Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101035**

ID профиля: **819839**

Вариант 24

Вариант 24 Чистовик (1) страница 1

№ 1

Пусть $a_1 = a_0 + d$, так как это арифметическая прогрессия =>

=> $a_n = a_0 + nd$, и так как a_n целое и возрастает =>

a_0 целое и d натуральное

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 9a_0 + 45d$

$a_5 a_{18} > S - 4 = (S+60) - 64 > a_{10}a_{13} - 64$

$(a_0+5d)(a_0+18d) > (a_0+10d)(a_0+13d) - 64$

$a_0^2 + 23da_0 + 90d^2 > a_0^2 + 23a_0d + 130d^2 - 64$

$40d^2 < 64$ так как d натуральное => $d = 1$

а) $a_{10}a_{13} < S + 60$

$(a_0+10d)(a_0+13d) < 9a_0 + 45d + 60$

$(a_0+10)(a_0+13) < 9a_0 + 45 + 60$

$a_0^2 + 23a_0 + 130 < 9a_0 + 105$

$a_0^2 + 14a_0 + 25 < 0$

$(a_0+7)^2 - 24 < 0$

$(a_0+7)^2 < 24$

$|a_0+7| < \sqrt{24}$ так как a_0 целое => $\sqrt{24}$ можно заменить на 4

$|a_0+7| \leq 4$

$a_0 \geq -7$ $\quad$ $a_0 \cancel{<} -7$

$a_0 \leq -3$ $\quad$ ~~$a_0 \geq 3$~~ $\quad$ $a_0 \geq -11$

21101035 (U819839 M1295751)

Вариант 24 Чистовик ② страница 2

№1 продолжение

б) $a_5 a_{18} > S - 4$

$(a_0+5d)(a_0+18d) > 9a_0+45d-4$ $\quad d=1$ из предыдущего

$a_0^2+23a_0+90 > 9a_0+45-4$

$a_0^2+14a_0+49>0$

$(a_0+7)^2>0 \Rightarrow a_0 \neq -7$

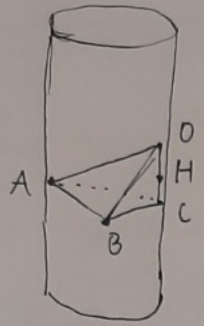
$$\begin{cases} a_0 \leq -3 \\ a_0 \geq -11 \\ a_0 \neq -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0+d \leq -2 \\ a_0+d \geq -10 \\ a_0+d \neq -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq -2 \\ a_1 \geq -10 \\ a_1 \neq -6 \end{cases}$$

Так как a_1 целое, то подходят под ограничения.

$a_1 = \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

21101035 (U819839 M1295751)

Вариант 24 Чистовик ③ №2 страница 3

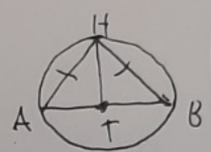


Из условия => все точки отрезка DC лежат на боковой поверхности.

Отметим точку H так чтобы плоскость AHB была паралельна плоскости в которой лежит основание цилиндра.

Если мы возьмём ~~прям~~ отрезок на боковой поверхности цилиндра он будет перпендикулярен плоскости основания => плоскости AHB => $DC \perp AHB$ => $\angle BHD = 90^\circ$, $\angle AHD = 90^\circ$.

Пусть $BH = y$, ~~.~~.



Точка T середина AB. (так же $ATB = 90^\circ$, так как AHB равнобедренный)

Описаная окружность $\triangle AHB$ будет такого же диаметра что окружность основания цилиндра так как A, H и B лежат на боковой поверхности и AHB паралельна основанию.

Так как $\triangle BDC = \triangle ADC$ по сторонам, и H делит в одном соотношении DC для обоих треугольников => $BH = AH = y$

$2R = \frac{AH}{\sin\angle HAB}$ из теоремы синусов

$\sin\angle HAB = \frac{HT}{AH}$ так как $\angle ATH = 90^\circ$, и $AT = TB = \frac{AB}{2} = 2$

$HT^2 + AT^2 = AH^2$ теорема пифагора

$HT = \sqrt{AH^2 - 4} = \sqrt{y^2 - 4}$

$\sin\angle HAB = \frac{\sqrt{y^2-4}}{y}$

$2R = \frac{AH}{\sin\angle HAB} = \frac{y^2}{\sqrt{y^2-4}}$ докажем что $\frac{y^2}{\sqrt{y^2-4}} \geq 4$

