Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100771**

ID профиля: **321142**

Вариант 24

Чистовик Вариант 24

1. Пусть $a_2 - a_1 = r$, $r > 0$, тогда: $a_9 = a_1 + 8r$, $a_5 = a_1 + 4r$, $a_{18} = a_1 + 17r$, $a_{10} = a_1 + 9r$, $a_{13} = a_1 + 12r$.

- $S = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{9(2a_1 + 8r)}{2} = 9a_1 + 36r$.
- $a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4r)(a_1 + 17r) = a_1^2 + 21a_1 r + 68r^2$
- $a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9r)(a_1 + 12r) = a_1^2 + 21a_1 r + 108r^2$

Заметим что $a_{10} \cdot a_{13} - 60 < S < a_5 a_{18} + 4$, тогда:

$108r^2 - 60 < 68r^2 + 4 \Leftrightarrow 40r^2 < 64 \Leftrightarrow r^2 < \frac{8}{5} < 4 = 2^2$,

но т.к. a_1, a_2 - целые, тогда из $a_2 - a_1 = r$, r - целое, значит $r = 1$, так как прогрессия возрастающая, тогда: $S = 9a_1 + 36$; $a_5 \cdot a_{18} = a_1^2 + 21a_1 + 68$;

$a_{10} \cdot a_{13} = a_1^2 + 21a_1 + 108$

- $a_5 \cdot a_{18} > S - 4 \Leftrightarrow a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32 \Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$ $\Leftrightarrow (a_1 + 6)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -6$. (1)
- $a_{10} \cdot a_{13} < S + 60 \Leftrightarrow a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 96 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 + 12a_1 + 36 - 24 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_1 + 6)^2 - (2\sqrt{6})^2 < 0 \Leftrightarrow (a_1 + 6 - 2\sqrt{6})(a_1 + 6 + 2\sqrt{6}) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 \in (-6 - 2\sqrt{6}; -6 + 2\sqrt{6})$.

так как $\sqrt{576} < \sqrt{600} < \sqrt{625} \Leftrightarrow 24 < 10\sqrt{6} < 25 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4{,}8 < 2\sqrt{6} < 5$, ну и a_1 - целое: $a_1 \in \{-10; -9; \ldots; -2\}$, но из (1): $a_1 \neq -6$

1

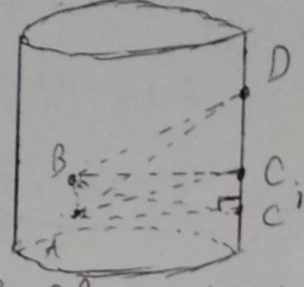
Ответ:

$\{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$.

Чистовик. Вариант 24.

2. $AB = 4$; $AC = CB = 7$;

$AD = DB = 8$.

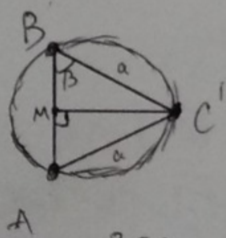


• Давайте ~~тогда~~ будем двигать точку C на отрезке CD, пока не найдем точку C', при которой тетраэдр $ABC'D$ - прямой, ($DC' \perp (ABC')$). Эта точка может быть внутри или снаружи отрезка CD (рассмотрим далее 2 случая)

• Пусть $AC' = a$, тогда по Пифагору для $\Delta ADC'$ и $\Delta ACC'$: $\begin{cases} AD^2 = DC'^2 + AC'^2 \\ AC^2 = CC'^2 + AC'^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DC' = \sqrt{64-a^2} \quad (1) \\ CC' = \sqrt{49-a^2} \quad (2) \end{cases}$

• Заметим что $BC' = a$, так как $BD = AD$, $DC' \perp BC'$.

