+21a_1-9a_1-36>-68-4 \\ a_1^2+21a_1-9a_1-36<-108+60 \end{cases}$

-48

$a_1^2+12a_1+36>0$ $\quad (a_1+6)^2>0$ $\quad a_1\neq -6.$

$a_1^2+12a_1+12<0$

$\frac{D}{4}=36-12=24=(2\sqrt{6})^2$

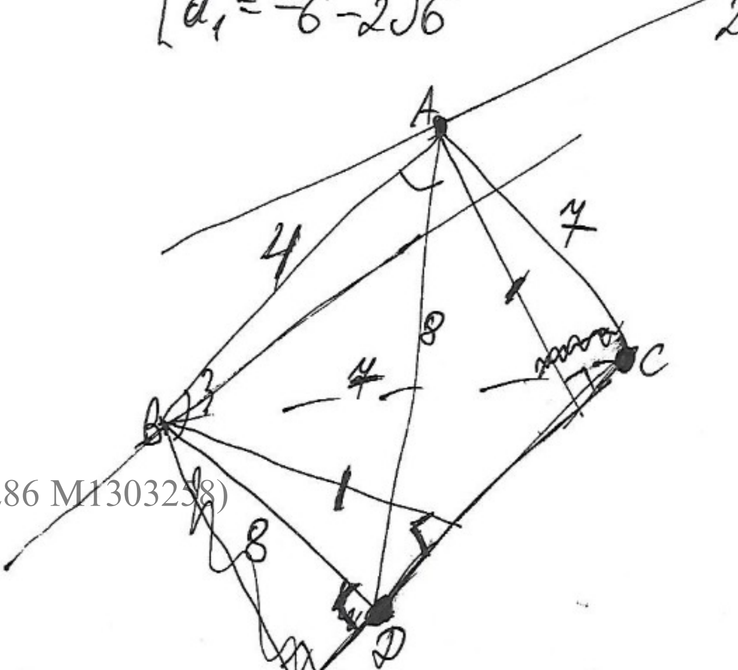
$\left[\begin{array}{l} a_1=-6+2\sqrt{6} \\ a_1=-6-2\sqrt{6} \end{array}\right.$

$2<\sqrt{6}<3$

$-6+$

$24<\sqrt{600}<25.$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$



$\cos = \frac{1}{4}$

$\sin B=\frac{1}{4}$

21101073 (U137286 M1303258)

Черновик(2)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ 0<a^2+b^2\le -6a-2b\\ a^2+b^2\le 10\end{cases}$$

$-6a-2b>0$

$-3a-b>0$

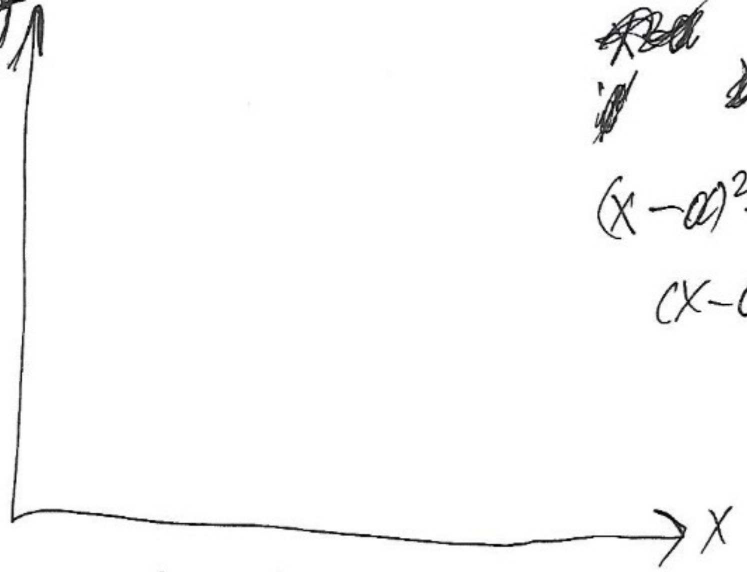
$3a+b<0$

$$x^2+y^2-2xa-2yb+\underbrace{a^2+b^2}_{\le 10,\ \le -6a-2b}$$

$$\frac{c+d}{2}\ge\sqrt{cd}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2\ge 2(x-a)(y-b)$$