$y^4 \geq 16(y^2 - 4)$

$y^4 + 64 \geq 16y^2$ по неравенству коши

$y^4 + 64 \geq 2\sqrt{y^4 \cdot 64} = 16y^2$ доказано => минимальный $2R = 4$

$R = 2$

Вариант 24 Чистовик (7) страница 4

№ 2 продолжение

~~Так как $\frac{y^2}{\sqrt{y^2-4}}$ минимальный~~ => ~~когда мы пользовались неравенством коши оно обратилось~~

$$\frac{y^2}{\sqrt{y^2-4}} = 2R = 4$$

$$y^4 = 16(y^2-4)$$

$$y^4 + 64 = 16y^2$$

$$(y^2 - 8)^2 = 0$$

$$\cancel{y = \sqrt{8}} \quad y^2 = 8$$

$$y = \sqrt{8}$$

$BH = y = \sqrt{8}$ мы помним что $\angle BHD = 90^\circ$ => $\angle BHC = 90^\circ$ =>

по теореме пифагора => $BH^2 + HD^2 = DB^2$; $BH^2 + HC^2 = BC^2$ =>

$$\begin{cases} HD = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \sqrt{64-8} = \sqrt{56} \\ HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41} \end{cases} \Rightarrow DC = HD \pm HC = \sqrt{56} \pm \sqrt{41}$$

Ответ: $DC = \sqrt{56} + \sqrt{41}$ или $DC = \sqrt{56} - \sqrt{41}$

21101035 (U819839 M1295751)

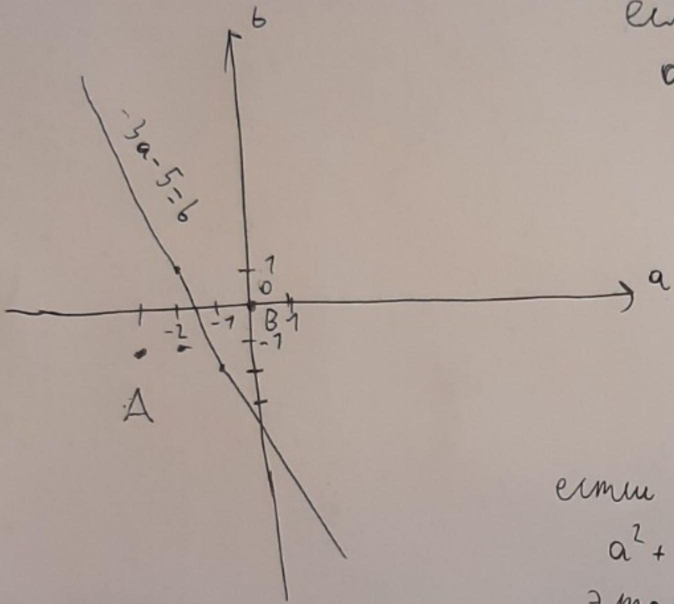
ВАРИАНТ 24 Чистовик 5 страница ~~4~~5

№ 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b;\,10)\end{cases}$$

$\cancel{a}\ -6a-2b<10$

$-3a-5<b$ $\quad -6a-2b$ меньше 10



если $-3a-5<b$

$a^2+b^2\le -6a-2b$

$a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10$

$(a-(-3))^2+(b-(-1))^2\le 10$

Это окружность с центром $-3;-1$ и радиусом 10. Пусть центр это A

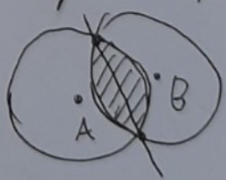
если $-3a-5>b$

$a^2+b^2\le 10$

Это окружность с центром $0;0$ и радиусом 10. Пусть центр это B

Заметим что прямая $-3a-5=b$ делит AB пополам и AB $\perp$ этой прямой, так как радиусы равны $\Rightarrow$ $-3a-5=b$ радикальная ось $\Rightarrow$ проходит прямая через точки пересечения окружностей

Заштрихованая часть это все a и b что подходят.



