Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100464**

ID профиля: **806232**

Вариант 24

Чистовик. 24 вариант

N1 Из свойств арифметической прогрессии следует, что

$S = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9 = (a_1+4d)\cdot 9$, $a_5 = a_1+4d$, $a_{18} = a_1+17d$, $a_{10} = a_1+9d$, $a_{13} = a_1+12d$

Тогда неравенства, данные в условии задачи принимают вид:

$$\begin{cases} (a_1+4d)(a_1+17d) > S-4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d) < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+17a_1d+4a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4 \\ a_1^2+12a_1d+9a_1d+108d^2 < 9a_1+36d+60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

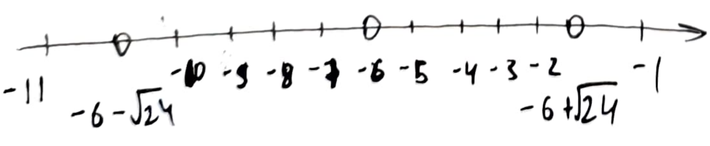
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+(21d-9)a_1+(68d^2-36d+4) > 0 \\ a_1^2+(21d-9)a_1+(108d^2-36d-60) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Значит, $68d^2-36d+4 > 108d^2-36d-60 \Leftrightarrow 40d^2 < 64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d < \left|\sqrt{\frac{8}{5}}\right|$

По условию дана возрастающая арифметическая прогрессия. Значит, $0 < d < \sqrt{\frac{8}{5}}$. Кроме того, члены данной прогрессии – целые числа, отсюда, $d = 1$. Сделаем подстановку в систему (1):

$$\begin{cases} a_1^2+12d+36 > 0 \\ a_1^2+12d+12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+6)^2 > 0 \\ a_1 \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -6 \\ a_1 \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24}) \end{cases}$$



Т.к. $4 < \sqrt{24} < 5$, то интервал $(-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24})$ лежит между числами -11 и -1.

Таким образом, a_1 может принимать следующие значения:

$-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2.$

1

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$.

Чистовик

N3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;10) \end{cases}$$

Первое неравенство системы задает круг с центром $(a;b)$ и радиуса $\sqrt{10}$.

