Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101023**

ID профиля: **183250**

Вариант 24

Чистовик

№1

$a_1, a_2, \dots a_n$ – ↑ арифм. прогрессия.

d - разность прогрессии

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_9$

$$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S+60 \end{cases}$$

- $a_5 = a_1 + 4d$
  $a_{18} = a_1 + 17d$
  $a_{10} = a_1 + 9d$
  $a_{13} = a_1 + 12d$

- a_1
  $a_2 = a_1 + d$
  $\vdots$
  $a_9 = a_1 + 8d$

$$S = 9 \cdot a_1 + (d + 2d + \dots + 8d) = 9a_1 + \frac{9d \cdot 8}{2} = \underline{9a_1 + 36d}$$

$a_5 \cdot a_{18} = a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2$

$a_{10} \cdot a_{13} = a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2$

$a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \Rightarrow a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 + 64 > 9a_1 + 36d + 60.$

$a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 < a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 + 64$

$\Rightarrow \cancel{a_1^2 + 21a_1 d} + 108d^2 < \cancel{a_1^2 + 21a_1 d} + 68d^2 + 64$

$40d^2 < 64$

$d^2 < \frac{8}{5}$

$$\begin{cases} d < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ d > -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$ т.к. прогрессия возрастающая $\Rightarrow d > 0$

т.к. все члены прогрессии – целые, то $d \in \mathbb{Z}$ $\left(\begin{matrix} a_2 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{matrix} \Rightarrow a_2 - a_1 = d \in \mathbb{Z}\right)$

$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 2$
$2\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} d < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 2 \\ d > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = 1$

Чистовик

т.к. $a_5 \cdot a_{11} > S - 4$
$a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 36 - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 36 + 60 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \ * \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \ ** \end{cases}$$

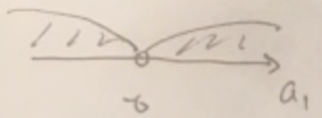
$*$ $a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$D/4 = 36 - 36 = 0$

$a_1 = \dfrac{-6 \pm 0}{}$

$a_1 = -6$

$(a_1 + 6)^2 > 0$

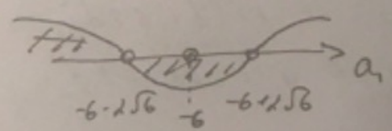


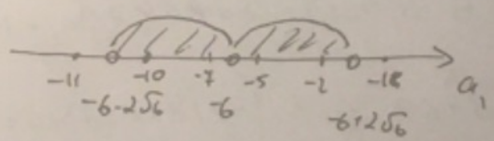
$**$ $a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D/4 = 36 - 12 = 24$

$a_1 = -6 \pm 2\sqrt{6}$

$(a_1 + 6 - 2\sqrt{6})(a_1 + 6 + 2\sqrt{6}) < 0$





- $-6 - 2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} -11$ $-6 - 2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} -10$

  $5 \vee 2\sqrt{6}$ $4 \overset{<}{\vee} 2\sqrt{6}$

  $25 > 24$ $16 \overset{<}{\vee} 24$

- $-6 + 2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} -1$ $-6 + 2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} -2$

  $2\sqrt{6} \overset{<}{\vee} 5$ $2\sqrt{6} \overset{>}{\vee} 4$

  $24 \overset{<}{\vee} 25$ $24 \overset{>}{\vee} 16$

т.к. a_1 - целое и $a_1 \in (-6 - 2\sqrt{6}; 6) \cup (6; -6 + 2\sqrt{6}) \Rightarrow$

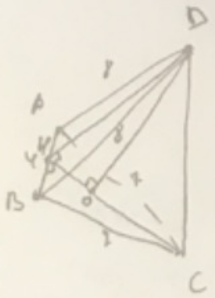
$a_1 \in [-10; -7] \cup [-5; -2]$, $a_1 \in \mathbb{Z}$

Ответ: $a_1 = \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$.

Чистовик

№2

$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

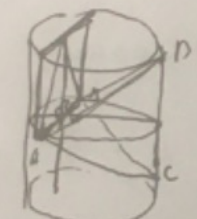


1) Т.к. в ABCD DA и DB равны, то ~~вершина~~ вершина тетраэдра D ~~упадёт~~ проецируется на серединный перпендикуляр к AB.

А т.к. ABC – равнобедренный => CH – медиана, высота и биссектриса => серпер. к AB совпадает с CH => ~~BCA упадёт на~~ D проецируется на CH.

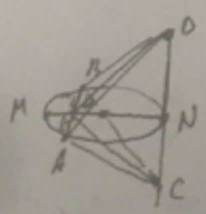
2) по ТТП т.к. CH – проекция DC на ABC и $CH \perp AB$ (как высота) => $CD \perp AB$.

