Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100563**

ID профиля: **846938**

Вариант 24

Задание (1) Вариант 24 Чистовик

По условию задачи разность прогрессии d – положительное целое число. Пусть a_1 – первый член прогрессии

$S = S_9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d)\,9 = 9a_1 + 36d$

$a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) = a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2$

$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) = a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2$

Значит

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$

Вычитая из второго неравенства первое, получим

$40d^2 < 64$ Значит $d = 1$

Теперь

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 96 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1 + 6)^2 > 0 \\ (a_1 + 6 + 2\sqrt{6})(a_1 + 6 - 2\sqrt{6}) < 0. \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 \neq -6 \\ -6 - 2\sqrt{6} < a_1 < -6 + 2\sqrt{6} \end{cases}$

т.к. a_1 – целое, то

Ответ: $a_1 = -10$, $a_1 = -9$, $a_1 = -8$, $a_1 = -7$, $a_1 = -5$, $a_1 = -4$

$a_1 = -3$, $a_1 = -2$.

Вариант 24 Черновик

Задание (18)

По условию задачи разность прогрессии

d – положительное целое число

Пусть a_1 – первый член прогрессии.

$S = S_9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d)9 = 9a_1 + 36d.$

$a_5 \cdot a_{18} = (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) = a_1^2 + 21a_1d + 68d^2$

$a_{10} \cdot a_{13} = (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) = a_1^2 + 21a_1d + 108d^2$

Значит

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$$

Вычитая из 2го первое, получаем

$40d^2 < 64$ $d = 1.$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + 32 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 6)^2 > 0 \\ (a_1 + 6 + 2\sqrt{6})(a_1 + 6 - 2\sqrt{6}) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -6 \\ -6 - 2\sqrt{6} < a_1 < -6 + 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$a_1 = -10,\ a_1 = -9,\ a_1 = -8,\ a_1 = -7,\ a_1 = -5,\ a_1 = -4,\ a_1 = -3,\ a_1 = -2$

Вариант 24 Чистовик

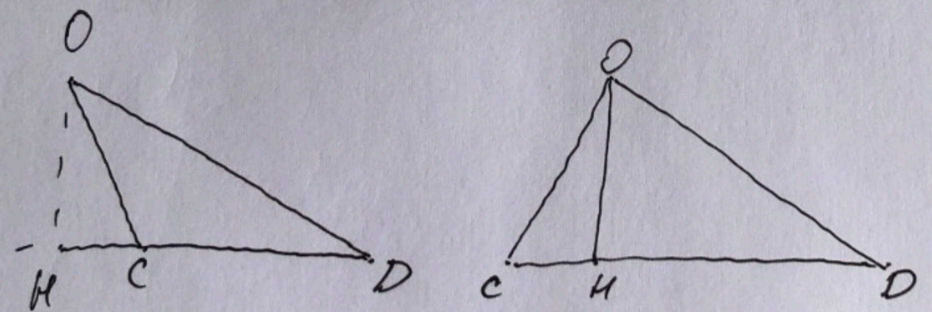
Задание 2

Пусть O - середина отрезка AB. Т.к. точки C и D равноудалены от концов отрезка, то они лежат в плоскости, плоскости α, проходящей ч/з O, перпендикулярно AB

Значит α перпендикулярна основанию цилиндра, а AB параллельна основанию цилиндра. Значит, проекция AB на плоскость основания имеет длину 4, а минимальный радиус = 2.

Имеем $OC=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}$, $OD=\sqrt{8^2-2^2}=\sqrt{60}$

Обозначим H - проекцию т. O на CD. Тогда OH = 2. Возможно 2 случая



В первом случае $CD=DH-CH=\sqrt{60-4}-\sqrt{45-4}=\sqrt{56}-\sqrt{41}$.

Во втором случае $CD=DH+CH=\sqrt{56}+\sqrt{41}$

Ответ: $\sqrt{56}\pm\sqrt{41}$

21100563 (U846938 M1300623)

Задание (2) Вариант 24 Черновик

О - середина отрезка АВ.

Т.к. т. С и т. D равноудалены от концов отрезка, то они лежат в плоскости α, проходящей ч/з О $\perp AB$. $\alpha \perp$ цилиндру.