• Так как DC паралельна оси цилиндра и $DC' \perp (ABC)$, тогда точки A, B, C' принадлежат окружности $\mathcal{L}$, которое паралельно основанию, значит ее радиус (R), такойже как и у цилиндра. Нарисуем эту окружност:



пусть CM - высота $\Delta ABC'$, но $AC' = BC' = a$, $\Delta ABC'$ - равнобедренный, значит $MB = \frac{AB}{2} = 2$

пусть $\angle MBC - \beta$, тогда $\sin\beta = \frac{MC}{BC'} = \frac{MC}{a}$, где MC из т. Пифагоры: $MC = \sqrt{a^2-4}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$

из теоремы синуса: $\frac{AC'}{\sin\beta} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-4}}$. Найдем минимум функций $R(a)$ по производной:

$$R'(a) = \frac{2a\sqrt{a^2-4} - a^2 \cdot \frac{2a}{2\sqrt{a^2-4}}}{2(a^2-4)} = \frac{2a(a^2-4) - a^3}{2\sqrt{(a^2-4)^3}} = \frac{a^3 - 8a}{2\sqrt{(a^2-4)^3}},$$

$a^2 > 4 \Leftrightarrow a > 2$ ($a > 0$, a - длина отрезка). Найдем нули:

$R'(a) = 0 \Leftrightarrow a(a^2-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{8} \\ a = -\sqrt{8} \\ a = 0 \end{array}\right. \Rightarrow a = \sqrt{8}$.

2

21100771 (U321142 M1296205)

2. (Продолжение). Чистовик. Вариант 24

Покажем что $a = \sqrt{8}$ - точка минимума:

a	2		$\sqrt{8}$		$+\infty$
$R'(a)$	!	$- - -$	0	$+ + + +$	
$R(a)$	!	$\searrow$	m	$\nearrow$	

На отрезке $(2; \sqrt{8})$ $R(a)$ - убывает.
На $(\sqrt{8}; +\infty)$ - возрастает.

Из (1), (2): $\begin{cases} DC' = \sqrt{64 - a^2} \\ CC' = \sqrt{49 - a^2} \end{cases} = \begin{cases} DC' = 2\sqrt{14} \quad (\sqrt{56}) \\ CC' = \sqrt{41} \end{cases}$

- Если C' ниже точки C, $CD = DC' - CC' = 2\sqrt{14} - \sqrt{41}$
- Если C' между C и D, $CD = DC' + CC' = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$
- Если C' выше D: $CD = CC' - DC' = \sqrt{41} - 2\sqrt{14}$, $CD < 0$ - невозможно.

Ответ: $CD = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$ или
$CD = 2\sqrt{14} - \sqrt{41}$

3

~~[illegible]~~ Чистович, Вариант 24.

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10)\end{cases}$

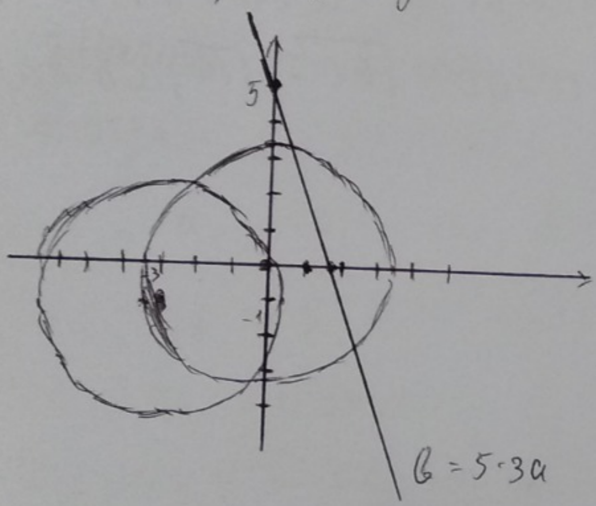
а) $-6a-2b<10 \Leftrightarrow b>5-3a$, тогда:

$a^2+b^2\le -6a-2b \Leftrightarrow a^2+6a+b^2+2b\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+3)^2+(b+1)^2\le 10 \Leftrightarrow (a+3)^2+(b+1)^2\le(\sqrt{10})^2$.

б) $b\le 5-3a$; тогда: $a^2+b^2\le 10 \Rightarrow a^2+b^2\le(\sqrt{10})^2$.