$$(x-a)(y-b)\le 5.$$



$(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$

$$a^2+b^2\le -6a-2b \Rightarrow (a^2+6a+9)+(b^2+2b+1)\le 10.$$

$$\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10\\ a^2+b^2\le 10\\ (a-x)^2+(b-y)^2\le 10.\end{cases}$$

$a^2+b^2=(a+3)^2+(b+1)^2$

$\begin{cases}a^2+b^2=10\\ \cancel{a+3}\end{cases}$ $6a+2b=-10$

$\begin{cases}6a+9+2b+1=0\\ a^2+b^2=10.\end{cases}$ $3a+b=-5.$ $b=-5-3a.$

$a^2=10-b^2$

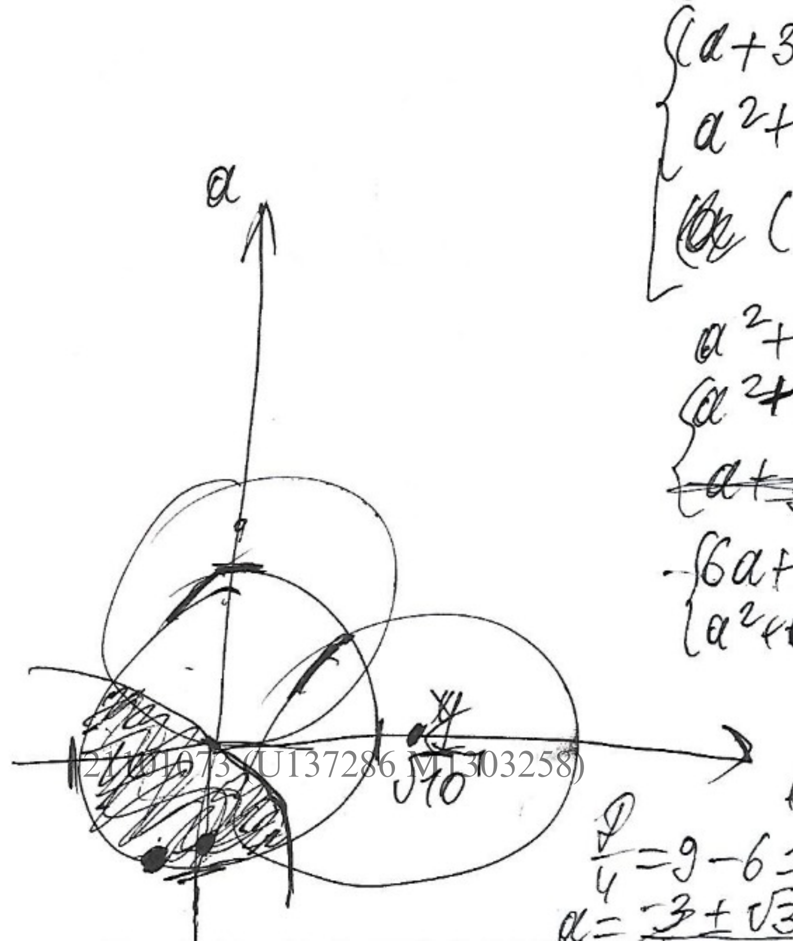
$a^2+9a^2+25+30a=10.$

$10a^2+30a+15=0.$

$2a^2+6a+3=0.$

$\frac{D}{4}=9-6=3.$

$a=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$



21101073 (U137286 M1303258)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101073**

ID профиля: **137286**

Вариант 24

Чистовик. Лист 1 из 4.

Задача 4.

