Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100743**

ID профиля: **338976**

Вариант 24

Чистовик. в-24, ч.1.

1 возр. арифм. прогр. $a_1, a_2, \dots$

$a_i \in \mathbb{Z}$, знаменатель прогрессии $b>0$

$b>0;\ a_{i+1} = a_i + b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in \mathbb{N}$

$$S_9 = \frac{9(2a_1+(9-1)b)}{2} = 9a_1 + 36b = S$$

$$(1)\ a_5 \cdot a_{18} = (a_1+4b)(a_1+17b) = a_1^2 + \underbrace{21ba_1}_{\vee\ S-4} + 68b^2$$

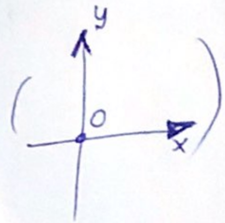
$$(2)\ a_{10} \cdot a_{13} = (a_1+9b)(a_1+12b) = a_1^2 + \underbrace{21ba_1}_{\wedge\ S+60} + 108b^2$$

Поскольку $b>0 \Rightarrow \overset{a_5 \cdot a_{18}}{(1)} < \overset{a_{10}\cdot a_{13}}{(2)}$, тогда имеем

$$S-4 < a_5 \cdot a_{18} < a_{10} \cdot a_{13} < S+60$$

Чистовик. вар. 24. ч. 1.

(3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 10 & (1)\\ a^2+b^2\leq \min(-6a-2b, 10) & (2)\end{cases}$

Относительно плоскосту Oxy ()

(1) – круг с. ц. в т. $O_1(a;b)$ и радиусом $\sqrt{10}$

(2) $\left[\begin{array}{l}a^2+b^2\leq 10,\ 10\leq -6a-2b \ (3)\\ a^2+b^2\leq -6a-2b,\ 10\geq -6a-2b \ (4)\end{array}\right.$

(4) $(a^2+6a+9)+(b^2+2b+1)-10\leq 0$

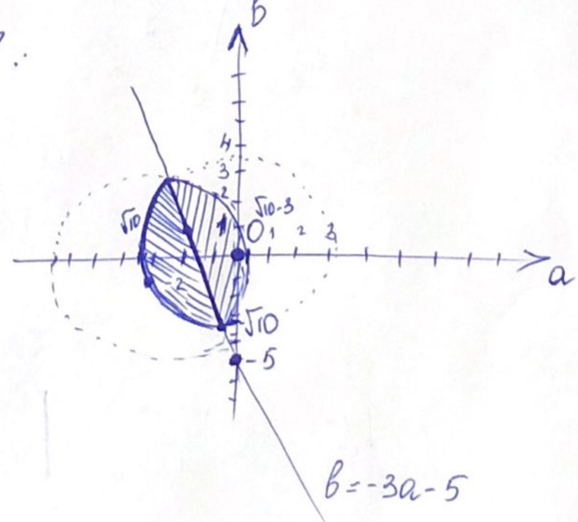
$(a+3)^2+(b+1)^2\leq 10$, $6a+2b+10>0 \Rightarrow b>-3a-5$

мн-во точек a и b в плоск. Oab
круг с ц. в т. $O_2(-3;-1)$ и радиусом $\sqrt{10}$

(3) круг с ц. в т. $O_3(0;0)$ и рад. $\sqrt{10}$ (в плоск. Oab)

$10+6a+2b\leq 0 \Rightarrow b\leq -3a-5$

Мн-во точек a, b:



$\geq 0 \; a_1^2 + b^2 \leq \min(-6a-2b, 10)$ Черновик

$-6a-2b > 10$

$-6a-2b < 10$

$-6a-2b = 10 \Rightarrow a = \frac{-10-2b}{6} = \frac{-5-b}{3}$

$-6a-2b \geq 0$ $\quad b \leq 3a$

$6a+2b \leq 0$

$b \leq -3a$

$a_5 \cdot a_{18} = a_1^2 + 21ba_1 + 68b^2 > S-4$

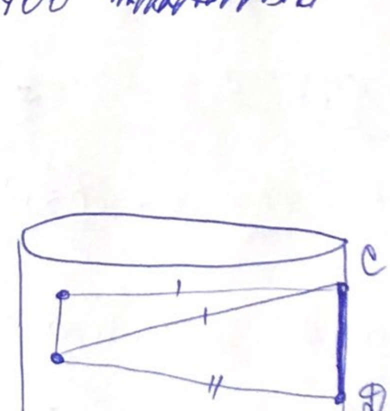
$a_{10} \cdot a_{13} = a_1^2 + 21ba_1 + 108b^2 < S+60$

