Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100600**

ID профиля: **833921**

Вариант 24

№1

Чистовик

S - сумма первых 9ти членов арифм. прог.

Тогда пусть первый член - a, а разность прогрессии - $b > 0$

Получается, что $\underset{a_1}{a} + (\underset{a_2}{a+b}) + (\underset{a_3}{a+2b}) + \ldots + (\underset{a_9}{a+8b}) = S$

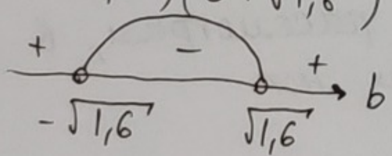
$$S = 9a + b(1+2+3+\ldots+8) = 9a + b\cdot\frac{8\cdot 9}{2} = 9a + 36b$$

Из условия

$$\begin{cases}(\underset{a_5}{a+4b})(\underset{a_{18}}{a+17b}) > S-4 \\ (\underset{a_{10}}{a+9b})(\underset{a_{13}}{a+12b}) < S+60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+21ab+68b^2 > S-4 \\ a^2+21ab+108b^2 < S+60\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+21ab+68b^2 > S-4 \\ a^2+21ab+68b^2 < S+60-40b^2\end{cases} \Rightarrow S-4 < S+60-40b^2$$

$$S-4 < S+60-40b^2$$
$$40b^2 < 64$$
$$b^2 < 1{,}6$$
$$(b-\sqrt{1{,}6})(b+\sqrt{1{,}6}) < 0$$



Значит $b \in (-\sqrt{1{,}6}; \sqrt{1{,}6})$

Поскольку арифм. прогр. $a_1, a_2, a_3\ldots$ состоит из целых чисел, то $a = a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2 = a+b \in \mathbb{Z}$ ...

Т.к. $a_2 \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 - a = b \in \mathbb{Z}$

Значит числа a и b целые. Поскольку последовательность возр., $b > 0$. Значит $0 < b < \sqrt{1{,}6}$, $b \in \mathbb{Z}$.

Подходит единственное $b = 1$

Перепишем уравнения учитывая это р-во:

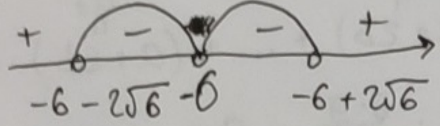
$$\begin{cases} S = 9a+36 \\ a^2+21a+68 > S-4 \\ a^2+21a+108 < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+21a+68 > 9a+36-4 \\ a^2+21a+108 < 9a+36+60\end{cases}$$

см. лист 2

Чистовик №1 (продолжение)

$$\begin{cases} a^2+12a+36>0 \\ a^2+12a+12<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+6)^2>0 \\ (a+6)^2-24<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+6)^2>0 \quad (1) \\ (a+6-2\sqrt6)(a+6+2\sqrt6)<0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) верно для всех a, кроме $a=-6$