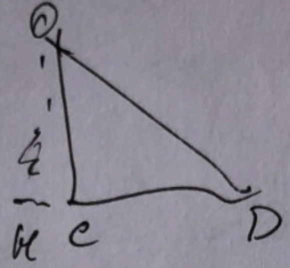
AB || основанию

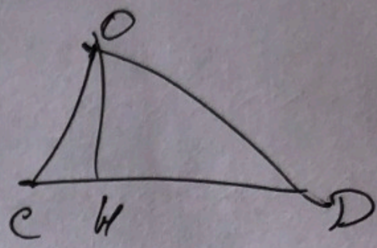
$AB = 4$

$R = 2$

$OC = \sqrt{7^2 - 2^2}$

$OD = \sqrt{8^2 - 2^2}$





H - проекция О на CD

1. $CD = DH - CH = \sqrt{60-4} - \sqrt{45-4} = \sqrt{56} - \sqrt{41}$

2. $CD = DH + CH = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

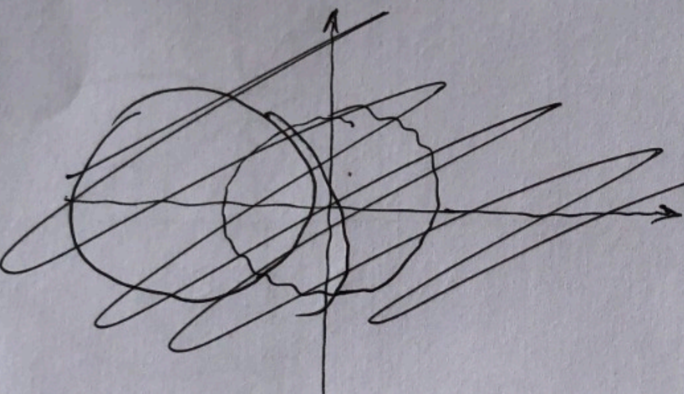
Ответ: $\sqrt{56} \pm \sqrt{41}$

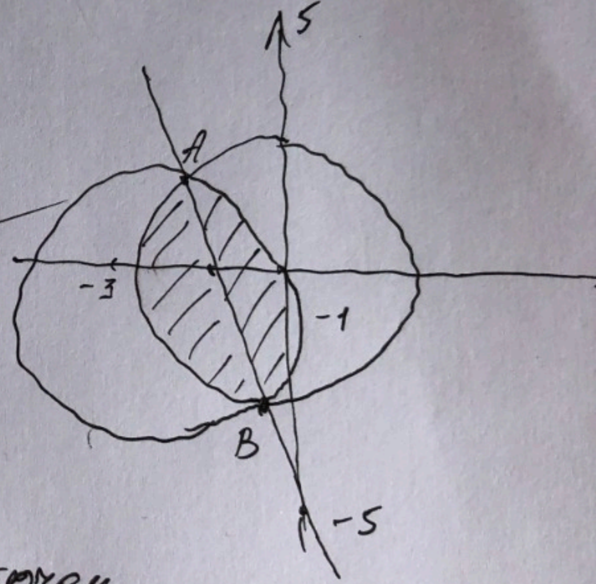
Задание (3) Вариант 24 Чистовик

Рассмотрим на координатной плоскости $(a;b)$ фигуру, заданной $a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -6a-2b \le 10 \\ a^2+b^2 \le -6a-2b \end{cases} \\ \begin{cases} -6a-2b > 10 \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \ge -3a-5 \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \le \sqrt{10}^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b < -3a-5 \\ a^2+b^2 \le \sqrt{10}^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

В первом мн-ве часть круга лежит выше прямой $l: b = -3a-5$, а во втором ниже





Найдём координаты точек A и B:

$(-3a-5)^2 + a^2 = 10$

$10a^2 + 30a + 15 = 0$

$2a^2 + 6a + 3 = 0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100563**

ID профиля: **846938**

Вариант 24

Задание 4 Вариант 24 Честовик

Пусть $a = 3^{a_1} \cdot 11^{a_2}$

$b = 3^{b_1} \cdot 11^{b_2}$

$c = 3^{c_1} \cdot 11^{c_2}$

В тройке (a_1, b_1, c_1) хотя бы одно число $= 1$, и хотя бы одно равно 19, троек где все три числа различны равно $17 \cdot 3! = 102$

Троек с повторяющимися 1 равно 3, с повторяющимися 19 равно 3. Значит, всего различных троек (a_1, b_1, c_1) равно $102 + 3 + 3 = 108$. Аналогично, различных троек (a_2, b_2, c_2) равно $13 \cdot 3! + 2 \cdot 3 = 84$

Значит, пар таких троек $102 \cdot 84 = 8568$.

Ответ: 8568.

