# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100779**

ID профиля: **302476**

Вариант 24

Чистовик

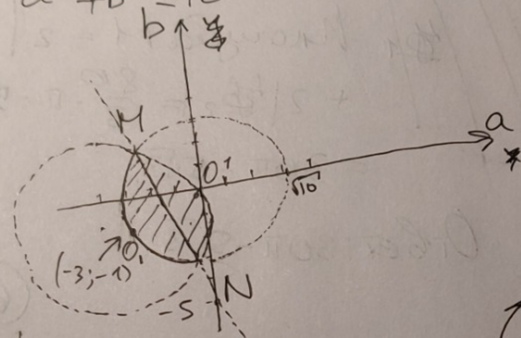
№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b;10).\end{cases}$$

I $-6a-2b\geq 10$

$\underline{3a+b\le -5}$ $\quad b\le -3a-5.$

$a^2+b^2\le 10$




$$\begin{cases}a^2+b^2=10\\ 3a+b+5=0\Rightarrow b=-3a-5\end{cases}$$

$a^2+9a^2+30a+25=10$

$10a^2+30a+15=0$

$2a^2+6a+3=0$

$D=36-4\cdot 6=12$

$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

абсцисс т. M и N.

II $\underline{b>3a-5}$

$a^2+b^2+6a+2b\le 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$

Надо найти все положения центра $(x;y)$ круга, $(a-x)^2+(b-y)^2\le 10$, при котором этот круг пересекает, заштрихованую фигуру выше.

Дуга $\overset{\frown}{NOM}$ составляет $\frac{1}{3}$ от длины окр.

т.к.

~~$\angle MON=$~~

Чистовик

Вариант 24

№1 Дано:

$\{a_n\} \div$ $a_1 \in \mathbb{Z}$ $d > 0$

$d \in \mathbb{Z}$

$S_9 = \frac{(2a_1 + 8d)}{2} \cdot 9 = 9a_1 + 36d$

$a_5 \cdot a_{18} > S - 4$

$$\begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > 9a_1 + 36d - 4 & (1) \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60 & (2) \end{cases}$$

$-(1) + (2)$

$\cancel{a_1^2} + 108d^2 + \cancel{21a_1d} - \cancel{a_1^2} - 68d^2 - \cancel{21a_1d} < 64$

$40d^2 < 64$

$d^2 < 1{,}6$

$d < \frac{4}{\sqrt{10}}$

т.к. прогр. возр. $(d > 0)$, то $d = 1$.

$\frac{4}{\sqrt{10}} > 1$

$4 > \sqrt{10}$

$\frac{4}{\sqrt{10}} \vee 2$

$2 < \sqrt{10}$

1

21100779 (U302476 M1297841)

Чистовик

№ 2 (продолжение)

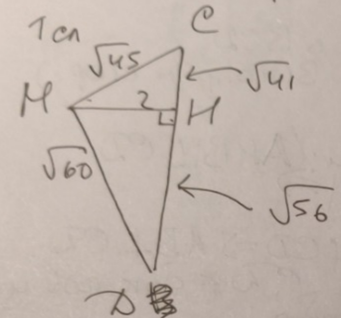
8) По т. синусов.

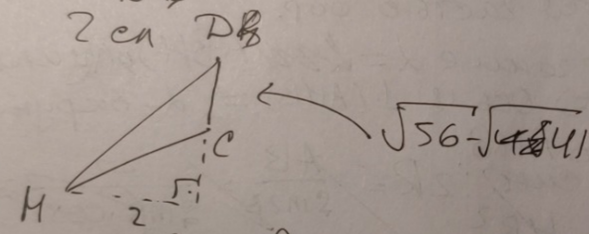
$$2R = \frac{AB}{\sin\angle AHB} = \frac{AB}{2\cdot\frac{2}{HB}\cdot\frac{MH}{HB}} = \frac{HB^2}{MH} =$$

$$= \frac{MH^2+4}{MH} = MH + \frac{4}{MH} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R \to \min$ при $MH = 2$.

(Щ. нер-ва Коши).