3) т.к. $AB \perp CD$ => $AB \perp$ высоте цилиндра => AB лежит в плоскости, $\parallel$ плоскостям оснований цилиндра



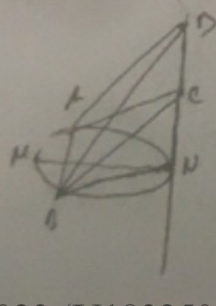
т.к. проведём через AB и прямую l, проходящую через H и $\parallel$ оси цилиндра плоскость α ~~эта плос~~ α пересечёт основание цилиндра по какой-то прямой t, а т.к. $l \perp$ основанию цилиндра, то $l \perp t$, но тогда т.к. AB и t либо параллельны, либо пересекаются (т.к. через них можно провести плоскость) и обе прямые $\perp l$ => они параллельны => через AB проходит плоскость $\parallel$ основаниям, пусть это плоскость β

4) проведём диаметр MN в круге цилиндра $\in \beta$ через точку H



он будет $\perp AB$ т.к. проходит через её центр.

т.к. все точки, равноудалённые от A и B лежат в плоскости $\perp AB$ и проходящей через её центр =>



C и D будут лежать на прямой $l \perp$ основаниям и проходящей через один из концов диаметра.

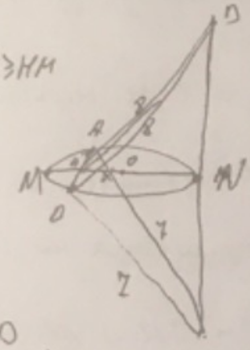
тогда C и D лежат либо по 1 сторону от β либо по разные

причём, если они лежат по одну, то C ближе к β т.к. из треугольников $\triangle DBN$ и $\triangle CBN$ $CN^2 = CB^2 - NB^2 < DN^2 = DB^2 - BN^2$

Чистовик

5) рассмотрим случаи:

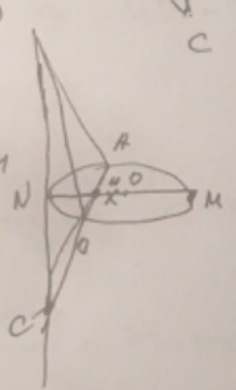
1. по разные стороны



по т. Пифагора

$$\begin{cases} DN^2 = DH^2 - HN^2 \\ CN^2 = CH^2 - HN^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DN^2 = 60 - HN^2 \\ CN^2 = 45 - HN^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} DH^2 = DA^2 - HA^2 = 60 \\ CH^2 = AC^2 - DH^2 = 45 \end{cases}$$



т.к. $R^2 = x^2 + \frac{AB^2}{4}$ const (по св-ву хорд $AH \cdot AH = NH \cdot HM = R^2 - x^2$)

где $|x|$ - расстояние от O до AB =>

=> минимальный радиус основания будет

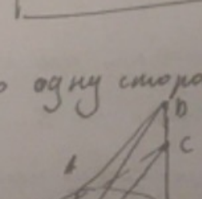
при $|x| = 0$ т.к. $x^2 \geq 0$ => $R^2 = \frac{AB^2}{4}$ => AB - диаметр

основания цилиндра => $R = \frac{AB}{2} = 2$ круга => AB равен удвоенному радиусу

тогда $\begin{cases} DN^2 = 60 - R^2 = 60 - 4 = 56 \\ CN^2 = 45 - R^2 = 45 - 4 = 41 \end{cases}$ => $DN = 2\sqrt{14}$, $CN = \sqrt{41}$

$\boxed{DC = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}}$

2. по одну сторону



аналогично $R^2 = x^2 + \frac{AB^2}{4}$ =>

радиус минимален при $x^2 = 0$ (т.к. $x^2 \geq 0$) =>

=> AB - диаметр => $R^2 = \frac{AB^2}{4} = 4$

по т. Пифагора $\begin{cases} CN^2 = CH^2 - HN^2 = 45 - 4 = 41 \\ DN^2 = DH^2 - HN^2 = 60 - 4 = 56 \end{cases}$ => $CN = \sqrt{41}$, $DN = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

=> $CD = DN - CN = \boxed{2\sqrt{14} - \sqrt{41}}$

Ответ: $CD = \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{14} + \sqrt{41} \\ 2\sqrt{14} - \sqrt{41} \end{array} \right.$

4

21101023 (U183250 M1302696)