(2)  $a \in (-6-2\sqrt6;\ -6+2\sqrt6) \setminus \{-6\}$

~~Т.к. 2a ∈ Z, подходят только 2a~~

~~4 < 2√6 < √24 < √25 < 5~~

$2\sqrt6=\sqrt{24}<\sqrt{25}=5$

~~-6-√25 < -6-2√6 < -8~~

$-6-2\sqrt6=-6-\sqrt{24}>-6-\sqrt{25}=-11$

$-6+2\sqrt6=-6+\sqrt{24}<-6+\sqrt{25}=-1$

Значит $-11<a<-1 \quad (a\neq-6)$

$a=-10,\ -9,\ -8,\ -7,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2$

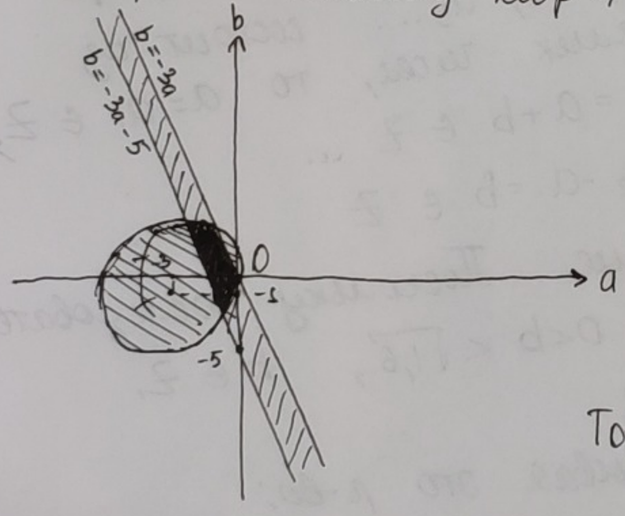
Ответ: $a=-10,\ -9,\ -8,\ -7,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le10 \\ a^2+b^2\le\min(-6a-2b,\ 10) \end{cases}$$

Зафиксируем произвольные x, y. И рассмотрим, в каких случаях a и b существуют, а в каких нет.

Построим систему коор-т aOb



Поскольку $a^2+b^2\ge0$ и $a^2+b^2\le\min(-6a-2b,10)$, рассмотрим 2 случая:

(1) $-6a-2b\le10$

(2) $-6a-2b>10$

(1) $0\le-6a-2b\le10 \Leftrightarrow \begin{cases} b\le-3a \\ b\ge-3a-5 \end{cases}$

Тогда $a^2+b^2+6a+2b\le0$

$a^2+6a+9+b^2+2b+1\le10$

$(a+3)^2+(b+1)^2\le10$

~~Но~~ это ~~окр.~~ круг с коор. $(-3;-1)$ и радиуса $\sqrt{10}$

Подход. область изобр. на рисунке

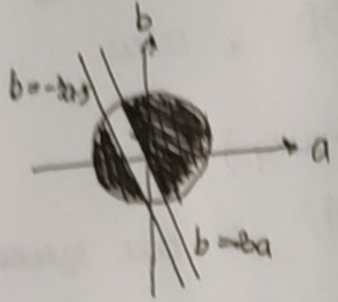
см. стр. 3

Чистовик

№3 (продолжение)

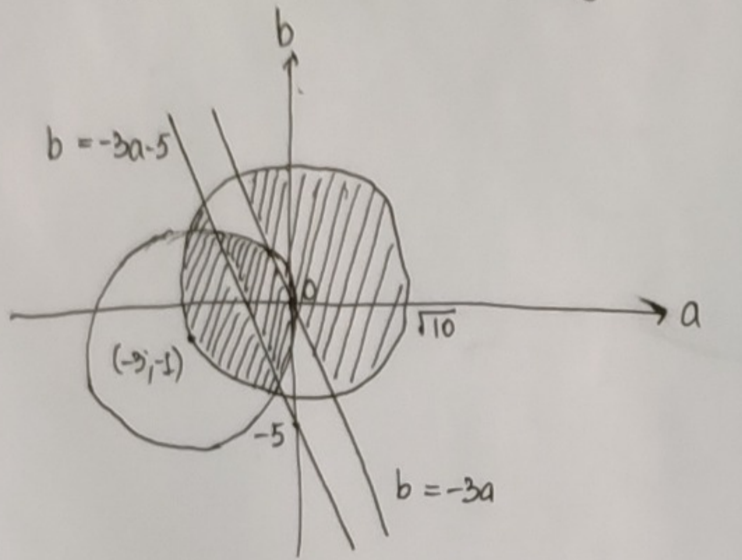
Теперь случай (2)

$a^2+b^2 \le 10$ – круг радиуса $\sqrt{10}$ с корр-ми $(0;0)$



Т.к. при $\begin{cases} b \le -3a \\ b \ge -3a-5 \end{cases}$ $-6a-2b \le 10$, то данная область в случае (2) не подходит.