Тогда все подходящие x и y должны содержаться в окружности радиусом 10 вокруг эту область

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101035**

ID профиля: **819839**

Вариант 24

Вариант 24 Чистовик (1) страница 1

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 33 = 3 \cdot 11 \\ НОК(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

Так как НОК(a,b,c) делится только на 3 и на 11 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a, b, c делятся только на 3 и на 11

Пусть $a = 3^{x_1} \cdot 11^{y_1}$; $b = 3^{x_2} \cdot 11^{y_2}$; $c = 3^{x_3} \cdot 11^{y_3}$

Тогда $НОД(a,b,c) = 3^{\min(x_1;x_2;x_3)} \cdot 11^{\min(y_1;y_2;y_3)}$

$НОК(a,b,c) = 3^{\max(x_1;x_2;x_3)} \cdot 11^{\max(y_1;y_2;y_3)}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min(x_1;x_2;x_3) = 1 \\ \max(x_1;x_2;x_3) = 19 \\ \min(y_1;y_2;y_3) = 1 \\ \max(y_1;y_2;y_3) = 15 \end{cases}$$

Так как x и y независят друг от друга рассматрим их по отдельности.

а) При x. Мы можем выбрать одно из чисел и сделать его минимумом. это 3 варианта. Выбираем максимум из оставшихся двух это $3 \cdot 2 = 6$ вариантов. И последнее может быть от 1 до 19 $\Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 19 = 114$ вариантов

б) При y. Выбираем минимум 3 варианта, выбираем максимум из оставшихся $3 \cdot 2 = 6$ вариантов, выбираем последнее, оно может быть от 1 до 15 $\Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 15 = 90$ вариантов

в) Так как x и y независимы то для каждого варианта x может быть любой вариант y $\Rightarrow 114 \cdot 90 = 10260$ вариантов всего выбора трех чисел (a, b, c)

Ответ: 10260

21101035 (U819839 M1295752)

ВАРИАНТ 24 Чистовик (2) страница 2

№5

Пусть $a = 29 - x$, $b = \frac{x}{7} + 7$, $c = -x - 1$, Перепишем наши логарифмы

$\log_{\sqrt{a}}(b)$; $\log_{c^2}(a)$; $\log_{\sqrt{b}}(c)$

Перемножим их

$\log_{\sqrt{a}}(b) \cdot \log_{c^2}(a) \cdot \log_{\sqrt{b}}(c) = 2\log_a(b) \cdot \frac{1}{2}\log_c(a) \cdot 2\log_b(c) =$

$= 2 \cdot \log_a(b) \log_c(a) \cdot \log_b(c) = 2\log_a(b^{\log_b(c)}) \cdot \log_c(a) =$

$= 2\log_a(c) \cdot \log_c(a) = 2 \cdot \log_a(c^{\log_c(a)}) = 2 \cdot \log_a(a) = 2$

Из условия мы знаем что 2 числа равны а третье на 1 больше ~~их~~, пусть они будут равны $x, x, x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = x \cdot x \cdot (x+1) = x^2(x+1)$ $\quad x^2 > 0$, и $2 > 0 \Rightarrow x+1 > 0$

если $x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow x^2 < 1$ и $x + 1 < 2 \Rightarrow x^2(x+1) < 2$

если $x > 0 \Rightarrow x^2(x+1)$ строго возрастает так как и x^2, и $(x+1)$ возрастает $\Rightarrow x^2(x+1)$ только в одной точке равно 2 $\Rightarrow x = 1$ и только

Значит два числа равны 1, а третье 2.

1) Пусть $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7} + 7\right) = 2$

$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7} + 7\right) = 1$

$29 - x = \frac{x}{7} + 7$

$22 = \frac{8x}{7}$

$x = \frac{77}{4}$ но $c = -1 - x = -1 - \frac{77}{4} < 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{b}}(c) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие

ВАРИАНТ 24 Чистовик (3) страница 3

№5 продолжение

2) $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2$

$\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=1$

$\frac{x}{7}+7=-x-1$

$\frac{8x}{7}=-8$

$x=-7 \Rightarrow$ $a=29-x=36$, $b=\frac{x}{7}+7=6$, $c=-x-1=6$ $\Rightarrow$ $\log_{\sqrt{a}}(b)=1$, $\log_{c^2}(a)=1$, $\log_{\sqrt{b}}(c)=2$

3) $\log_{(x+1)^2}(29-x)=2 \Rightarrow \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

$(x+1)^4=29-x=\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$x^4+4x^3+6x^2+4x+1=\underbrace{29-x=\frac{x^2}{49}+2x+49}$