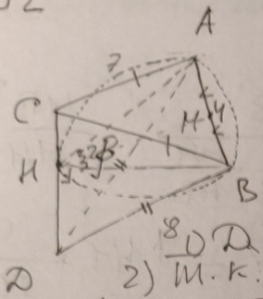




Ответ: $\{\sqrt{56}+\sqrt{41};\ \sqrt{56}-\sqrt{41}\}$

4

Чистовик

№2




Дано: ABCD-тетраэдр; AB = 4
AC = BC = 7; AD = BD = 8; ABCD-впис.
в цилиндр так, что A, B, C, D лежат
на бок. пов. ц.; DC ∥ оси цилиндра
$R \to min$ (радиус цилиндра)
Найти: CD.
Решение:
1) Д.п. BH - выс. △BCD;
2) Т.к. △ACD = △CDB (по трём стор.)
AH ⊥ CD.

3) По призн. ⊥ прям. и пл-ти: (AHB) ⊥ CD
AH ⊥ CD
BH ⊥ CD ⇒

4) По призн. ⊥ прям-ых: т.к. (AHB) ⊥ CD ⇒ AB ⊥ CD.

5) Т.к. DC ∥ оси цилиндра и C, D ∈ бок. пов. цил.
⇒ {CD} ~~∈ обр~~ является частью обр.

6) проведём сечение $\alpha$ = (ABH) ∩ (цилиндр)
Т.к. CD ⊥ (AHB) ⇒ Ось ц. ⊥ (AHB) ⇒ $\alpha$ - окружн,
описанная около △AHB

7) В пл-ти $\alpha$: пот. син.: $2R = \frac{AB}{\sin 2\beta} = \frac{2}{\sin\beta \cdot \cos\beta} =$
$= \frac{2HB^2}{2\cdot\sqrt{HB^2-2^2}} = \frac{HB^2}{\sqrt{HB^2-4}}$

8) $R \to min.$ $f(HB) = \frac{HB^2}{2\sqrt{HB^2-4}}$

$f'(HB) = \frac{4HB\sqrt{HB^2-4} - HB^2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2HB}{\sqrt{HB^2-4}}}{4(HB^2-4)} =$

$= \frac{2HB^3 - 4HB - HB^3}{2(HB^2-4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{HB(HB^2-4)}{2(HB^2-4)^{\frac{3}{2}}}$

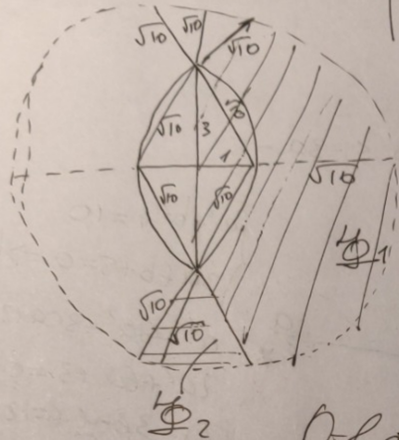
③

~~8)~~ 7) по т. Пиф. ⇒ $MC = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$ (M - сер. AB),
$MD = \sqrt{64-4} = 2\sqrt{15}$

21100779 (U302476 M1297841)

Чистовик

№ 3 (продолжение)




$$|\Phi_1| = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{10})^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{10})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{40\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$|\Phi_2| = \frac{1}{6}\pi(\sqrt{10})^2 = \frac{5}{3}\pi$$

Площадь $M = 2|\Phi_1| + 2|\Phi_2| = \frac{80}{3}\cdot\pi - 5\sqrt{3} + \frac{10\pi}{3} = 30\pi - 5\sqrt{3}.$

Ответ: $30\pi - 5\sqrt{3}$.