На Оа, Ов для случаях а и б:



Решения есть у $a^2+b^2\le 10$, где $b\le 5-3a$

$\begin{cases}a^2+b^2\le 10\\ b\le 5-3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2\le 10-a^2 & (1)\\ b\le 5-3a & (2)\end{cases}$

$(x-a)^2+(y-b)^2 = x^2+2ax+a^2+y^2+2by+b^2$, из

(1), (2): $x^2+2ax+a^2+y^2+2by+b^2\le x^2+2ax+y^2+$

$+2y(5-3a)+10 = x^2+2ax+y^2+10y-6ya+10$.

4

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100771**

ID профиля: **321142**

Вариант 24

Чистовик Вариант 24

4. $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 33 & (1) \\ НОК(a,b,c) = 3^{19} \cdot 11^{15} & (2) \end{cases}$

Так как $33 = 11^1 \cdot 3^1$, из (1): $a = 3^{a_1} \cdot 11^{a_2}$; $b = 3^{b_1} \cdot 11^{b_2}$;

$c = 3^{c_1} \cdot 11^{c_2}$. Из (1), (2): $\begin{cases} \min(a_1, a_2, a_3) = 1 \\ \max(a_1, a_2, a_3) = 19 \end{cases}$, $\begin{cases} \min(b_1, b_2, b_3) = 1 \\ \max(b_1, b_2, b_3) = 15 \end{cases}$

- Если поменять местами a, b, c то решения останутся прежними, тогда пусть $a_2 \le b_2 \le c_2$, тогда из (1): $a_2 = 1$, а из (2): $c_2 = 15$. $b_2 \in [1; 15]$, $b_2 \in$

~~а) Если $a_1 = 1$ и $b_1 = 19$, $c_1 \in [1; 19]$~~

~~$a = 15 \cdot 19 = 285$~~

~~б) Если $a_1 = 1$ и $c_1 = 19$, $b_1 \in [1; 19]$~~

- Так как один из $a_1, b_1, c_1 = 1$, а другой $= 19$.

$n' = C_4^2 \cdot 15 \cdot 19 = 285 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 285 \cdot 6 = 1710$

- В итоге $n = n' \cdot C_3^2 = 1710 \cdot 3 = 5130$

Ответ ~~$n = 1$~~

$n = 5130$

Чистовик Вариант 24

5. $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

• ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{29-x}>0 \\ \sqrt{29-x}\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ (x+1)^2>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ 29-x>0 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}>0 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}\neq 1 \\ -x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -1 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \\ x<29 \\ x\neq -49 \\ x\neq -42 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x\in(-49;-1)\setminus\{-42;-2\}$

• $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ (1)

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=\frac{1}{2}\log_{\cancel{x+1}}(29-x)$ (2)

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$ (3)

Перемножим: $2\log_{\cancel{29-}x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)\cdot$

$2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=2$

Так как 2 из них равны, а одно на 1 больше:

$a\cdot a\cdot(a+1)=2 \Leftrightarrow a^3+a^2-2=0.$ ~~(~~

Заметим что $a=1$ решение; $\begin{array}{l|l} a^3+a^2+0a-2 & a-1 \\ \underline{a^3-a^2} & a^2+2a+2 \\ 2a^2+0a & \\ \underline{2a^2-2a} & \\ 2a-2 & \end{array}$

$a^3+a^2-2=0 \Leftrightarrow (a-1)(a^2+2a+2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)[(a+1)^2+1]=0 \Leftrightarrow a=1$, $(a+1)^2\geq 0$, $(a+1)^2+1>0$.

а) Если первое (1) на 1 больше: $2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow 29-x=\frac{x}{7}+7 \Leftrightarrow 22=\frac{8x}{7} \Leftrightarrow x=\frac{77}{4} \notin$ ОДЗ.

б) Если третье (3) на 1 больше: $2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x-1=\frac{x}{7}+7 \Leftrightarrow -8=\frac{8x}{7} \Leftrightarrow x=-7$, проверим: $\begin{cases} 2\log_{36}6=1 \\ \frac{1}{2}\log_6(36)=1 \end{cases}$

истина

2.