Т.к. $НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15}$, среди простых делителей чисел a; b и c могут быть только 3 и 11.

$a=3^n\cdot 11^k$, $0\le n\le 19$, $0\le k\le 15$.

$b=3^l\cdot 11^m$, $0\le l\le 19$, $0\le m\le 15$.

$c=3^r\cdot 11^s$, $0\le r\le 19$, $0\le s\le 15$.

Т.к. $НОД(a;b;c)=3\cdot 11$, $n\ge 1$, $l\ge 1$, $r\ge 1$, $k\ge 1$, $m\ge 1$, $s\ge 1$.

Т.к. $НОД(a;b;c)=33$, а в разложении чисел a, b, c на простые множители встречаются только 3 и 11, одно из чисел a, b, c равно 33.

~~I. $a=33$.~~

$$\cancel{\left[\begin{array}{l}(1)\begin{cases} b=3^{19}\cdot 11^{15} \\ c=3^n\cdot 11^k,\ 1\le n\le 19,\ 1\le k\le 15\end{cases}\\ (2)\begin{cases} b=3^{19}\cdot 11^k,\ 1\le k\le 15 \\ c=3^n\cdot 11^{15},\ 1\le n\le 19\end{cases}\\ (3)\begin{cases} b=3^n\cdot 11^k,\ 1\le n\le 19,\ 1\le k\le 15 \\ c=3^{19}\cdot 11^{15}\end{cases}\\ (4)\begin{cases} b=3^n\cdot 11^{15},\ 1\le n\le 19 \\ c=3^{19}\cdot 11^k,\ 1\le k\le 15.\end{cases}\end{array}\right.}$$

~~Система (1) имеет $19\cdot 15=285$ решений.~~

~~Система (2) имеет $15\cdot 19=285$ решений.~~

I. $a=33$, $b=3^{19}\cdot 11^{15}$, $c=3^n\cdot 11^k$, $1\le n\le 19$, $1\le k\le 15$.

Таких троек $19\cdot 15=285$.

21101077 (U137286 M1303259)

II. $a=33$, $b=3^{19}\cdot 11^k$, $1\le k\le 15$, $c=3^n\cdot 11^{15}$, $1\le n\le 19$.

Таких троек $19\cdot 15=285$.

Совпадения: $(33;\ 3^{19}\cdot 11^{15};\ 3^n\cdot 11^{15})$ — таких троек ~~15~~ 19.

Вх Чистовик. Лист 2 из 4.

Всего троек $285+285-19=281+270=\cancel{555}.551$

Если в и с поменять местами, количество троек увеличится до $551\cdot 2-1=\cancel{1099}\,\cancel{1109}\,1101$ (совпадения: $в=с=$ $=3^{19}\cdot 11^{15}$).

Если $a=33$, троек ~~1022~~ ~~1109~~. 1101

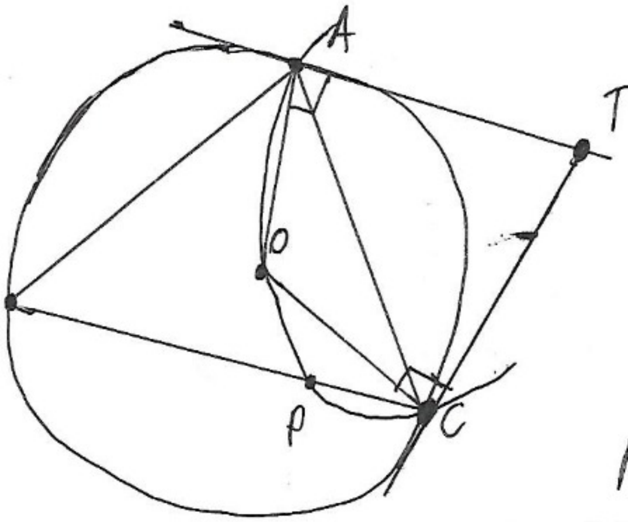
Если $в=33$, очевидно, что троек тоже ~~1022~~ ~~1109~~ 1101