Задание 4 Вариант 24 Чехловски

Пусть $a = 3^{a_1} \cdot 11^{a_2}$

$b = 3^{b_1} \cdot 11^{b_2}$

$c = 3^{c_1} \cdot 11^{c_2}$

В тройке $(a_1 b_1 c_1)$ одно число = 1

и одно 18.

Тройки где все различны $17 \cdot 3! = 102$.

Тройки с повторами 1 равно 3.

С повторяющимися 18 равно 3.

Различных троек $(a_1 b_1 c_1) = 102 + 3 + 3 = 10$

Тройки $(a_2 b_2 c_2)$ их $13 \cdot 3! + 2 \cdot 3 = 84$

Значит пар троек $102 \cdot 84 = \underline{8568}$

Задание 5 Вариант 24 Чистовик

Обозначим. $a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \log_{(x+1)^2}(29-x)$, $c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

Все три числа определены при $(-49;-2)\cup(-2;-1)$

Имеем

$a = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)$

$c = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$

Очевидно, $abc = 2$. т.к. 2 числа равны, а третье на 1 больше, то решив уравнение найдём равные числа

$x^2(x+1) = 2$, т.е. $x^3+x^2-2=0$. Имеем $x^3-x^2+2x^2-2x+2x-2=0$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$. Откуда $x=1$

$a=1 \Leftrightarrow \log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{2}$, т.е. $\sqrt{29-x}=\frac{x}{7}+7$.

т.е. $x=-7$;

$b=1 \Leftrightarrow \log_{(-x-1)}(29-x)=2$, т.е. $(-x-1)^2=29-x$

т.е. $x=-7$ (с учётом ОДЗ)

Значит, других значений нет.

Ответ: $x=-7$.

Задание 5 Вариант 24 Чистовик

$a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \log_{(x+1)^2}(29-x)$, $c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

пусть $x \in (-49; -2) \cup (-2; -1)$

$a = 2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$b = \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)$

$c = 2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$

$abc = 2$ 2 числа =, а третье на 1 больше

$x^2(x+1) = 2$ т.е. $x^3 + x^2 - 2 = 0$

Имеем $x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 2x - 2 = 0$

$(x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$ Откуда $x = 1$

$a = 1 \Leftrightarrow \log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{2}$ $\sqrt{29-x} = \frac{x}{7}+7.$

$x = -7$

$b = 1 \Leftrightarrow \log_{(-x-1)}(29-x) = 2$

$(-x-1)^2 = 29 - x$

$x = -7$ с уч. ОДЗ

Ответ: $\underline{x = -7}$

Задание (6)   Вариант 24   Чистовик

Пусть O - центр окружности, описываю-щей около ABC,

O' - центр окр, описанной около AOC

Т.е. три точки O, O', T - лежат на серединном перпендикуляре к AC.

Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle AOC = 2\beta \Rightarrow$

$\angle ABC = 2\beta$

Кроме того, пусть R - радиус описанной около ~~того, пусть~~ ABC окружности, тогда

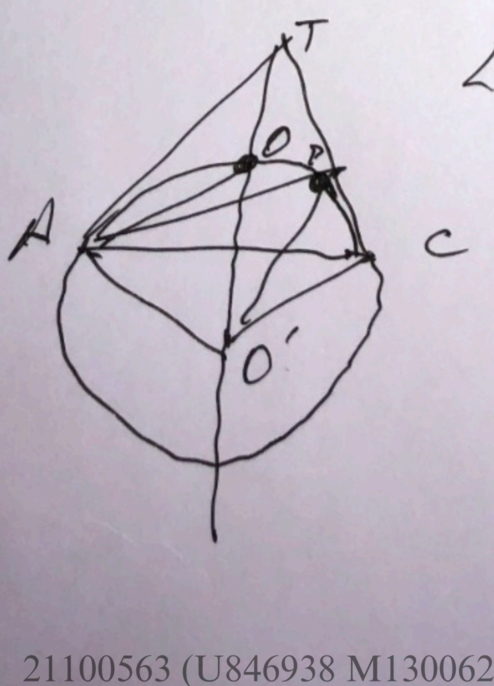
$AC = 2R \sin\beta$

И т.к. $AK : KC = 8:7$, то $AK = \frac{8}{15} \cdot 2R \sin\beta =$

$= \frac{16}{15} R \sin\beta$, $KC = \frac{14}{15} R \sin\beta$

$\triangle APO'$ и $\triangle CPO'$ - равнобедренные

$\angle AOO' = \beta = \angle O'AO$



21100563 (U846938 M1300624)