21100771 (U321142 M1296206)

Чистовик Вариант 24

5. (Продолжение)

в) Если второе (2) на 1 больше, другие два равны a:

$$\begin{cases} 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1 \\ 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7}+7=\sqrt{29-x} \\ -x-1=\sqrt{\frac{x}{7}+7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{49}+2x+49=29-x \\ x^2+2x+1=\frac{x}{7}+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{49}+3x+20=0 \\ x^2+\frac{13x}{7}-6=0 \end{cases}$$

• Для первого: $\Delta = 9-\frac{80}{49}=\frac{441-80}{49}=\frac{361}{49}$; $\sqrt{\Delta}=\frac{19}{7}$

$$x=\frac{-3\pm\frac{19}{7}}{2\cdot\frac{1}{49}}=\frac{-21\pm19}{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=-140 \notin \text{ОДЗ} \end{array}\right. \Rightarrow x=-7.$$

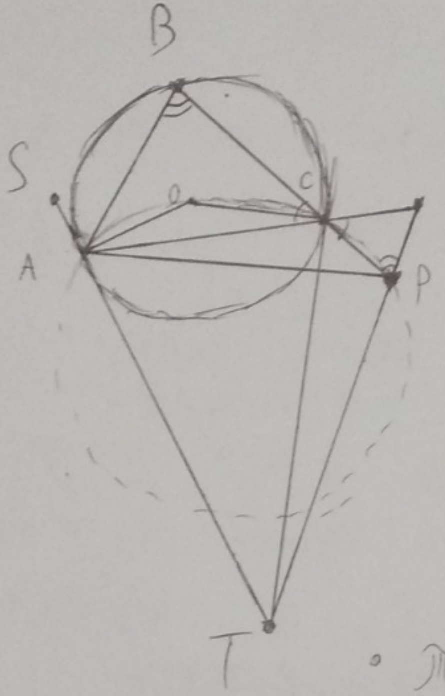
$x=-7$ мы уже проверяли в пункте б.

Ответ: $x=-7$.

3

Чистовик   Вариант 24

6.



а) • Пусть $\angle A - \alpha$; $\angle B - \beta$; $\angle C - \gamma$.

• Пусть $\angle OAP - \delta$, тогда $\angle OCP = 180^\circ - \delta$, т.к. OACP - вписаный

• $OC \perp CT$, тогд $\angle TCP = 180^\circ - \delta - 90^\circ = 90^\circ - \delta$.

• Так как $OA \perp AT \Rightarrow \angle PAT = 90^\circ - \angle OAP = 90^\circ - \delta$.

• Заметим $\angle PAT \equiv \angle TCP \Rightarrow$ TACP - вписаный.

• По теореме о касательной и хорде (TA и AB): $\angle BAS = \angle BCA = \gamma$, $S \in (AT)$.

• Т.к. $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle TAC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BAS$ (из угла A), $\angle TAC = 180^\circ - \alpha - \gamma$, ну а из $\triangle ABC$: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. $\angle TAC = \beta$.

• ACPT - вписаный $\Rightarrow \angle CPK = \angle TAC$, $\angle CPK - \beta$.

• Так как для угла C: $\angle PCK \equiv \angle BCA$, $\angle PCK - \gamma$.

• $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам, тогда

$$\frac{BC}{PC} = \frac{AC}{CK} \quad (1)$$

• $A_{APC} = A_{APK} - A_{ACP} = 2$, ну а для $\triangle APK$:

$\frac{AC}{CK} = \frac{A_{APC}}{A_{CPK}}$, а для $\triangle ABP$: $\frac{BC}{PC} = \frac{A_{ABC}}{A_{ACP}}$, из (1):

$$\frac{A_{APC}}{A_{CPK}} = \frac{A_{ABC}}{A_{ACP}} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{2 \cdot 7}{14} = \frac{2}{7}.$$

4

Ответ: а) $A_{ABC} = \frac{2}{7}$