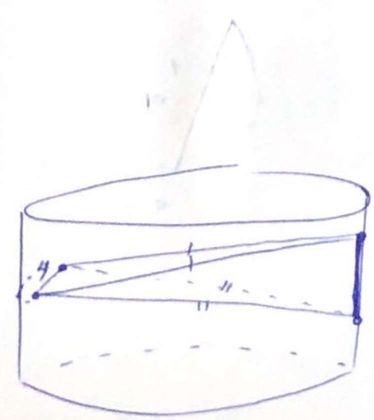
$S = 9a_1 + 36b$ $\quad > -S-60$

$40b^2 > -2S-56$

неравнос.

$40b^2$





$a_5 \cdot a_{18} = a_1^2 + 21a_1 b + 68b^2$ Черновик

$-a_{10} \cdot a_{13} = a_1^2 + 21a_1 b + 108b^2$

$S-4 < a_5 \cdot a_{18} < a_{10} \cdot a_{13} < S+60$

$S-4 < S+60$

$a_1^2 + 21ba_1 + 108b^2 > 9a_1 + 36b - 4$

$\sqrt{a_5 a_{18}} < \frac{a_5 + a_{18}}{2}$ $a_1^2 + (21b-9)a_1$

$S-4 <$ $a_1 < 0 \Rightarrow S < a_1^2 + 21a_1 b + 68b^2 + 4$

2

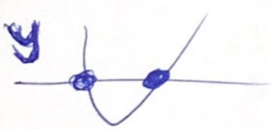
$\left(\frac{2a_1 + 21b}{2}\right)^2$ $S = 9a_1 + 36b$ $S > a_1^2 + 21a_1 b + 108b^2 - 60 \geq$

$\geq a_1^2 + 21a_1 + 108 - 60$

$a_1^2 + \frac{441b^2}{4}$ 68

$S > a_1^2 + 21a_1 + 48$

$a^2 + b^2 \leq -6a - 2b$



$(a^2+6a+9)+(b^2+2b+1)$ $(a_1^2 + 21a_1 + 210{,}25) - 161{,}75 \geq 0$

$10{,}5 \times 105$ ≤ 0

$525 - 10 \leq 10$ $S >$

105

$13(b-1)(13b-5)$ $21{,}025$ $S_9 \geq S$ $9a_1 + 9 > 161{,}75$

$S >$

$169(b-1)(b-\frac{5}{13})$

$a_{12} = \frac{9 - 21b \pm 13\sqrt{(b-1)(b-\frac{5}{13})}}{2}$ $a =$

Чорновик.

$\overset{1}{a_1}\quad \overset{2}{a_1+b}\quad \overset{3}{a_1+2b}\ \dots\ \overset{n}{a_1+(n-1)b}$