6

Чистовик

№ 1 (продолжение)

1) $(a_1+9)(a_1+12) < 9a_1+96$

$a_1^2+21a_1+108 < 9a_1+96$

$a_1^2+12a_1+12 < 0$

$f(a_1) = a_1^2+12a_1+12$

Нули: $a_1^2+12a_1+12=0$

$\frac{D}{4} = 36-12 = 24$

$a_1 = -6 \pm 2\sqrt{6}.$

$a_1 \in (-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6}).$

2) $(a_1+17)(a_1+4) > 9a_1+32$

$a_1^2+12a_1+68-32>0$

$a_1^2+12a_1+36>0$

$g(a_1) = a_1^2+12a_1+36$

Нули: $a_1^2+12a_1+36=0$

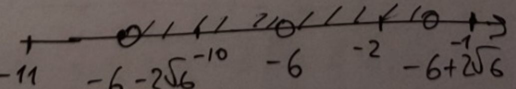
$\frac{D}{4} = 36-36=0$

$a_1 = -6. \Rightarrow a_1 \neq -6$

$2\sqrt{6} \vee 4$    $2\sqrt{6} \vee 5$    $-11 < -6-2\sqrt{6} < -10$

$24 > 16$    $24 < 25$    $\Rightarrow -2 < -6+2\sqrt{6} < -1$

Уч. 1) и 2)




Ответ: $\{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$.

2

21100779 (U302476 M1297841)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100779**

ID профиля: **302476**

Вариант 24

№5 Чистовик

$a=\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$; $b=\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $c=\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ: $x\in(-49;-1)\setminus\{-42;-2\}$.

$$\begin{cases}29-x>0\\29-x\neq1\\\frac{x}{7}+7>0\\-x-1>0\\(x+1)^2\neq1\\\frac{x}{7}+7\neq1\end{cases}\qquad\begin{cases}x<29\\x\neq28\\x>-49\\x<-1\\x\neq0\\x\neq-2\\x\neq-42\end{cases}$$

$a=2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ | $a\cdot b\cdot c=2$.

$b=\frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)$

$c=2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$

I сл.

$a=b=c-1 \Rightarrow a^2\cdot(a+1)=2$

$2\left(\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\right)=\frac{1}{2\log_{(29-x)}(-x-1)}$

$a^3+a^2-2=0$

$a^2(a-1)+2a(a-1)+2(a-1)=0$

$\left[\begin{array}{l}a^2+2a+2=0\ D<0.\\a=1\end{array}\right.$

$a=1$ $\qquad\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{2}$

$29-x=\frac{x^2}{49}+49+2x$

$x^2+49\cdot3x+49\cdot20=0$

2

"Чистовик"

№5 (продолжение)

$x^2 + 147x + 98 = 0$

$D = 49^2 \cdot 9 - 49 \cdot 80 = 7^2(9-80) < 0.$ $\Rightarrow$ нет реш-ий

II сл.

$\left.\begin{array}{l} a = c = b - 1 \\ abc = 2 \end{array}\right| \Rightarrow (a+1)a^2 = 2.$

аналогично I сл.

III $a - 1 = b = c$

$(b+1)b^2 = 2$

Аналогично I сл. $b = 1$

$(x+1)^2 = 29 - x$

$x^2 + 2x + 1 = 29 - x$

$x^2 + 3x - 28 = 0$

$D = 9 + 112 = 11^2$

$x = \frac{-3 \pm 11}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = -7 \\ x = 4 \text{ не входит в ОДЗ.} \end{array}\right.$

Ответ: $\{-7\}$.

3

Чистовик

№4

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$

$\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1) = 19.$
$\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2) = 15.$
$\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1) = 1.$
$\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2) = 1.$

а) $\alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = 1$
$(a = 33)$
$a \neq b;\ a \neq c$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \beta_1 = 19;\ \gamma_1 = \overline{1,19} \\ \gamma_1 = 19;\ \beta_1 = \overline{1,18} \end{array}\right. \text{37 вар.} \\ \left[\begin{array}{l} \beta_2 = 15;\ \gamma_2 = \overline{1,15} \\ \gamma_2 = 15;\ \beta_2 = \overline{1,14} \end{array}\right. \text{29 вар} \end{cases}$

$\begin{cases} b = c \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = \gamma_1 \\ \beta_2 = \gamma_2 \end{cases} \\ \text{Есть одна тройка } a = 33;\ b = 3^{19} \cdot 11^{15} = c \end{cases}$