Если $c=33$, то троек ~~1099~~ ~~1109~~. 1101

Всего троек $1101\cdot 3=\cancel{3321}.3303$

$\boxed{\text{Ответ: } 3303.}$

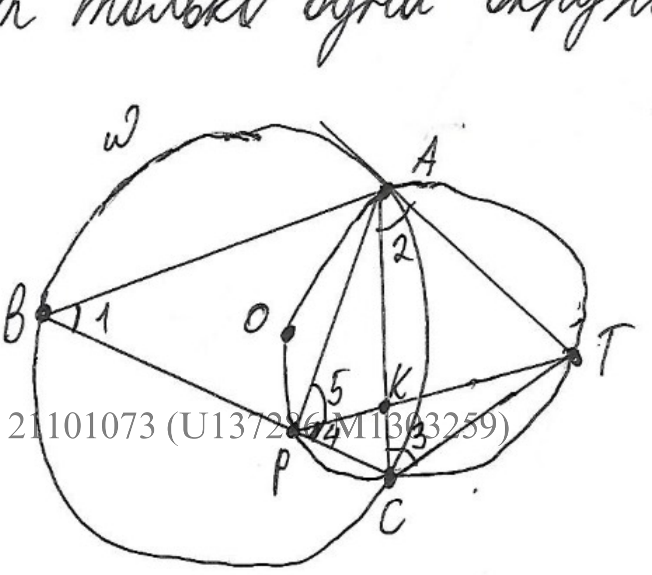
Задача 6.



$\angle OAT=\angle OCT=90^\circ$ (св-во радиуса, провед. в т. кас.)

$\angle OAT+\angle OCT=90^\circ \Rightarrow O; A; C; T$ лежат на одной окр.

P лежит на той же окр., т.к. через три точки A, O, C проходит только одна окружность.



21101073 (U137286M1303259)

$\angle 1$ - впис. (окр. ω) $\Rightarrow \angle 1=\frac{\smile AC}{2}$

$\angle 2, \angle 3$ - углы между касат. и хордой (окр. ω) $\Rightarrow \angle 2=\angle 3=\frac{\smile AC}{2}$

$\Rightarrow \angle 1=\angle 2=\angle 3$

$\angle 2=\angle 4$, $\angle 3=\angle 5$ (впис. углы, опир. на одну дугу (во II-ой окр.)).

$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5.$

Черновик (3)

~~$\left(\frac{x}{7}+7\right)^{\sqrt{29-x}} = (29-x)^{(x+1)^2}$~~

$\log_a b = \log_c d$

$a^n = b \quad c^n = d$

$\log_a b^2, \quad \log_{c^2} a, \quad \log_b c$

$2\log_a b, \quad \frac{1}{2}\log_c a, \quad \log_b c$

$2\log_a b = \frac{1}{2}\log_c a$

$4\log_a b = \log_c a$

$\log_a b^4 = \log_c a$

$\log$

ОДЗ:

$\frac{x}{7}+7 \geq 0$, $\neq 1$

$\boxed{x \geq -49}$

$x+49 \neq 7$

$\boxed{x \neq -42}$

$-x-1 > 0$, $\neq 1$

$-x > 1$

$\boxed{x < -1}$

$29-x > 0$

$\boxed{x < 29}$

$\frac{x+49}{7}$

$-x-1 = t-30$

$29-x = t$

$-t = x-29$

$-\frac{t}{7} = \frac{x-29}{7}$

$+\frac{29+49}{7}$

$= \frac{78}{7}$

$AC = 15x = AK + CK = 7x + 8x.$ $\boxed{\text{Чистовик.}}$ Лист 4 из 4.