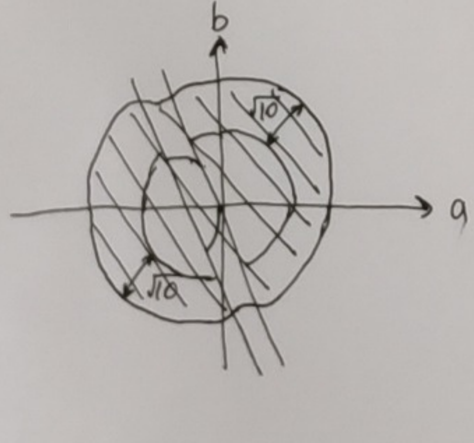
Результирующий рисунок:



При всех точках (a, b) изобр. на рис. выполняется сист. нер-в

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$

Теперь в каждой точке с коор-ми (a, b) строим круг радиуса $\sqrt{10}$ и это и будет область подходящих точек (x, y)

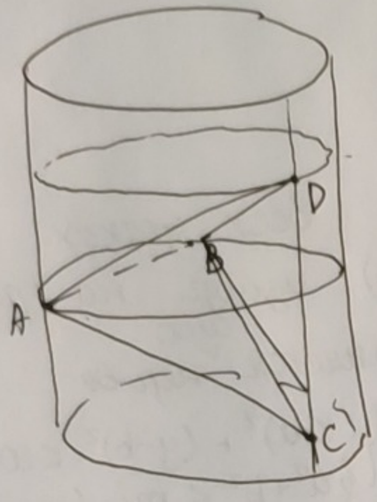


фигура заштрихованная и будет фигурой М.

21100600 (U833921 M1302608)

Чистовик ~2

Заметим что на ребро AB опирается 2 равнобед. треугольника опустив высоты CC_1 и DD_1, они пересек в одной точке ($D_1 = C_1$)
Значит $CD \perp AB$ (по Th о 3 перпенд.)
Т.к. CD ∥ оси цилиндра, значит AB ⊥ оси цилиндра
и AB ∥ основанию



21100600 (U833921 M1302608)

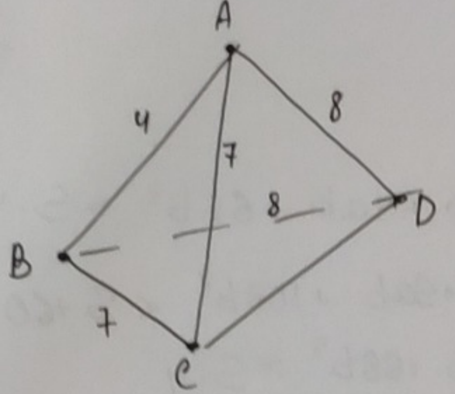
Часть 2

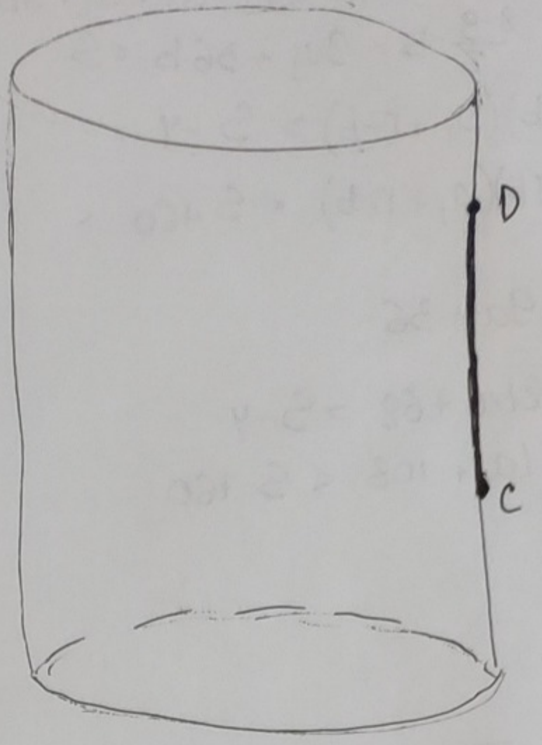
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100600**