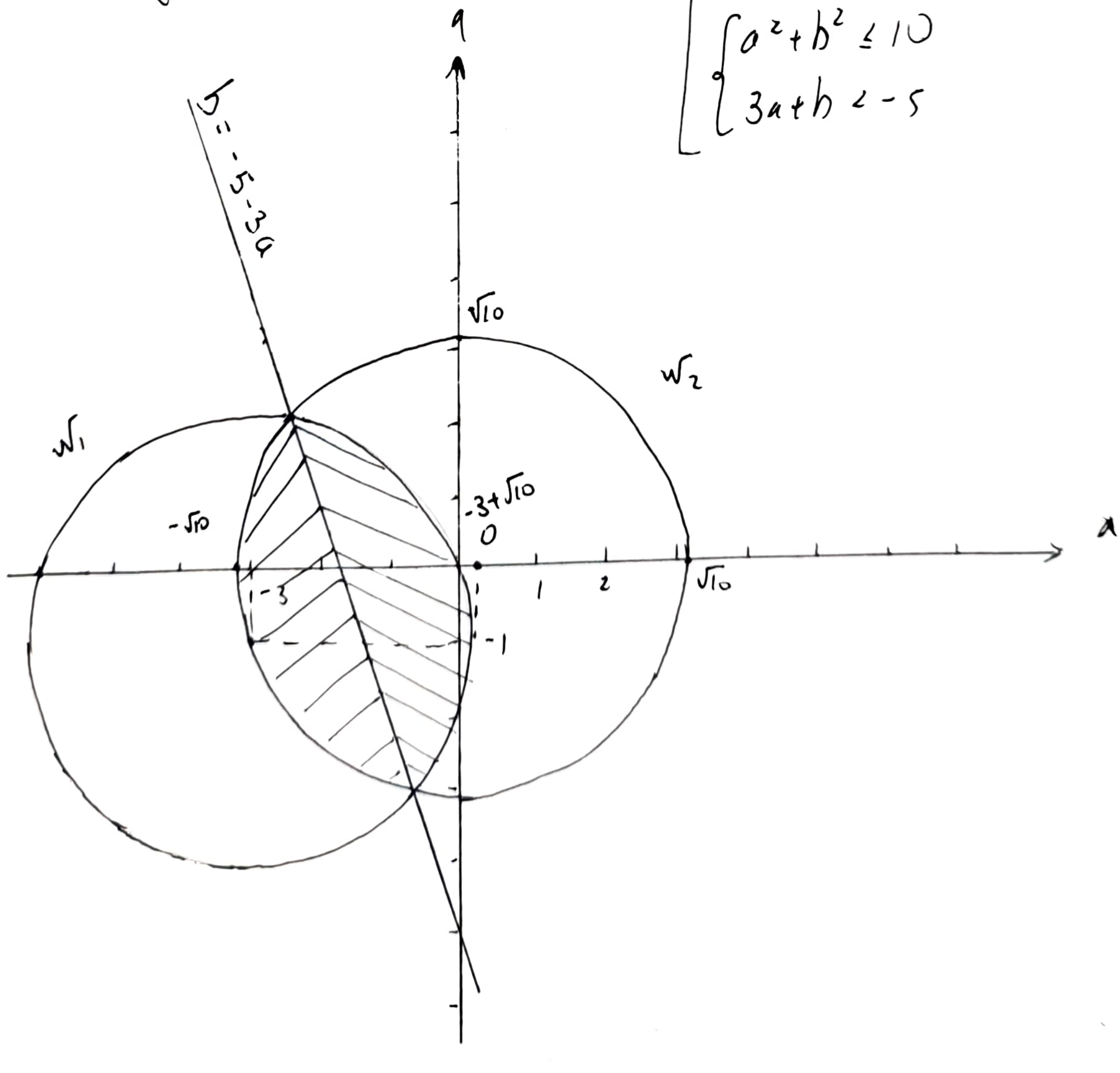
2

Преобразуем второе неравенство:

① $\begin{cases} a^2+b^2 \le -6a-2b \\ -6a-2b \le 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \\ 3a+b \ge -5 \end{cases}$

② $\begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ -6a-2b > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ 3a+b < -5 \end{cases}$

Решим совокупность двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \\ 3a+b \ge -5 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 10 \\ 3a+b < -5 \end{cases} \end{array}\right.$



Решением данной совокупности является заштрихованная область. Определим ее границы. Ясно, что $a \in [-\sqrt{10}; -3+\sqrt{10}]$ (т.к. центр ω_1 $(-3;-1)$, её радиус равен $\sqrt{10}$)

Чистовик

Решим ~~данную~~ систему:

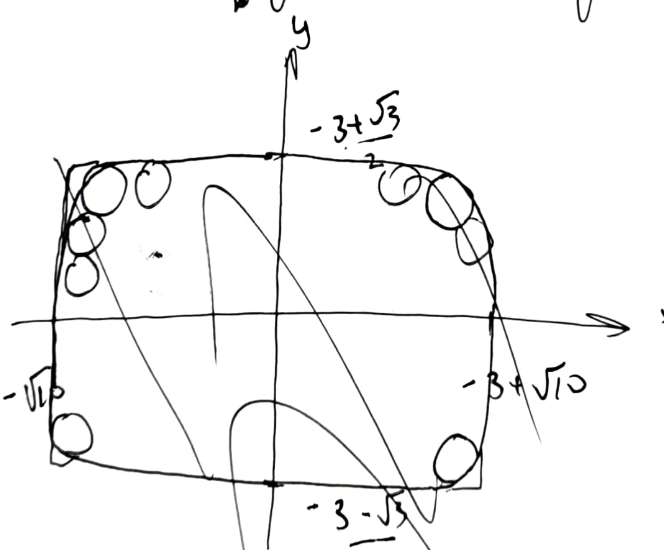
$$\begin{cases} b = -5-3a \\ a^2+b^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-5-b}{3} \\ \frac{b^2+10b+25}{9}+b^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-5-b}{3} \\ 10b^2+10b-65=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