Чистовик

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)\ *\end{cases}$$

– круг с центром в т. O и радиусом $\sqrt{10}$

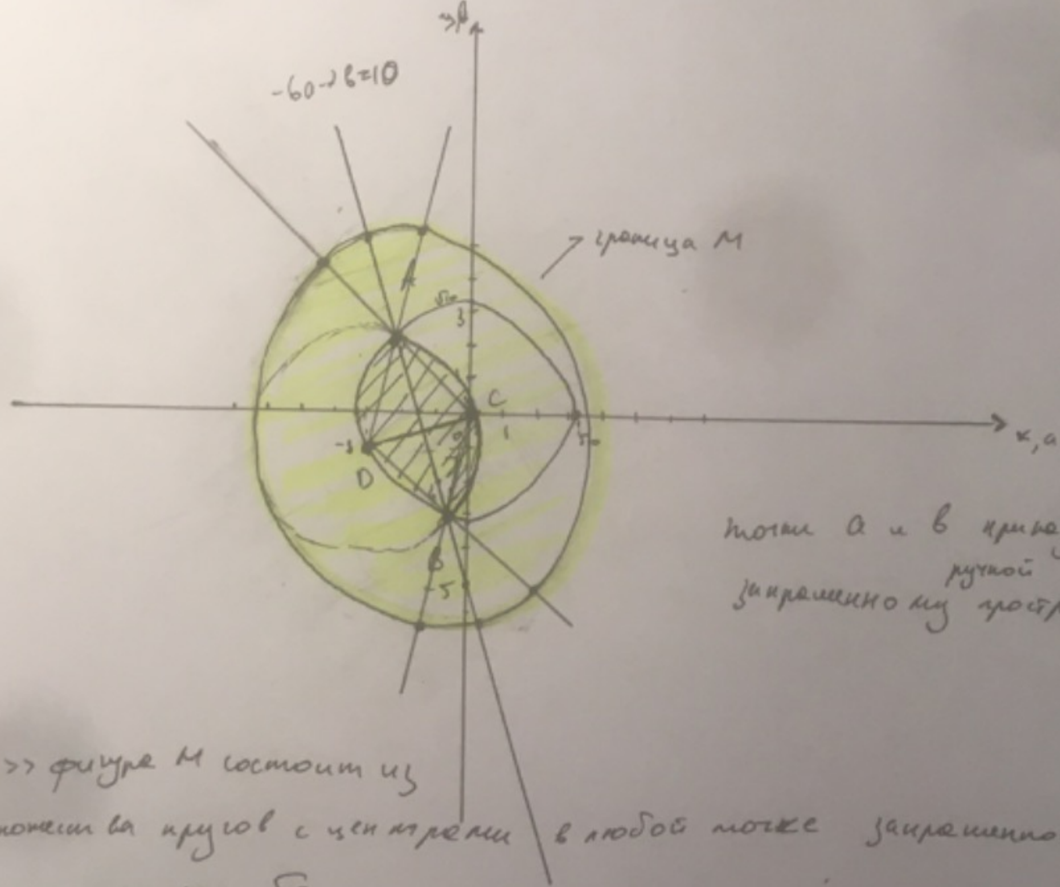
$*\quad a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)$

1) $\begin{cases}a^2+b^2\le 10 \\ 10\le -6a-2b\end{cases}$ круг с центром в т. $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$

$b\le -3a-5$

2) $\begin{cases}a^2+b^2\le -6a-2b \\ -6a-2b<10\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10 \\ -3a-b<5\end{cases}$ $\begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10 \\ -3a-b<5\end{cases}$

круг с центром в т. $(-3;-1)$ и радиусом $\sqrt{10}$



точки a и b принадлежат ручной закрашенному пространству

=> фигура M состоит из множества кругов с центрами в любой точке закрашенной фигуры и радиусом $\sqrt{10}$

точки $(0;0)$ и $(-3;-1)$ принадлежат ~~границам обеих~~ в обеим кругам, являются центром одного из них и лежат на границе другого

оба круга пересекают $(-6a-2b=10)$ в двух одинаковых точках A и B (5)

Чистовик

пусть т. $(0;0) - C$

$(-3;-1) - D$

тогда фигура M состоит из двух половин частей окружностей $C(0;0), R_1 = 2\sqrt{10}$

$D(-3;1), R_2 = 2\sqrt{10}$

т.к. на этих окружностях лежат границы кругов, центры которых лежат в найденном множестве

$S_M = 2.$

Черновик $\quad b^2 - \frac{-110+\sqrt{5}\,9a}{3}b - \frac{-110-\sqrt{3}9a}{3}b +$

21.

$a_1; a_2 \dots a_9$ $\quad n$

$\sum_{i=1}^{9} a_i$

$3b^2+240b+350^2 \geq 0$

$D/4 = 144a^2 - 105a^2 = 39a^2$

$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10} \cdot a_{13} < S+60 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 + d \\ \vdots \\ a_9 = a_1 + 8d \end{array}\right\} a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 9a_1 + (d + 2d + \dots + 8d) = 9a_1 + \frac{9d \cdot 8^4}{2} =$

$= \underline{9a_1 + 36d} = S$

$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \\ a_{18} = a_1 + 17d \end{array}\right\} a_5 \cdot a_{18} = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2$

$\left.\begin{array}{l} a_{10} = a_1 + 9d \\ a_{13} = a_1 + 12d \end{array}\right\} a_{10} \cdot a_{13} = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} \Rightarrow a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 + 64 > 9a_1 + 36d + 60$

$\begin{cases} (a_1+4d)(a_1+12d) > 9(a_1+4d) - 4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d) < 9(a_1+4d) + 60 \end{cases}$

$a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 + 64$

$40d^2 < 64$

$d^2 < \frac{\cancel{64}\ 8}{\cancel{40}\ 5}$

$d^2 < \frac{8}{5}$ $\quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \vee 2$ $\quad \frac{2\sqrt{2}}{5} \vee 1$

$d < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $\quad 2\sqrt{2} \vee 2\sqrt{5}$ $\quad 2\sqrt{2} \vee 5$