ID профиля: **833921**

Вариант 24





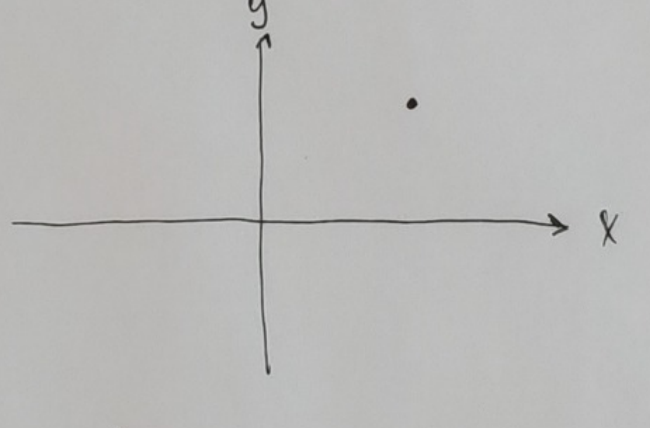
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 10$$

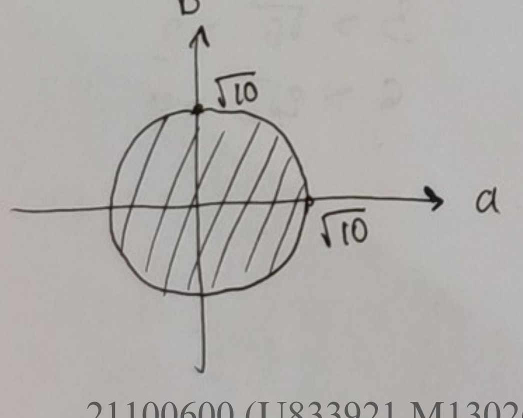
$$a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)$$

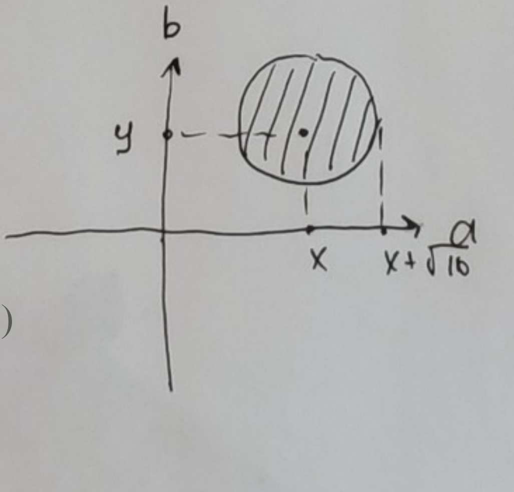
$$-6a-2b \ge 0 \qquad\qquad -6a-2b \le 10$$

$$6a+2b \le 0$$

$$3a+b \le 0$$







Черновик

$a_1 + a_1 + b + a_1 + 2b + \ldots + a_1 + 8b = S$

$9a_1 + \frac{8 \cdot 9}{2} b = 9a_1 + 36b = S$

$(a_1 + 4b)(a_1 + 17b) > S - 4$

$(a_1 + 9b)(a_1 + 12b) < S + 60$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 17ab + 4ab + 68b^2 > S - 4$

$\Leftrightarrow a^2 + 12ab + 9ab + 108b^2 < S + 60$

$a^2 + 21ab + 68b^2 > S - 4$

$a^2 + 21ab + 108b^2 < S + 60$

$\cancel{S} + 60 - 40b^2 > \cancel{S} - 4$

$64 > 40b^2$

$b^2 < \frac{16}{10}$

$b^2 < 1{,}6$

$b = 1$

$S = 9a + 36$

$a^2 + 21a + 68 > S - 4$

$a^2 + 21a + 108 < S + 60$

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 10 \\ a^2 + b^2 \leq \min(-6a - 2b, 10) \end{cases}$