$a_1+(n-1)b\quad \dots\quad \dots\quad a_1$

$\cancel{2}S_n = \dfrac{n(2a_1+(n-1)b)}{2}$

1 3 5 7

$S_4 = \dfrac{4(2+6)}{2} = 16$

1 2 3 4 5 6 7 8 $\cancel{9}$

$b>0$

$189 \cdot 2 = 378$

234

$169 = 13$

$(13b - 9)^2$

$117 \cdot 2$

$-117 \,|\, 13$
$117 \,|\, 9$

$81 - 16$

$21 \cdot 21 = 441$

$441 - 272$

$28 + 41 = 69$

$189 \cdot 2 = 378$

$378 - 144 = 234$

$189 - 144 = 45$

$378 - 144 = 234$

$169b^2 - 117 \cdot 2b + 81$

$\cup$ $D \geq 0$

$a_1^2 + 21a_1b + 108b^2 - 9a_1 - 36b - 60 > 0$

$D = a_1^2 + (21b - 9)a_1 + 108b^2 - 36b - 60$

$234 \,|\, 6$: -18, 54, $= 39$

$39 \cdot 39 = 351, 117, 1521$

$441b^2 - 378b + 81 - 432b^2 + 144b + 240$

$= 9b^2 - 234b + 81 + 240$

$1521 - 321 = 1200$

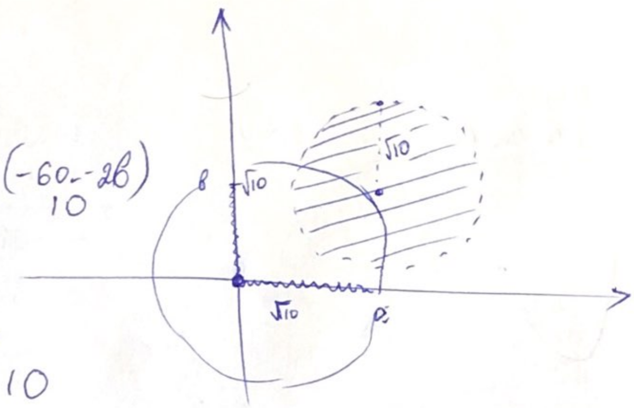
$(3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot 39 + 1521 - 1200 =$

$= (3b - 39)^2$

$(3b - 39)^2 - 1200 < 0$

Черновик.

$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)$



$-6a-2b \overset{?}{} 10$

вершина.

$-\frac{b}{2a} = \frac{9-21b}{2} = 4,5-10,5b$

$a_5 a_{18} \ge a_1^2 + 21a_1 + 68 \quad 272 \quad \times 68 \; 4$

$\ge S + 60 > a_{10} a_{13} \ge a_1^2 + 21a_1 + 108$

$9a_1 + 36b$ при $b \ge 2$:

$a_5 \cdot a_{18} \ge a_1^2 + 42a_1 + 272$

$9a_1$

$a^2+b^2 \le \min(a_1, -6a-2b)$ $\quad a^2+b^2 \le 10$

(10)

$a^2+b^2 \quad a^2+b^2$

$6a+2b+10>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a > \frac{-b-5}{3}$

~~Чистовик.~~ В-24. Часть 1.

Черновик.

Задача 1.

Возр. арифм. прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$a_i \in \mathbb{Z}$ S - сумма первых 9 чл.

(1) $a_5 \cdot a_{18} > S - 4$

(2) $a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$ a_1 - ?

Пусть, прогрессия задана $a_{i+1} = a_i + b$, $(a_1, a_1 + b, \ldots)$ $\overset{"}{a_1}, \overset{"}{a_2}, \ldots$

где $b > 0$ $\in \mathbb{N}$, т.к. $a_i \in \mathbb{Z}$, а посл. возр

тогда (1) $a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + (5-1)b)(a_1 + (18-1)b) =$

$= (a_1 + 4b)(a_1 + 17b) =$

$= a_1^2 + 21a_1 b + 68b^2$

Аналогично,

(2) $a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9b)(a_1 + 12b) = a_1^2 + 21a_1 b + 108b^2$

$S_9 = \dfrac{9(2a_1 + (9-1)b)}{2} = 9a_1 + 36b$ (Сумма арифм. прогр.)

(1) $a_1^2 + 21ba_1 + 68b^2 > 9a_1 + 36b - 4$ (перенесем)

$a_1^2 + (21b - 9)a_1 + 68b^2 - 36b + 4 > 0$

приравняв к 0, ст. коэф. $= 1 > 0$ (параб. ветви ↑) (при решении относительно a_1)

Тогда поскольку все выраж. $> 0 \Rightarrow D < 0$

$D = (21b - 9)^2 - 4(68b^2 - 36b + 4) =$

$= 441b^2 - 378b + 81 - 272b^2 + 144b - 16 =$

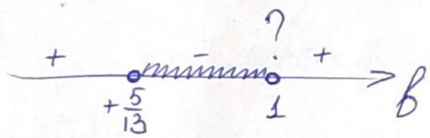
$= 169b^2 - 234b + 65 = (13b)^2 - 2 \cdot 13b \cdot 9 + 9^2 - 16 =$

$= (13b - 9)^2 - 4^2 = (13b - 13)(13b - 5) < 0$

1. Часть 2. ~~Чистовик.~~ Черновик.

$D = 13(b-1)(13b-5) < 0$, Нули ф-ии: $b = 1$, $b = +\frac{5}{13}$

По мет. интервалов:



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100743**

ID профиля: **338976**

Вариант 24

В-24. Часть 2.

Чистовик.