$225x^2 = 64 \cdot \frac{17}{14} + 49 \cdot \frac{17}{14} - 2 \cdot 56 \cdot \frac{17}{14} \cdot \frac{8}{17}$

$225x^2 = \frac{17}{14}(64 + 49) - \frac{112 \cdot 8}{14}$

$225x^2 = \frac{113 \cdot 17 - 112 \cdot 8}{14}$ $\quad 225x^2 = \frac{112 \cdot (17 - 8) + 17}{14}$

$225x^2 = \frac{1025}{14}$

$x^2 = \frac{1025}{14 \cdot 225}$

$x^2 = \frac{41}{14 \cdot 9}$

$x = \sqrt{\frac{41}{14}} \cdot \frac{1}{3}.$

$AC = 15x = 5\sqrt{\frac{41}{14}} = \frac{5\sqrt{41 \cdot 14}}{14} = \frac{5\sqrt{574}}{14}.$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{5\sqrt{574}}{14}.}$

21101073 (U137286 M1303259)

Черновик (1).

$a = 33 \cdot a_1$ Наим. ст. 3, 11 – 1.

$b = 33 \cdot b_1$ Наиб. ст. 3: 19, 11: 15.

$c = 33 \cdot c_1$

$$\begin{cases} a = 33 \\ b = 3^{19} \cdot 11^{15} \\ c = 3^n \cdot 11^k, \ 1 \le n \le 19, \ 1 \le k \le 15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 33 \\ b = 3^{19} \cdot 11^n, \ 1 \le n \le 19 \\ c = 11^{15} \cdot 3^k, \ 1 \le k \le 15 \end{cases}$$

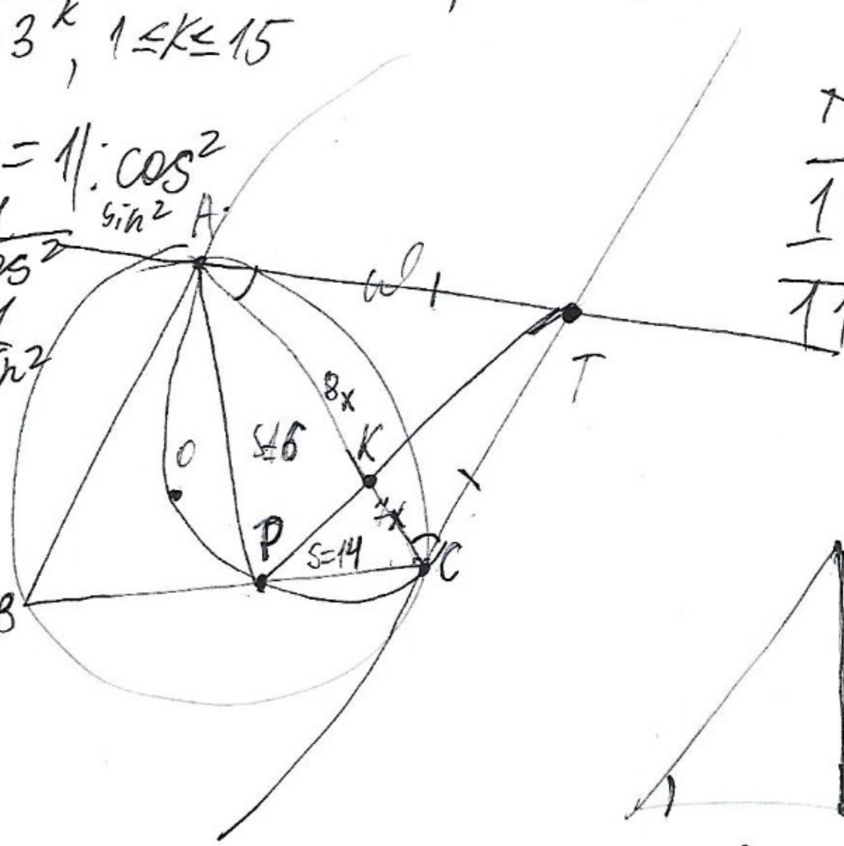
$33; \ 3^{19} \cdot 11^{15}; \ 3^n \cdot 11^k, \ n \le 19, k \le 15$