$9a_1$ Черновик

$a_1^2 > 9a_1 - 4$

$a_1^2 - 9a_1 + 4 > 0$

$D = 9 - 4 = 5$

$a_1^2 - 9a_1 - 60 < 0$

$D =$

$-6a - 2b \le 10$

$-6a - 2b \le 10$

$-3a - b \le 5.$

$b \ge -3a - 5$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee -7.$

$1 \vee 2\sqrt{6}$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee -10$

$4 \vee 2\sqrt{6}$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee$

$<$ $>$ $<$ $>$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee -12$

$6 \vee 2\sqrt{6}$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee -8$

$2 \vee 2\sqrt{6}$

$-6 - 2\sqrt{6} > k$

$-6 - k > 2\sqrt{6}$

$-6 - 2\sqrt{6} \vee -15$

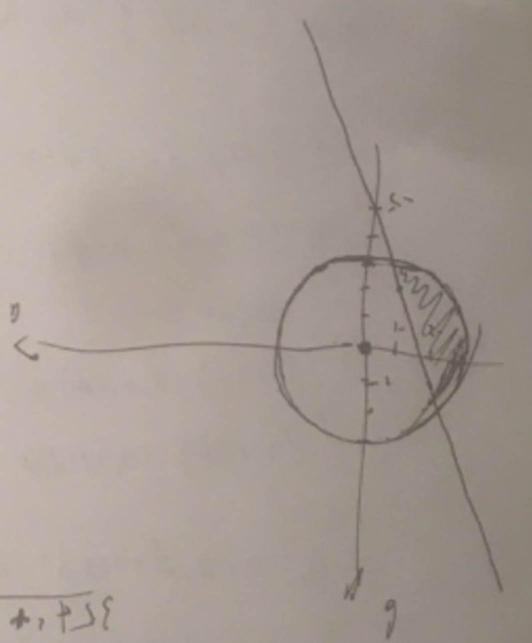
$9 \vee 2\sqrt{6}$

24

$-6 - 2\sqrt{6} \vee$

$5 \vee 2\sqrt{6}$

$25 \vee 24$



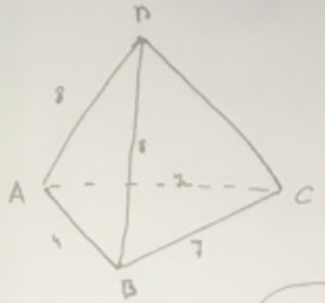
21101023 (U183250 M1302696)

черновик

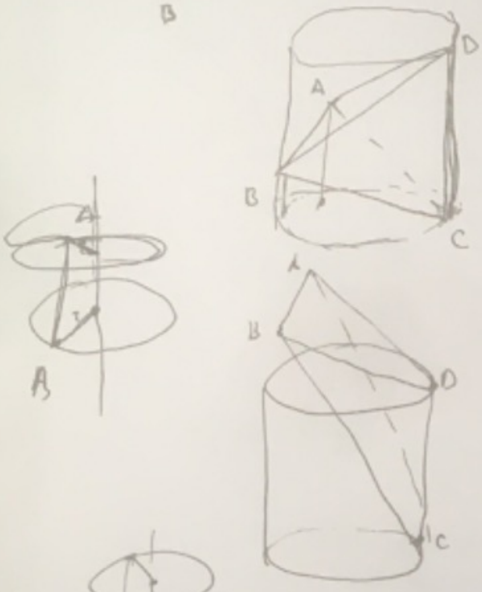
21101023 (U183250 M1302696)

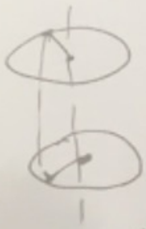
Черновик

32.

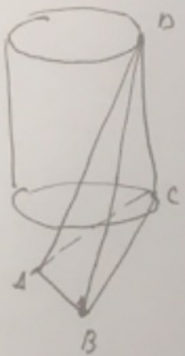


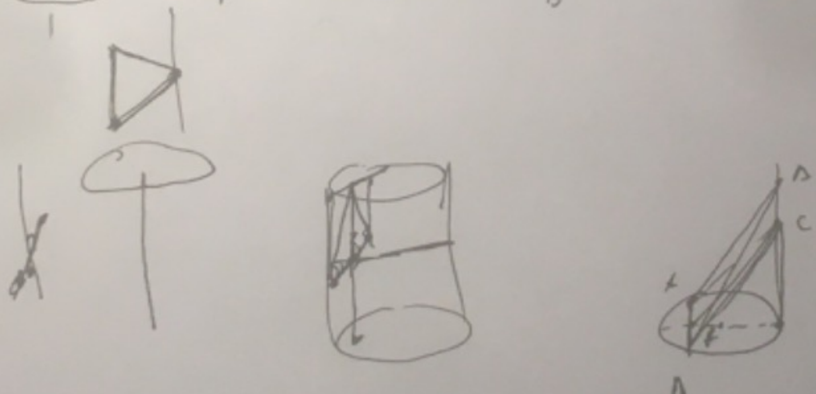
Проведём через точки C и D ~~окруж~~ круги, параллельные основаниям цилиндра, центр которых лежит на оси цилиндра и радиус равен радиусу цилиндра.