(4.) $a, b, c \in N$.

ч. 1. $\begin{cases} НОД(a; b; c) = 33 \\ НОК(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$

Докажем, что в разложении чисел a, b, c на множ. содержатся только 3^{α} и 11^{β}, где α и $\beta \geq 1$, $\alpha, \beta \in Z$

1) Пусть, какое то из чисел сод. множитель p (простой), отличный от 3 и 11, $\vdots$ этому числу но тогда $НОК(a, b, c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \not\vdots p$, что противоречит определению НОК'а чисел

2) Пусть, $\alpha = 0$, но тогда поскольку $НОД(a, b, c) = 3^{1} \cdot 11^{1}$, то число, содержащее в разложении на прост. мн. 3^{0} не будет делиться на 33, противоречие из определения НОД'а.

Аналогично с $\beta = 0 \Rightarrow \underline{\alpha, \beta \geq 1}$. ч.т.д.

Теперь, поскольку $НОК(a, b, c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$, то хотя бы одно число имеет в разл. число 3^{19} и хотя бы одно число содерж. в разл. 11^{15}, иначе если $\alpha_{max} < 19$, то НОК содержал бы 3^{α}, где $\alpha \leq 18$, противор. условию. Аналогично с 11-тью

См. на обороте 2

в-24. Часть 2. Чистовик

(4) Часть 2.

Также хотя бы одно из чисел содержит 3^α, $\alpha = 1$, иначе $\alpha_{min} \geq 2$, но тогда НОД чисел содержал бы 3^α, $\alpha \geq 2$, противор.

Аналогично хотя бы одно из чисел содержит 11^1.

Найдем кол-во всех троек, удовл. усл-ию:

Пусть,

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}$ $b = 3^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2}$ $c = 3^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3}$

среди α_i есть 1 и 19, среди β_i есть 1 и 15

Оставшееся $\alpha_j \in [1; 19]$, ост. $\beta_j \in [1; 15]$.

Пусть, оставшееся $\alpha_j = 1 \Rightarrow \frac{3*2*1}{2!}$ → места, $2!$ → ! повторов

$\alpha_j = 19 \Rightarrow \frac{3*2*1}{2!}$

$\alpha_j \in [2; 18] \Rightarrow 17*3*2*1$ (нет повторов) кол-во вариаций

Всего для α_i: $3 + 3 + 102 = 108$

Аналогично

при $\beta_j = 1 \Rightarrow \frac{3*2*1}{2!}$

$\beta_j = 15 \Rightarrow \frac{3*2*1}{2!}$

$\beta_j \in [2; 14] \Rightarrow 13*3*2*1$

всего $3 + 3 + 78 = 84$

Итого, перемножив, получим: $108*84 = 9072$. Ответ: 9072.

В-24. Часть 2. Чистовик

(5) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ (1)

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$ (2)

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-(x+1))$ (3)

ОДЗ:

(1): $29-x>0 \Rightarrow x<29$

$\sqrt{29-x}\neq 1 \Rightarrow x\neq 28$

$\frac{x}{7}+7>0 \Rightarrow x>-49$

(2): $(x+1)^2>0 \Rightarrow x\neq -1$

$(x+1)^2\neq 1 \Rightarrow x\neq 0;\ x\neq -2$

$29-x>0 \Rightarrow x<29$

(3): $\frac{x}{7}+7>0 \Rightarrow x>-49$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7}\neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{7}+7\neq 1 \Rightarrow x\neq -42$

$-(x+1)>0 \Rightarrow x<-1$

Итого с учетом ОДЗ,

$x\in(-49;-42)\cup(-42;-2)\cup(-2;-1)$

т.к. $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$,

а $\log_{a^k}(b)=\log_a b^{1/k}$,

то:

$\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)^{1/2}}(-(x+1))=$

$=\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}\left((-(x+1))^2\right)=$

$=\log_{\frac{x}{7}+7}\left((x+1)^2\right)$; Аналогично

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{29-x}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right)^2\right)$

Тогда:

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-(x+1))\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=$

$=\log_{\frac{x}{7}+7}\left((x+1)^2\right)\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{29-x}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right)^2\right)=$

$=\log_{\frac{x}{7}+7}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right)^2\right)=2$

Тогда если 2 из них равные a, а третье $a+1$,

то $a\cdot a\cdot(a+1)=a^3+a^2=2$; $a^3+a^2-2=0$

Угадывается корень $a=1$, тогда разделив, получ.:

$(a-1)(a^2+2a+2)=(a-1)(a^2+2a+1+1)=(a-1)\left((a+1)^2+1\right)=0$

См. на обороте 2

в-24. Часть 2. Чистовик

(5) ч. 2.