$-6a - 2b$

$a^2 + 12a + 108 - 96 < 0$

$a^2 + 12a + 12 < 0$

$k = 6$

$D_1 = 36 - 12 = 24$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{1}$

$x^2 - 12a + 36 - 24$

$-6 - 2\sqrt{6}$

$3 > \sqrt{6} > 2$

$6 > 2\sqrt{6} > 4$

21100600 (U833921 M1302609)

$3^{1} \cdot 11^{1}$ $3^{1} \cdot 11^{1}$ $3^{1} \cdot 11^{1}$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

~ 5

$\frac{x}{7}+7>0$

$x>-49$

$29-x>0$

$x<29$

$-x-1>0$

$-1>x$

$x \in (-49;-1)/\{-48\}$

$x \in (-49;-1)/\{-42\}$

$\cancel{\frac{x}{7}+7}\neq 1$

$x+49\neq 7$

$x\neq -48$

$29-x\neq 1$

$x\neq 28$

$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)$

$2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$a=29-x$

$b=\frac{x}{7}+7$

$c=-x-1$

$a,b,c>0 \neq 1$

$2\log_a b$ (1)

$\frac{1}{2}\log_c a$ (2)

$2\log_b c$ (3)

$(1)=(2)$

$2\log_a b=\frac{1}{2}\log_c a$

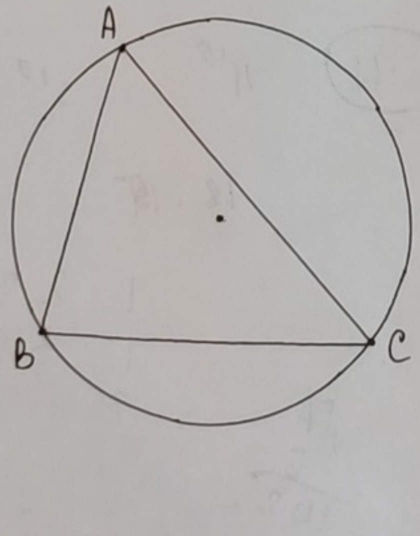
$4\log_a b=\log_c a$

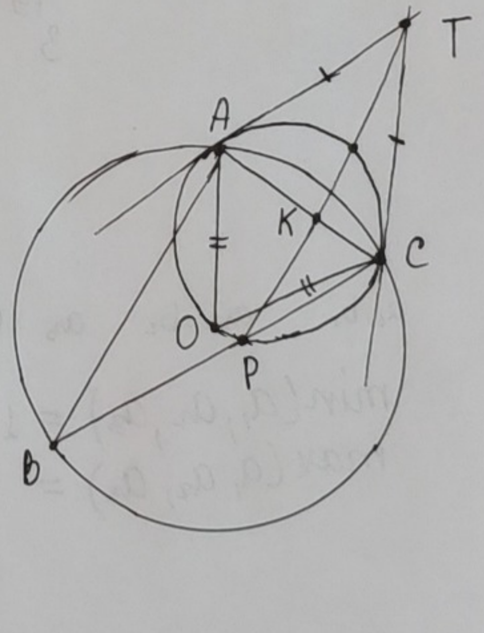
$\log_a b\cdot\log_a c=0$

$b=1$

$(2)=(3)$

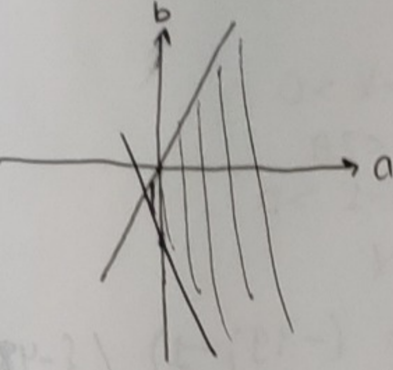
$\frac{1}{2}\log_c a$





21100600 (U833921 M1302609)

$$\begin{cases} -6a-2b \geq 0 \\ -6a-2b \leq 10 \end{cases} \iff \begin{cases} -b \geq 3a \\ -b \leq 5+3a \end{cases} \quad \begin{cases} b \leq 3a \\ b \geq -5-3a \end{cases}$$