$R^2 = \frac{AB^2}{4} + x^2$





$R^2 - 4 = t^2$ $R + t =$

21101023 (U183250 M1302696)

№3 Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 & * \\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10) & ** \end{cases}$$

$*$ – ~~это~~ круг с радиусом $\sqrt{10}$ и центром в точке $(a;b)$

$**$ $a^2+b^2\le \min(-6a-2b;10)$

• $-6a-2b\le 10$

$-3a-b\le \cancel{10}\,5$

$\boxed{b\ge -3a-5}$

$\Downarrow$

$a^2+b^2\le 36a^2+4b^2+24ab$

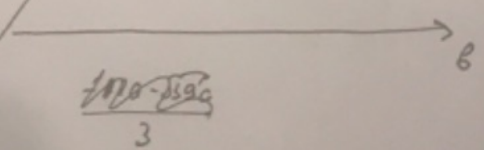
$35a^2+24ab+3b^2\ge 0$

(решим квадратное относительно b)

$D/4=144a^2-105a^2=39a^2$

$b=\dfrac{-12a\pm\sqrt{39}a}{3}$

$3\left(b-\dfrac{-12a+\sqrt{39}a}{3}\right)\left(b-\dfrac{-12a-\sqrt{39}a}{3}\right)\ge 0$



• $-6a-2b>10$

$-3a-b>5$

$b<-3a-5$

$\Downarrow$

$a^2+b^2\le 10$

$b^2\le 10-a^2$

21101023 (U183250 M1302696)

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 10$

$a^2+b^2\le \min(-6a-2b; 10)$

$b<-3a-5$

$a^2+b^2\le 10$

$-6a-2b>10$

$-3a-b>5$

$a^2+b^2\le -6a-2b$

$a^2+6a+b^2+2b\le 0$

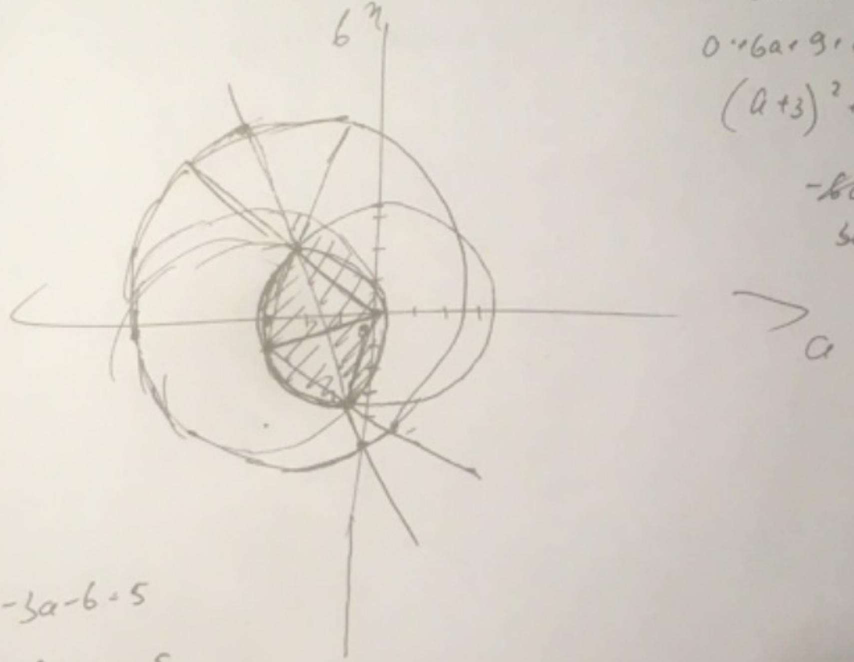
$a^2+6a+9+b^2+2b+1\le 10$

$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$

~~$-6a-2b<10$~~

$3a+2b>-10$

$b\ge -3a-5$



$-3a-b=5$

$b=-3a-5$

$a^2+b^2=a^2+9a^2+25+30a=10$

$10a^2+30a+15=0$

$2a^2+6a+3=0$

20 $\quad D/4=9-6=3$

$a=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

21101023 (U183250 M1302696)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101023**

ID профиля: **183250**

Вариант 24

Чистовик

№4

• т.к. НОД = 33 => все числа содержат первую степень 3 и 11 а также все не могут содержать степени 3 и 11 больше двух (то есть не может быть такого, что ~~степень~~ ~~вхождения~~ 3^2 и 11^2 ~~был~~ ~~есть~~ входит во все числа)

• т.к. НОК = $3^{19}\cdot 11^{15}$ => есть хотя бы одно число в котором содержится 3^{19} и хотя бы одно, в котором содержится 11^{15}

а так же у чисел нет других простых делителей кроме 3 и 11 и максимальные степени их вхождения 3^{19}, 11^{15}

• ~~Всего~~ ~~$a>b>c$~~

~~сначала~~ $\begin{cases} a = 3^{15}\cdot 11^{19} \\ b = 3\cdot 11 \\ c = 3^m\cdot 11^n \end{cases}$ $19\cdot 15 = 285$ вариантов $\begin{cases} a = 3^{15}\cdot 11^{19} \\ b = 3^m\cdot 11^n \\ c = 3\cdot 11 \end{cases}$ 285 вариантов

в сумме $285\cdot 2 - 1 = 569$ вариантов т.к. $b=c=3\cdot 11$ 2 раза.