$\frac{x^2}{49}+3x+20=0$

$D=9-4\cdot 20\cdot\frac{1}{49}=\frac{361}{49}=\left(\frac{19}{7}\right)^2$

$x=\frac{-3\pm\frac{19}{7}}{\frac{2}{49}}=\frac{-147\pm 133}{2}=\cancel{-147}, -7; -140$

Но -7 у нас было, $x=-140 \Rightarrow \frac{x}{7}+7=-13<0 \Rightarrow$

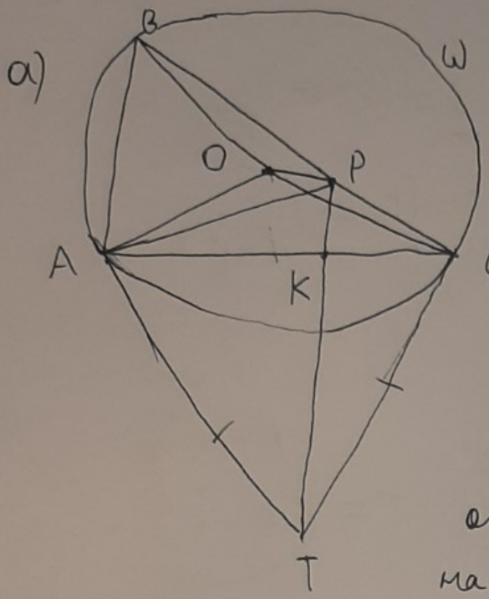
$\Rightarrow \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ не может существовать $\Rightarrow x=-7$

Ответ: $x=-7$

ВАРИАНТ 24 Чистовик (4) страница 4

№ 6

а)



CT касательная $\Rightarrow \angle TCO = 90^\circ$

AT касательная $\Rightarrow \angle \cancel{ATO}\ TAO = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TCO + \angle \cancel{ATO}\ TAO = 180^\circ \Rightarrow$ ATCO лежат на одной окружности.

Так же $AT = TC$ из свойств касательных.

~~так как AOPC лежат на~~ опишем окружность вокруг $\triangle AOC \Rightarrow$ P лежит на окр и T лежит на окр $\Rightarrow$ AOPCT лежат на окр (где окр это окружность).

$\angle PAO = \angle OCP$. $OC = BO \Rightarrow$ BOC равнобедренный $\Rightarrow \angle OCB =$
$= \angle OBC \Rightarrow \angle PAO = \angle OCP = \angle OCB = \angle OBC = \angle PBO$; $OB = AO \Rightarrow$
$\Rightarrow$ BOA равнобедренный $\Rightarrow \angle ABO = \angle BAO \Rightarrow \angle ABP = \angle PBO +$
$+ \angle ABO = \angle PAO + \angle BAO = \angle BAP \Rightarrow \triangle APB$ равнобедренный $\Rightarrow$
$\Rightarrow AP = BP$.

$AT = TC \Rightarrow \triangle ATC$ равнобедренный $\Rightarrow \angle TAC = \angle TCA$.

$\angle APT = \angle ACT$ опираются на одну дугу

$\angle TPC = \angle TAC$ опираются на одну дугу

$\angle APT = \angle ACT = \angle TAC = \angle TPC$.

$S_{\triangle PKC} = 14 = \frac{1}{2} \sin\angle KPC \cdot PC \cdot PK$ $\qquad \angle KPC = \angle APK \Rightarrow$

$S_{\triangle PKA} = 16 = \frac{1}{2} \sin\angle APK \cdot PA \cdot PK$

$$\frac{14}{16} = \frac{PC}{PA} = \frac{PC}{BP} = \frac{PC \cdot AP \cdot \frac{1}{2}\sin\angle APB}{BP \cdot AP \cdot \frac{1}{2}\sin\angle APC} = \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle APB}}$$

$\sin\angle APB = \sin\angle APC$ так как $\angle APB + \angle APC = 180^\circ$

21101035 (U819839 M1295752)

ВАРИАНТ 24 Чистовик (5) страница 5

№ 6 продолжение

а) $S_{\Delta APC} = 16 + 14 = 30$

$S_{\Delta APB} = \frac{16}{14} \cdot S_{\Delta APC} = \frac{8}{7} \cdot 30 = \frac{240}{7}$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta APC} + S_{\Delta APB} = 30 + \frac{240}{7} = \frac{210 + 240}{7} =$

$= \frac{450}{7}$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \frac{450}{7}$