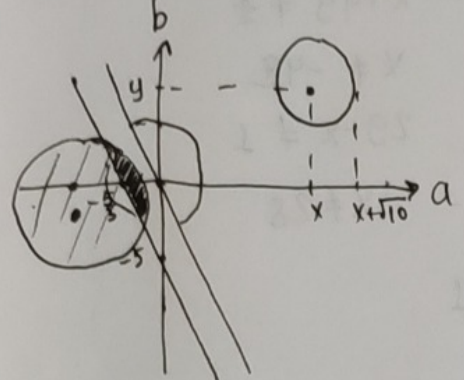


$$a^2+6a+b^2+2b \leq 10$$
$$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10$$

$29-x$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 10 \\ a^2+b^2 \leq \min(-6a-2b,\ 10) \end{cases}$$

$$4\log_a b = \frac{1}{\log_a c}$$



$$10 \geq -6a-2b \geq 0$$
$$\log_a b \cdot \log_a c = \frac{1}{4}$$
$$b \leq -3a$$
$$b \geq -3a+5$$

$$a^2+b^2 \leq -6a-2b$$
$$(a+3)^2+(b+1)^2 \leq 10$$

$$a^2+b^2 \leq 10$$

$\{1;-3\}$

$$\begin{array}{r} 74 \\ 108 \\ \times\ 96 \\ \hline 648 \\ 162 \\ \hline 2268 \end{array}$$

$3^{19} \cdot 11 \quad 3^{18} \cdot 11 \quad 3 \cdot 11^{15}$

$3^1 \cdot 11^1 \quad 3^1 \cdot 11^1 \quad 3^{19} \cdot 11^{15}$

$a = -3$
$b = -1$

$3^{19} \cdot 11^{15}$

$3 \cdot 11 \quad 11^{15} \quad 3^{19}$

$18 \cdot 15$

$a_1\ b_1 \quad a_2\ b_2 \quad a_3\ b_3$

$\min(a_1, a_2, a_3) = 1$
$\max(a_1, a_2, a_3) =$

1 2 3
1 3 2
2

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

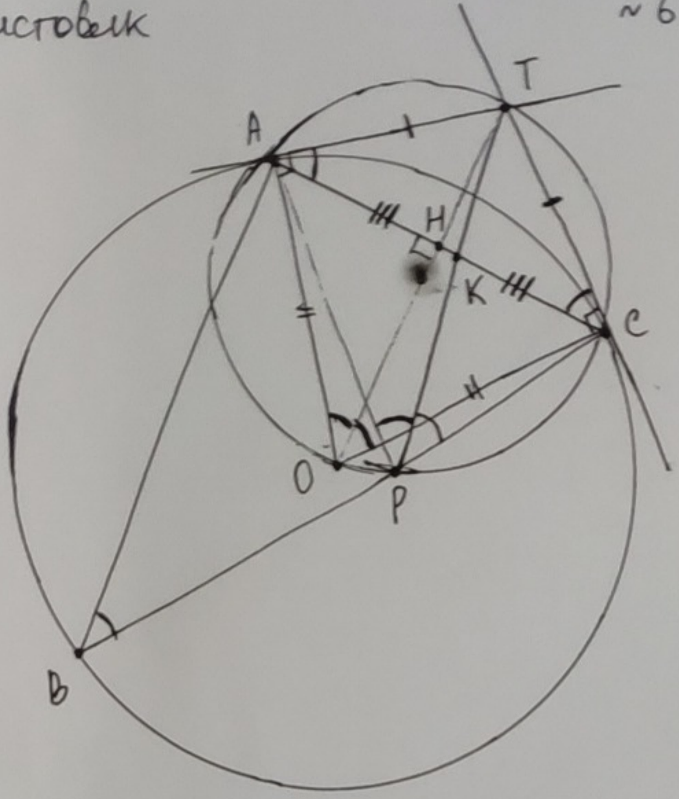
1 1 ~~1~~ 19

1 19 1
19 1 1

21100600 (U833921 M1302609)

Чистовик

№6



Точка T будет лежать на второй окружности т.к.
$\Delta AOT = \Delta COT$ ($AT = TC$ кас. отр.) ($AO = OC$ как радиусы) $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ (угол между r и касательной)

$AK : KC = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$ (как отнош. оснований)

$AP : PC = \frac{8}{7}$ (по св-ву биссект.)