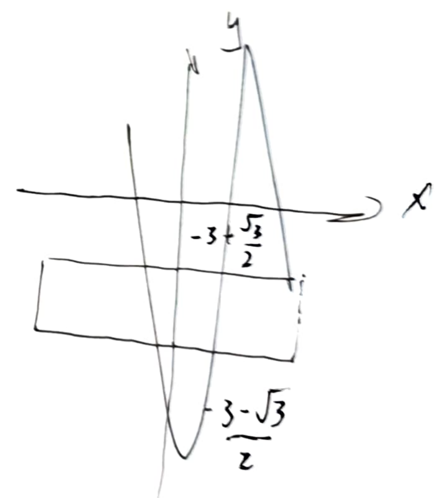
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-5-b}{3} \\ b = \frac{-3\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3

Значит, $b \in \left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Значит, $(x-a)^2+(y-b^2)\le 10$ задаёт множество окружностей с центрами $(a;b)$. На декартовой плоскости они образуют прямоугольник ~~с закруглёнными углами~~.

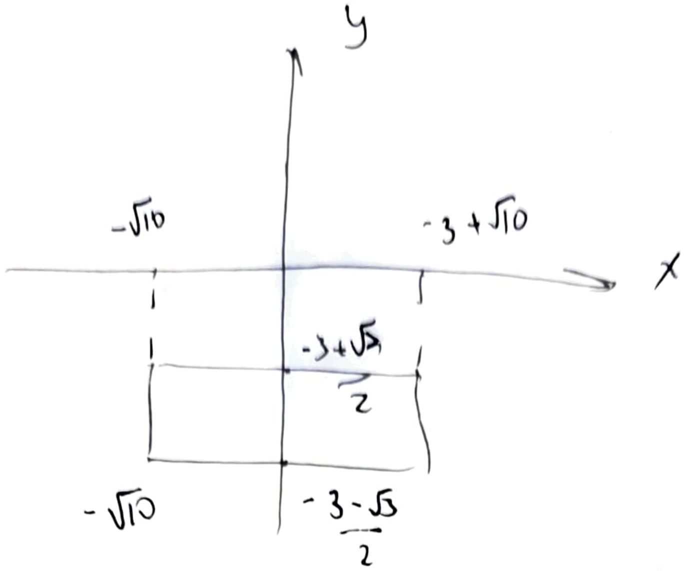




~~Ескор~~ ~~Спор~~

Площадь M равна $\frac{-3-\sqrt{3}}{2} + 3+\sqrt{}$

Чистовик



4

$$S = (3+2\sqrt{10})(\sqrt{3})$$

Ответ: $\sqrt{3}(3+2\sqrt{10})$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \\ 3a+b \ge -5 \end{cases}$$