$\begin{cases} a = 3\cdot 11 \\ b = 3^{19}\cdot 11^{15} \\ c = 3^m\cdot 11^n \end{cases} + \begin{cases} a = 3^m\cdot 11^n \\ b = 3^{19}\cdot 11^{15} \\ c = 3\cdot 11 \end{cases} = 569$ вариантов

$\begin{cases} a = 3\cdot 11 \\ b = 3^m\cdot 11^n \\ c = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases} + \begin{cases} a = 3^m\cdot 11^n \\ b = 3\cdot 11 \\ c = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases} = 569$ вариантов

Всего

чистовик

Всего ~~вариантов~~ троек различных чисел, у которых степень 3ки ≤ 19 и степень 11 ≤ 15

$$C^3_{15\cdot 19} = C^3_{285}$$

Троек различных, у которых (степень 3ки) ≤ 18 и (ст 11) ≤ 14

$$C^3_{18\cdot 14}$$

=> нужных троек $\left(C^3_{285} - C^3_{18\cdot 14}\right)\cdot 6$, кол-во перестановок a, b, c.

Если 2 числа одинаковых:

1) C^2_{285}

2) $C_{18\cdot 14}$

Чистовик

№5.

$a = \log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \log_{(x+1)^2} (29-x)$

$c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}} (-x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{29-x} > 0 \\ 29-x>0 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ 29-x \neq 1 \\ (x+1)^2>0 \\ 29-x>0 \\ (x+1)^2 \neq 1 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7} > 0 \\ -x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-49 \\ x<-1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -42 \end{cases}$

1) $a = b$

$\log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{2} \log_{(x-1)} (29-x)$

$\log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(-x-1)} \sqrt{29-x}$ домножим на $\log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right)$

т.к. $\frac{x}{7}+7 \neq 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{29-x}} \frac{x}{7}+7 \neq 0$

$\log^2_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{(-x-1)} \left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\frac{1}{\log^2_{\frac{x}{7}+7} \sqrt{29-x}} = \frac{1}{\log_{\frac{x}{7}+7} (-x-1)}$

Назовём числа a, b, c, тогда $a \cdot b \cdot c =$

$= 2\log_{29-x} \frac{x}{7}+7 \cdot \frac{1}{2} \log_{-x-1} (29-x) \cdot 2\log_{\frac{x}{7}+7} (-x-1) =$

$= \log_{-x-1} \frac{x}{7}+7 \cdot 2\log_{\frac{x}{7}+7} (-x-1) = 2\log_{-x-1} (-x-1) = 2$

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2$

- тогда если есть x, y, z и $x = y$ $z = x+1$, а $x \cdot y \cdot z = 2 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x^2 \cdot (x+1) = 2 \\ x^2 (x-1) = 2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^3 + x^2 - 2 = 0 \\ \cancel{x^3 - x^2 - 2 = 0} \end{array}\right.$ $\Rightarrow (x-1)\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\text{всегда} > 0} = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 = y$

$z = x+1 = 2$

проверить:

3

Чистовик

1) если $a = b = 1$
$c = 2$

5.
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right) = 1 \\ \log_{(x+1)^2} 29-x = 1 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}} (-x-1) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{29-x} = \frac{x}{7}+7 \\ (x+1)^2 = 29-x \\ \left(\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right)^2 = (-x-1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 29-x = \left(\frac{x}{7}+7\right)^2 \\ (x+1)^2 = 29-x \\ \frac{x}{7}+7 = (x+1)^2 \end{cases}$$

решим $(x+1)^2 = 29-x$

$x^2+3x-28=0$

$D = 9+112 = 121$

$\left[\begin{array}{l} x = 4 \text{ не уд. ОДЗ.} \\ x = -7 \end{array}\right.$

подставим в другие: $36 = 6^2$

$6 = 6$ удовл.

2) если $a = c = 1$
$b = 2$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right) = 1 \\ \log_{(x+1)^2} (29-x) = 2 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}} (-x-1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 29-x = \left(\frac{x}{7}+7\right)^2 \\ (x+1)^4 = 29-x \\ \frac{x}{7}+7 = (x+1)^2 \end{cases}$$

Решим $29-x = \left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$\frac{x^2}{49}+3x+20=0$

$D = \left(\frac{13}{7}\right)^2$

$x = \frac{\left(-3 \pm \frac{13}{7}\right) \cdot 49}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = -7 \quad \text{не уд усл. } (x+1)^4 = 29-x. \\ x = -140 \text{ не уд. ОДЗ} \end{array}\right.$

3) если $a = 2$
$b = c = 1$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right) = 2 \\ \log_{(x+1)^2} (29-x) = 1 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}} (-x-1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 29-x = \frac{x}{7}+7 \\ (x+1)^2 = 29-x \\ \frac{x}{7}+7 = -x-1 \end{cases} \Rightarrow 29 \cancel{-x} = \cancel{-x}-1$$

$29 = -1$ нет таких x.