$AH = HC$

21100600 (U833921 M1302609)

Чистовик

№ 5

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ: $29-x>0 \quad 29-x\neq 1$

$\frac{x}{7}+7>0 \quad \frac{x}{7}+7\neq 1$

$-x-1>0 \quad x+1\neq 1$

$x<29 \quad x\neq 28$

$x>-49 \quad x\neq -48$

$x<-1 \quad x\neq 0$

ОДЗ: $x\in(-49;-1)\,/\,\{-48\}$

После написания ОДЗ, поскольку все подлогариф. выражения $>0 \neq 1$ можно начать преобр.

(1) $2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

(2) $\frac{1}{2}\log_{|x+1|}(29-x)=\frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)$ т.к. $x<0$

(3) $2\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1)$

Предположим $(1)=(2)$, $(2)-1=(3)$ $(1)-1=(3)$

$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)$

$4\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{\log_{(29-x)}(-x-1)}$

$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)-1=2\log_{(\frac{x}{7}+7)}(-x-1)$

Чистовик №4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=33 \\ НОК(a,b,c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a,b,c \ \vdots\ 3^1\cdot 11^1 \\ 3^{19}\cdot 11^{15} \ \vdots\ a,b,c \end{matrix}$$

Из этого следует, что числа a, b, c имеют вид $3^n\cdot 11^k$, где $n,k\in N$, $n\le 19$, $k\le 15$

~~Поскольку все числа : 33, но при этом НОД~~

Тогда пусть $a=3^{n_1}\cdot 11^{k_1}$ $b=3^{n_2}\cdot 11^{k_2}$ $c=3^{n_3}\cdot 11^{k_3}$

Тогда:

$$\begin{cases} \min(n_1, n_2, n_3)=1 \\ \max(n_1, n_2, n_3)=19 \end{cases} \quad \begin{cases} \min(k_1, k_2, k_3)=1 \\ \max(k_1, k_2, k_3)=15 \end{cases}$$

Условимся, что $n_1\le n_2\le n_3$. Тогда найдем количество способов выбрать n_1, n_2, n_3, а затем кол-во способов их переставить

Т.к. $n_1\le n_2\le n_3$, то $n_1=\min(n_1,n_2,n_3)=1$
$n_3=\max(n_1,n_2,n_3)=19$
$n_2\in[1;19]$

Когда $n_1\ne n_2\ne n_3$, число способов переставить: $3\cdot 2\cdot 1=6$

Когда $n_1=n_2\ne n_3$ или $n_1\ne n_2=n_3$ (таких случаев всего 2, когда $n_2=1$ или $n_2=19$) $\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2}=3$

Значит всего пар (n_1, n_2, n_3) (где n_1, n_2, n_3 уже неупорядочены)

$(19-2)\cdot 1\cdot 1\cdot 6+2\cdot 1\cdot 1\cdot 3=102+6=108$

Аналогично для k

$(17-2)\cdot 1\cdot 1\cdot 6+2\cdot 1\cdot 1\cdot 3=96$

всего способов выбрать: ~~...~~

$108\cdot 96=2268$

Ответ: 2268

21100600 (U833921 M1302609)

$$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)+1$$

$\cancel{x^2+2x+1}$

$$\cancel{\frac{\frac{1}{49}\left(x^2+98x+49\right)}{\frac{x}{7}+7} = \frac{x^2+98x+49}{x+49}}$$

$$\frac{(x+49)^2}{49(29-x)}$$

21100600 (U833921 M1302609)