б) $\alpha_1 = 1;\ \beta_2 = 1$
$\Downarrow$

$\begin{cases} \max(\beta_1;\gamma_1) = 19 \text{ 37вар} \\ \max(\alpha_2;\gamma_2) = 15 \text{ 29вар.} \end{cases}$

$a = b \neq c: \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 = 1 \\ \alpha_2 = \beta_2 = 1 \end{cases}$ $a = b = 33$, $c = 3^{19} \cdot 11^{15}$ одна тройка

$\begin{cases} a = c \neq b: \alpha_1 = \gamma_1 = 1 \\ \alpha_2 = \gamma_2 = 15 \\ \beta_1 = 19 \\ a = c = 3 \cdot 11^{15} \\ b = 3^{19} \cdot 11 \end{cases}$

$b = c \neq a$

$\begin{cases} \beta_1 = \gamma_1 = 19 \\ \beta_2 = \gamma_2 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 15 \end{cases}$ $a = 3 \cdot 11^{15}$, $b = c = 3^{19} \cdot 11$ (это перестановка предыдущего случая)

Если тройки из разл. чисел, то $\forall$ пер-ка — точек подходит

Итого: а) из разл. чисел $(a;b;c)$: $(37 \cdot 29 - 1) \cdot 6$

б) из разл. чисел $(a;b;c)$: $(37 \cdot 29 - 1 - 3) \cdot 6$

Ещё две с повторами и 3ч чисел дри тип:

$\underbrace{a = 33;\ b = c = 3^{19} \cdot 11^{15}}_{3\text{ вар}}$; $\underbrace{a = c = 3 \cdot 11^{15};\ b = 3^{19} \cdot 11}_{3\text{ вар}}$

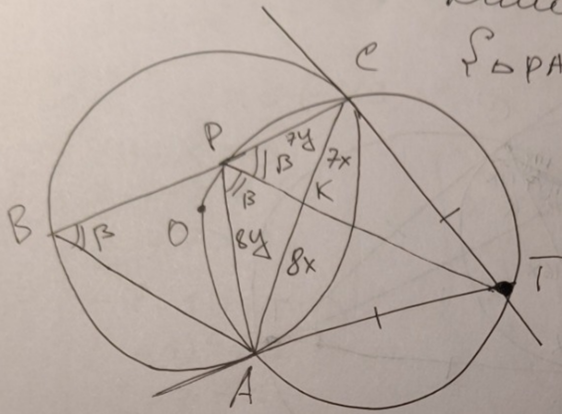
$\sum = 1072 \cdot 6 + 1069 \cdot 6 + 6 = 2142 \cdot 6 = 12852.$ Ответ: 12852.

Чистовик

№6

Дано: $S_{\triangle PCK} = 14$

$S_{\triangle PAK} = 16.$




1) В. 4ˣ уг. OCTA: $\angle OCT = \angle OAT = \frac{\pi}{2}.$

2) $\angle COA = \angle APC$ т.к. углы упир. на одну дугу. ~~CTA~~.

$\Downarrow$

$\angle AOC = \pi - \angle ATC$

$\Rightarrow \angle APC = \pi - \angle ATC \Rightarrow$ Вокруг 4ˣ уг PCTA можно опис. окружн, но только одну $\Rightarrow T \in$ окр.

3) $\angle APK = \angle KPC = \beta$ т.к. углы упир. на $CT = AT$.

4) $S_{PKC} = \frac{PK}{2} \cdot PC \sin\beta$; $S_{APK} = \frac{PK}{2} \cdot AP \cdot \sin\beta$

$\frac{PC}{AP} = \frac{7}{8}.$

5) $\beta = \angle APC = \angle AOC \Rightarrow \angle ABC = \beta$

6) $\frac{CK}{KA} = \frac{7}{8}$ из. св-ва пл-дей △-ов

7) $\triangle CPK \sim \triangle BAC$ (по двум углам) $\Rightarrow$

4

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \left(\frac{15}{7}\right)^2 \cdot S_{\triangle PKC} = \frac{225}{49} \cdot 14 = \frac{450}{7}.$

Ответ: $\frac{450}{7}.$