$(a-1)((a+1)^2+1)=0$

Поскольку правая скобка ≥ 1,

то единств. корень $\underline{a=1}$

Тогда 2 из чисел равны по 1, а третье = 2

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1 \\ \log_{(x+1)^2}(29-x)=1 \\ \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-(x+1))=2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} 1 \\ \text{либо } 2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \text{либо } 1 \\ 1 \end{array}$$

Получаем систему:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7 \\ (x+1)^2=29-x \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}^2=(-x-1)^* \end{cases} (1) \\ \begin{cases} \sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7 \\ (x+1)^{2^2}=(29-x)^* \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}=-x-1 \end{cases} (2) \\ \begin{cases} \sqrt{29-x}^2=\frac{x}{7}+7 \\ (x+1)^2=29-x \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7}=-x-1 \end{cases} (3) \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ:

(1) $\frac{x}{7}+7=-x-1$;

$x\left(\frac{1}{7}+1\right)=-7-1$

$x=\frac{-8\cdot 7}{8}=-7 \in X$

Подставим:

$\sqrt{29+7}=\underline{6}=-\frac{7}{7}+7=\underline{6}$; $(-7+1)^2=\underline{36}=29+7=\underline{36}$ ✓

(2) $\sqrt{\frac{x}{7}+7}=-(x+1)$, возв. в кв: $\frac{x}{7}+7=x^2+2x+1$; $x^2+\frac{13}{7}x-6=0$, $*7$ =>

=> $7x^2+13x-42=0$; $D=169+1176=1345$ =>

$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{1345}}{14}$, но т.к. $x<-1$, а $\sqrt{1345}>\sqrt{169}$, то корень $\frac{-13-\sqrt{1345}}{14}$, но

(3) $29-x=\frac{x}{7}+7$; $\frac{8}{7}x=22$; $x=\frac{7\cdot 22}{8}>0$, не подх. по ОДЗ

но поскольку (1) и (2) системы имеют общ. выражения, то подставив

см. далее 2

в-24. Часть 2.

Чистовик

во (2) Получился корень $\frac{-13-\sqrt{1345}}{14}$,

но подставив его в общ. выражение из (1), мы не получим рав-ва, ведь в (1) подходящий корень $x=-7 \Rightarrow x=\frac{-13-\sqrt{1345}}{14}$ не подх.

(т.к. второй корень выр. $\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7$ - иной)

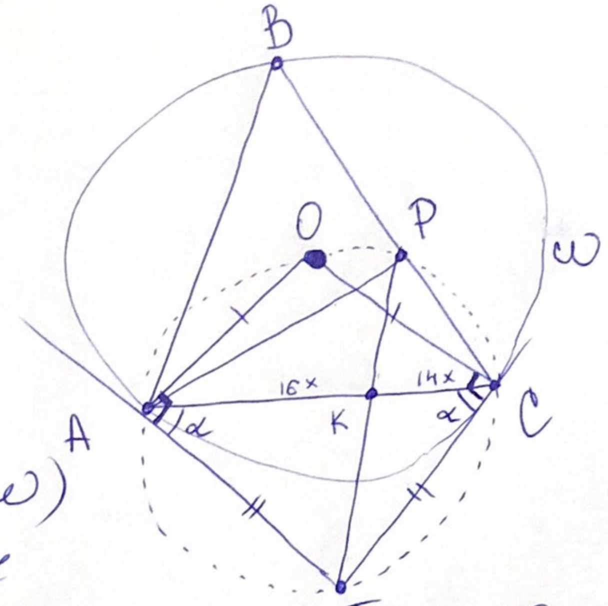
Ответ: при $x=-7$.

В-24. Часть 2.

Чистовик

6

а) $S_{\triangle ABC}$ - ?