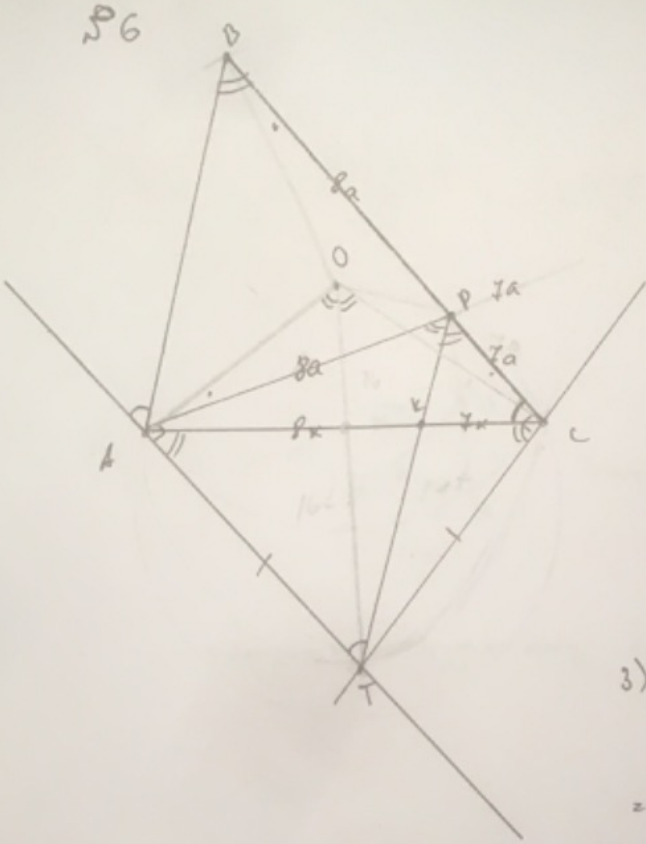
Ответ: $x = -7$

4

21101023 (U183250 M1302697)

Чистовик

№6



$S_{APK}=16$

$S_{CPK}=14$

$S_{ABC}-?$

1) $CT=TA$ как отрезки касательной из одной точки.

2) $S_{APK}=\frac{1}{2}PK\cdot KA\cdot \sin\angle PKA$ синусы || как смежных углов =>

$S_{PKC}=\frac{1}{2}PK\cdot KC\cdot \sin\angle PKC$

$\frac{KA}{KC}=\frac{16}{14}=\frac{8}{7}$

3) т.к. $\angle OCT=\angle OAT=90^\circ$ (т.к. AT и TC – кас., а OA и OC – радиусы, проведённые в т. касания) =>

=> $OATC$ можно вписать в окр =>

т T лежит на окружности проходящей через A, O, C.

4) $\angle ATP=\angle ACP$ т.к. опираются на дугу
аналогично $\angle CAT=\angle TPC$ => $\triangle PKC\sim\triangle AKT$ по 2м углам

=> $\frac{PK}{KA}=\frac{KC}{KT}=\frac{PC}{AT}$ => $PK\cdot KT=56x^2$

5) т.к. $AT=TC$ => $\overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{TC}$ => $\angle APT=\angle TPC$ => PT – бис угла $\angle APC$ =>

=> $\frac{S_{APK}}{S_{KPC}}=\frac{AP}{PC}$ => $\frac{8}{7}$

$(AP=8a,\ PC=7a)$

$S_{APC}=\frac{1}{2}AP\cdot PC\cdot\sin\angle APC=30$

$\frac{1}{2}\cdot 56a^2\sin\angle APC=60$

$14a^2\cdot\sin\angle APC=15$

$S_{PBA}=\frac{1}{2}BP\cdot PA\cdot\sin\angle APB=\frac{1}{2}BP\cdot PA\cdot\sin\angle APC=\frac{BP}{PC}\cdot 30$

6) $\angle OAP=\angle OCP$ т.к. вписанные и опираются на $\overset{\frown}{OP}$

$\angle OAB=\angle OBA$ т.к. $OB=OA$ как радиусы => $\triangle OBA$ – р/б

$\angle OBC=\angle OCB$ т.к. $OB=OC$ как радиусы => $\triangle OBC$ – р/б

=> $\angle OAP=\angle OBP$, $\angle BAP=\angle ABP$ => $\triangle ABP$ – р/б => $BP=PA=8a$

5

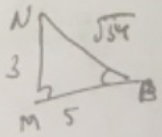
Чистовик

$\Rightarrow S_{\triangle PBA} = \frac{8x}{7x} \cdot 30 = \frac{240}{7} \Rightarrow$

$S_{ABC} = S_{PBA} + S_{ADC} = \frac{240}{7} + 30 = \frac{240+210}{7} = \boxed{\frac{450}{7}}$

5) $\angle ADC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$

$\frac{\cancel{AC}}{\cancel{\operatorname{arctg}\frac{3}{5}}} =$ т.к. $\angle B$ - острый



$\Rightarrow \sin\angle B = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\angle ADC = \underbrace{\angle ACT = \angle CAT}$

Вписанный опирается на $\overset{\frown}{AC}$ опираются на $\overset{\frown}{AC}$ - угол между кас и хордой

№4

$$\begin{cases} НОД\ (a;b;c) = 33 \\ НОК\ (a;b;c) = 3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

Если НОД чисел 33, то в делителях каждого числа есть 3 и 11, притом есть хотя бы одно числа, у которых 3 и 11 встречаются в первой степени ~~либо 3^1, либо 11^1, либо и 3^1, и 11^1 встречаются в 1й степени~~

Т.к. НОК чисел $3^{19}\cdot 11^{15}$, то в каждом числе степень тройки не больше 19, а степень 11 не больше 15. Степеней других простых чисел нет, т.к. их нет в НОКе, а НОК $\vdots\ a,\ \vdots\ b,\ \vdots\ c$