$33; \ 3^{19} \cdot 11^n;$

$\sin^2 + \cos^2 = 1 \,|\, : \cos^2$; $\sin^2$

$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$1 + ctg^2 = \frac{1}{\sin^2}$



$555 \cdot 2 = 1110$

$1110 - 1 = 1109$

$225 : 25 = 9$

$225 \cdot 5 = 1125$

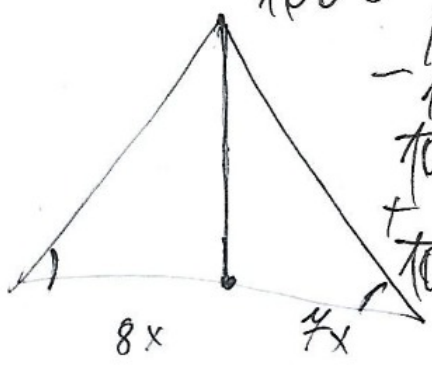
$1025 : 25 = 41$

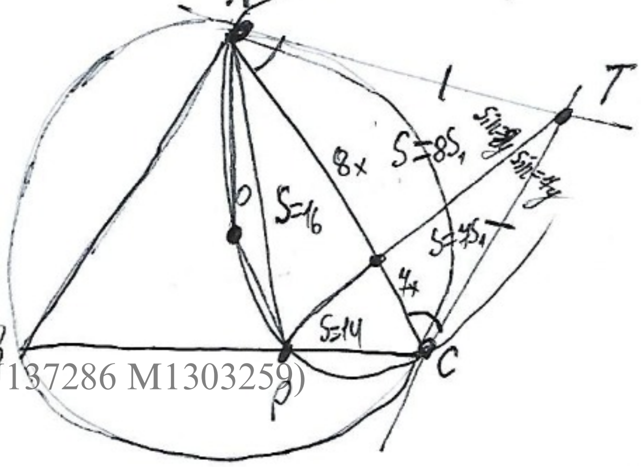