Решение:

Пусть, $\angle AOC = 2\alpha$ (центральный в ω)

Тогда поскольку

Угол м-ду касательной и хордой равен половине меры дуги, стягиваемой этой хордой, то $\angle CAT = \frac{1}{2} \smile AC$ (меньшей) $= \frac{1}{2}\angle AOC = \alpha$

$\angle ACT =$

Тогда в $\triangle ACT$, $\angle ATC = 180° - \angle CAT - \angle ACT =$
$= 180° - 2\alpha$, Тогда заметим, что $\angle AOC + \angle ATC =$
$= 2\alpha + 180° - 2\alpha = 180° \Rightarrow AOCT$ - вписанный, а т. T лежит на окр., опис. ок. $\triangle AOC$.

$AO = OC$, как радиусы ω; $AT = CT$, поскольку стягивают равные дуги ($\angle TAC = \angle ACT = \alpha$); $\angle OCT = \angle OAT = 90°$, т.к. радиус, провед. в т. касания, $\perp$ касательной

в-24. Часть 2.

Черновик

(5)

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, (1)

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$, (2)

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-(x+1))$ (3)

ОДЗ:

(1): $\sqrt{29-x}>0 \Rightarrow x<29$

$\sqrt{29-x}\neq 1 \Rightarrow x\neq 28$

(2) $(x+1)^2>0 \Rightarrow x\neq -1$

$(x+1)^2\neq 1 \Rightarrow x\neq 0$

$x\neq -2$

$$\frac{\log_{\frac{x}{7}+7}\left((x+1)^2\right)}{\log_{(x+1)^2}(29-x)} = \log_{\frac{x}{7}+7}(29-x)$$

(3) $\sqrt{\frac{x}{7}+7}>0$

$\times 34$

$\log_{\frac{x}{7}+7}((x+1)^2)\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\sqrt{a}} b$