I. Если у одного числа 3 в первой степени, а у другого 11 в первой степени

тогда $x = 3\cdot 11^{n_x}$ $(n_x \le 15)$ 15 чисел

$y = 11\cdot 3^{m_y}$ $(m_y \le 19)$ 19 чисел

$z = 3^{m_z}\cdot 11^{n_z}$ $\left(\begin{cases} m_z \le 19 \\ n_z \le 15 \end{cases}\right)$ 19 · 15 чисел

тогда

19 $3^{19}\cdot 11^{15}$ $x = 11^{15}$

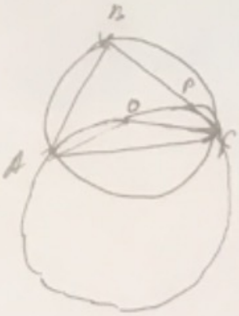
20. 3^{19}

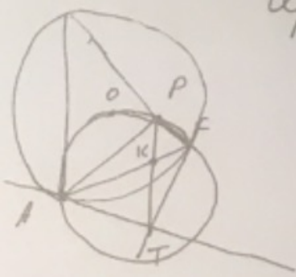
11^{15}

3^{19}

Игровика

Черновик





$\frac{1}{2}h\cdot 8x = 16$

$4hx = 16$

$hx = 4$

$h = \frac{4}{x}$

$\frac{1}{2}h\cdot 7x$

$hx = 4$

$h = \frac{4}{x}$

$\frac{1}{11} = \frac{7x}{a}$

$\frac{1}{8a}$

$\frac{7a}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{abc}{4S} = R$

$S = \frac{abc}{4R}$

$7a\cdot 8a\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha = 30$

$56a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha = 30$

$28a^2\cdot\sin\alpha = \cancel{30}\ 15$

14

$14a^2\cdot\sin\alpha = 15$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BP}{PC}$

$S_1 = \frac{BP}{PC}\cdot 30$

тисто!

$\cdot \log$ $\quad 4\log^2_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{-x-1}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ Цуковин

$\log^2_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2 = \log_{-x-1}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\frac{x}{7}+7=1$

$\frac{x}{7}=-6$ $\quad \log^2_a b = \log_c d$

$\frac{1}{2}\log_{(x-1)}(29-x) \quad 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$x^2+2x+1=29-x$

$x^2+3x-28=0$

$D=9+112=121$

$x=\frac{-3\pm 11}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-7 \end{array}\right.$

$\log_{(-x-1)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) = 2$

$a\cdot b\cdot c=2$

$\left[\begin{array}{l} a^2\cdot(a+1)=2 \\ a^2(a-1)=2 \end{array}\right.$ $\quad a^3+a^2=2 \quad a^3-a^2=2$

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0
	1	-1	0	-2
-1	1	-2	2	
	1	1	0	0

$(x-1)$

$x^3 - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} - \cancel{2x} + \cancel{2x} - 2x$

	1	-1	0	-2
-2	1	-3	6	
-1	1	-2	2	-4
1	1	0	0	-2
$\frac{1}{2}$	1			

x^2

$\log_{\sqrt{28}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\quad x=1$

$\log_4 28$ $\quad 2 \quad 1$

$\log_{\frac{1}{7}+7} 0$ $\quad 1$

21101023 (U183250 M1302697)

Черновик

№ 4

$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=33 \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$

Т.к. НОД $=3\cdot 3$ => каждое число делится на 3 и на 11
~~и есть число~~ ≥ 2, и не может быть такого, что у всех чисел степень и 3ки и 11ки
Т.к. НОК $=3^{19}\cdot 11^{15}$ => у чисел не может быть простых делителей кроме 3 и 11
и есть число, у которого (степень 3) = 19
есть число, у которого (степень 11) = 15.
~~Подставим x y z~~

1) Если одно число $3^{19}\cdot 11^{15}$:

$\begin{cases} x = 3^{19}\cdot 11^{15} \\ y = 3^{m_y}\cdot 11^{n_y} \\ z = 3^{m_z}\cdot 11^{n_z} \end{cases}$

- Если $m_y=1$ и $n_y=1$
  => для z $m_z\cdot n_z$ вариантов
  т.к. $m_z\leq 19$, т.к. $n_z\leq 15$ => $19\cdot 15=285$

9 $\frac{21}{7}$

- Если $m_z=1$ и $n_z=1$
  => для y 285 вариантов
- Если $m_y=1$ и $n_z=1$
  => $n_y\cdot m_z = 285$ вариантов
- Если $n_y=1$ и $m_z=1$
  => $m_y\cdot n_z = 285$ вариантов.

Всех вариантов чисел $285\cdot 4-3$ т.к. $y=3\cdot 11$, $z=3\cdot 11$ считался 3 раза

$\frac{x}{7}+7$ $x-1$

$49-x$

$4\cdot \log_{27} 8 = \frac{1}{\log_{27}-8}$

-49	78
-35	84
-28	67
-21	60
-14	43
-7	36

$4\log_{36} 6 = \frac{1}{\log_{36} 6}$

21101023 (U183250 M1302697)