$112 \cdot 9 = 1008$

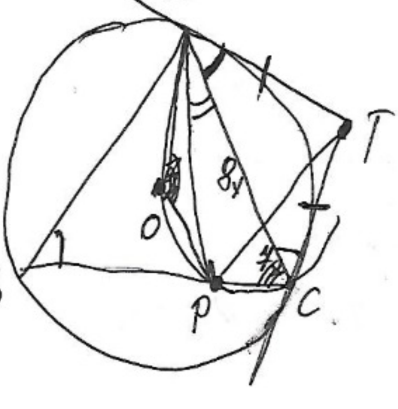
$1120 - 112 = 1008$

$1008 + 17 = 1025$

$41 \cdot 14 = 574$



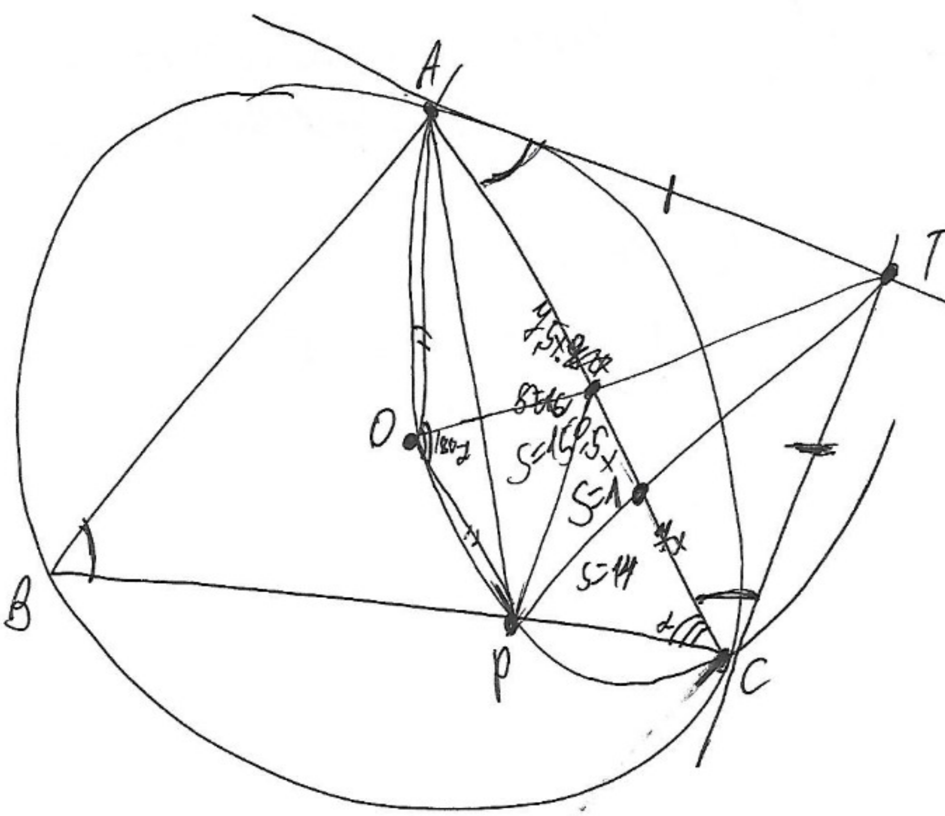




21101073 (U137286 M1303259)

Черновик(2)

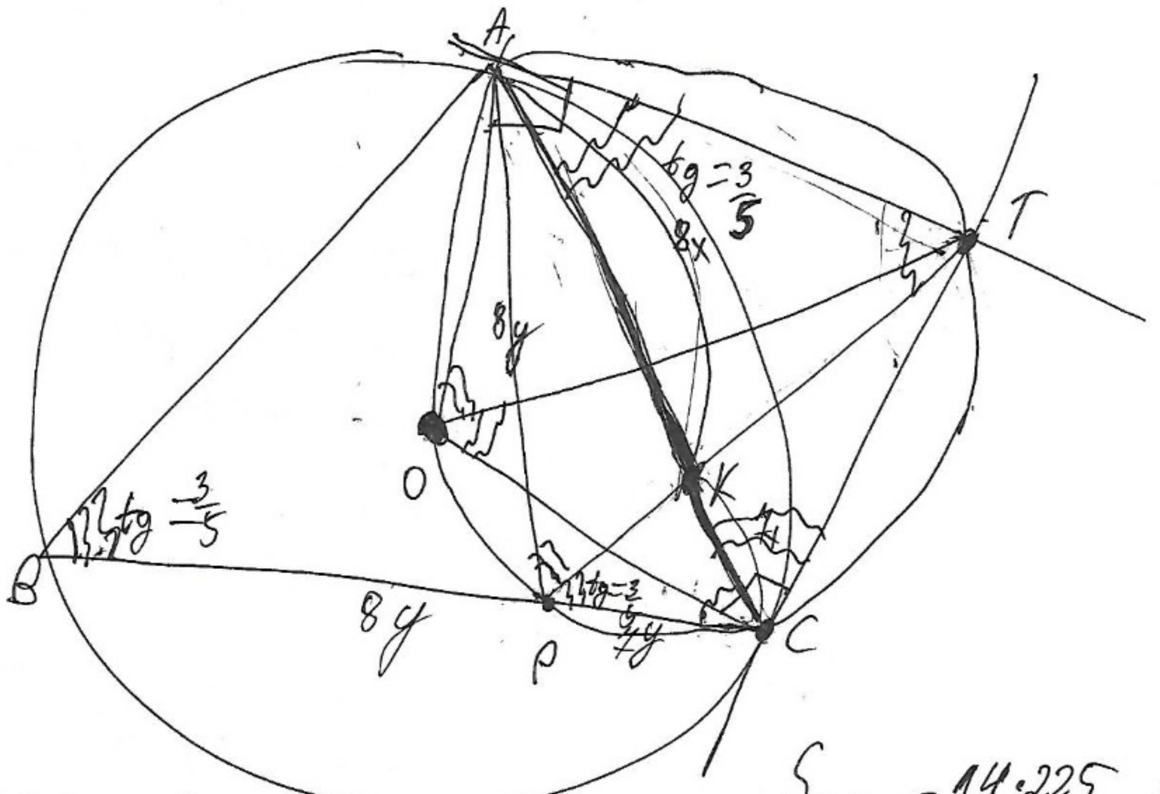
$\left(\frac{8}{17}\right)^2+\left(\frac{15}{17}\right)^2=\frac{64+225}{289}$