$\cdot\log_{29-x}\left(\left(\frac{x}{7}+7\right)^2\right)=$

$=2$

$\log_{\sqrt{4}} 8=3$

$\log_4 64=3$

$\times 49$

24

196

98

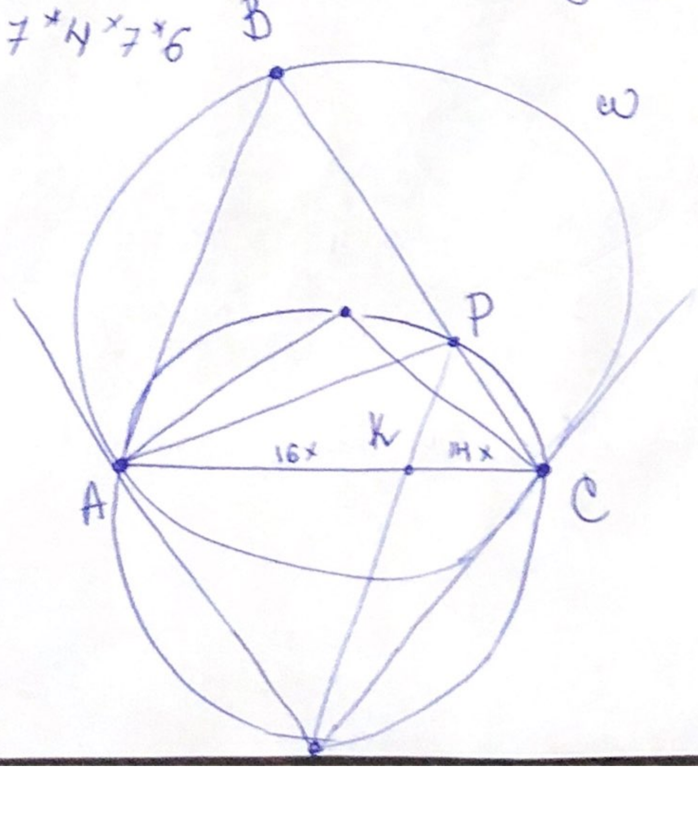
$+1176$

36

$a^{1}\cdot a^{3}\cdot a^{4}$ (a+1) =

$= a^3+a^2=2$

$7\times 4\times 7\times 6$

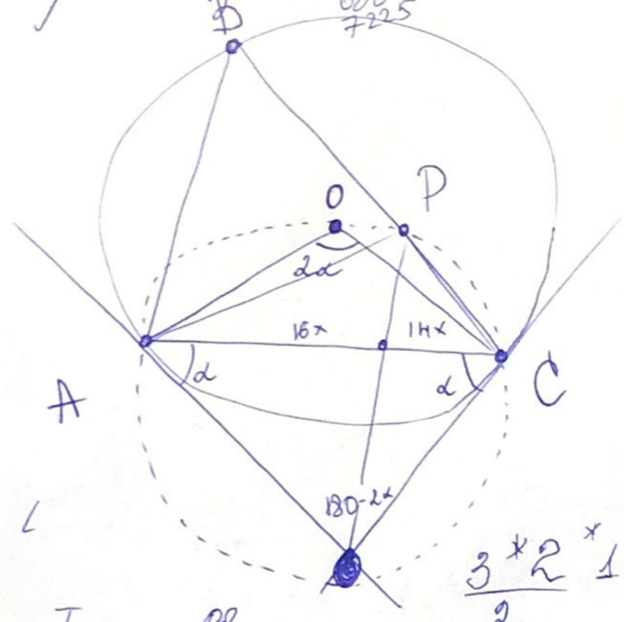


$a^3+a^2-2=0$

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ \hline -\,a^3-a^2 & a^2+2a+2 \\ -\,2a^2+0a & \\ 2a^2-2a & \\ 2a-2 & \end{array}$$

Черновик

$\begin{array}{r} \times 85 \\ 85 \\ 425 \\ 680 \\ \hline 7225 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} \times 39 \\ 39 \end{array}$ $\quad 1345$



$180^\circ - 2\alpha = 90 - \alpha$

$\begin{array}{r} \times 35 \\ 35 \\ 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$

НОД $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$2 \cdot 3$

НОК $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

НОД$(a, b, c) = 33$

$\frac{3 * 2 * 1}{2}$ $\quad 3 \quad 11$

$\begin{array}{r} 98 \\ -13 \\ 85 \end{array}$

1 1 19 $\quad$ НОК : 3^0 $\quad 3^{19}$ $\quad 11^{15}$

1 19 × 3^0 $\quad$ НОД

3 * 2

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$ $\quad \frac{3}{3} \quad \frac{3^{19}}{2} \quad \frac{11}{3} \quad \frac{11^{15}}{2}$

$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3$ $\quad a \quad b \quad c$

123	3	2	1
	2	1	3
	1	2	3
	3	1	2
	1	3	2

1 15 y

3 · 2

a: 3 11, 19 · 15 $\quad b$: 3 11, 19 · 15 $\quad c$: 3 11, 19 · 15

$6 * 6 = 36$

$1 \leq \alpha \leq 19$

$1 \leq \beta \leq 15$

3 · 2 · 1

19 · 15

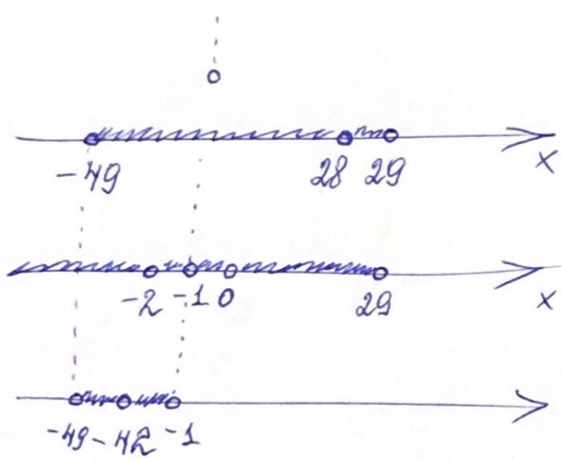
$a \quad b \quad c$

$3 \cdot 11 \quad 3^{19} \cdot 11^{15}$

$\begin{array}{r} \times 13 \\ 6 \end{array}$ $\quad 78$ $\quad \begin{array}{r} \times 17 \\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} \times 108 \\ 84 \\ 432 \\ 864 \\ \hline 9072 \end{array}$

Черновик

$-x-1>0 \Rightarrow x<-1$



$\frac{AC}{\sin\alpha}=2R$

$\frac{AC}{\sin(\operatorname{arctg}\frac{3}{5})}=2R$

$\underline{\cos\alpha\,\mathrm{tg}} = \frac{\sin\cos\alpha}{\cos}$

$\frac{AC}{\cos(\operatorname{arctg}\frac{3}{5})\cdot\frac{3}{5}}$

$\sin\left(\frac{\arcsin\frac{3}{5}}{\arccos\frac{3}{5}}\right)=$

$=$