$\begin{array}{r} 1120 \\ -112 \\ \hline 1008 \end{array}$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$

$\begin{array}{r} 64 \\ +49 \\ \hline 113 \end{array}$



$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ |:\cos^2\alpha$

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$S_{ABC}=\frac{14\cdot 225}{49}=\frac{450}{7}$.

$7y\cdot 8y\cdot t\ldots=1\Rightarrow y$.

21101073 (U137286 M1203259)

$\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту, провед. из точки $P \Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{8}{7}. \Rightarrow \frac{CK}{AC} = \frac{7}{7+8} = \frac{7}{15}.$

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$ (по двум равным углам):

1) $\angle BCA$ - общий

2) $\angle 4 = \angle 1.$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 = \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{225}{49} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{225}{49} \cdot 14 = \frac{450}{7}.$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{450}{7}.}$

б) $AK = 8x$, $CK = 7x$.

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC}$, $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{1}{2}AP \cdot PK \cdot \sin\angle 5}{\frac{1}{2}PC \cdot PK \cdot \sin\angle 4} = \frac{AP}{PC} = \frac{8}{7}$ ($\angle 4 = \angle 5$ (доказано)).

$AP = 8y$, $PC = 7y$.

$tg\angle 1 = \frac{3}{5}$. $tg^2\angle 1 + 1 = \frac{1}{\cos^2\angle 1}$

$\frac{9+25}{25} = \frac{1}{\cos^2\angle 1} \Rightarrow \cos^2\angle 1 = \frac{25}{34} \Rightarrow \cos\angle 1 = \frac{5\sqrt{34}}{34}$ ($\angle 1 < 90°$, т.к. $\triangle ABC$ - остроугольный).

$ctg\angle 1 = \frac{5}{3}$. $1 + ctg^2\angle 1 = \frac{1}{\sin^2\angle 1}$

$1 + \frac{25}{9} = \frac{1}{\sin^2\angle 1} \Rightarrow \sin^2\angle 1 = \frac{9}{34} \Rightarrow \sin\angle 1 = \frac{3\sqrt{34}}{34}.$

$\sin\angle APC = \sin(2\angle 1) = 2\sin\angle 1\cos\angle 1 = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}.$

$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PC \cdot \sin\angle APC = \frac{1}{2} \cdot 8y \cdot 7y \cdot \frac{15}{17}$

$S_{APC} = S_{APK} + S_{AKC} = 14 + 16 = 30.$

$\frac{28 \cdot 15y^2}{17} = 30 \Rightarrow \frac{14y^2}{17} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{17}{14} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{17}{14}}$; $AP = 8 \cdot \sqrt{\frac{17}{14}}$, $PC = 7 \cdot \sqrt{\frac{17}{14}}$.

21101073 (U137286 M1303259)

$\cos\angle APC = \cos(2\angle 1) = \cos^2\angle 1 - \sin^2\angle 1 = \frac{25}{34} - \frac{9}{34} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}.$

$\triangle APC$: по теореме косинусов $AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos\angle APC$