$2-3<0$

$4-5<0$

$2-4-3+5<0$

$2-3+4-5$

$2-3-4+5$

$2-6\le 0$

$1-8\le 0$

$2-6-1+8\le 0$

x^2-2ax

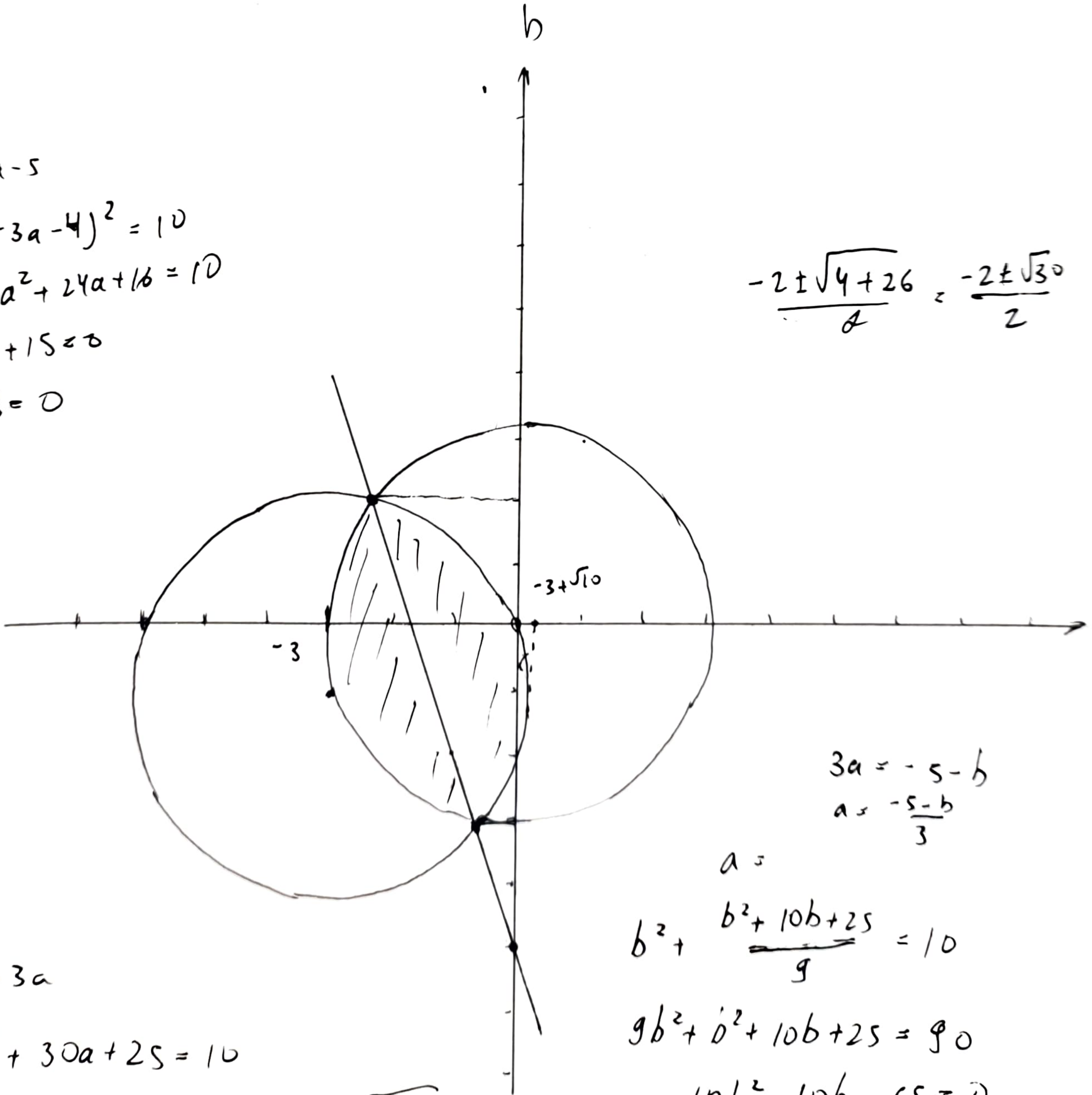
$\cancel{(x-2a-3)^2+(y}$

$b \ge -3a-5$

$a=-1$

$3-5$

$\cancel{x^2-2ax+y^2-2ay \le 0}$



$b=-3a-5$

$(a+3)^2+(-3a-4)^2=10$

$a^2+6a+9+9a^2+24a+16=10$

$10a^2+30a+15=0$

$2a^2+6a+3=0$

$\dfrac{-3\pm\sqrt{9-6}}{2}$

$\dfrac{-2\pm\sqrt{4+26}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{30}}{2}$

$3a=-5-b$

$a=\dfrac{-5-b}{3}$

$a=$

$b^2+\dfrac{b^2+10b+25}{9}=10$

$9b^2+b^2+10b+25=90$

$10b^2+10b-65=0$

$2b^2+2b-13=0$

$b=-5-3a$

$a^2+9a^2+30a+25=10$

$10a^2+30a+15=0$

$2a^2+6a+3=0$

$\dfrac{-3\pm\sqrt{9-6}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

№1

Черновик

S – сумма первых 9 членов

$\frac{a_1+a_9}{2}\cdot 9 = S$

$\frac{a_1+8d+a_1}{2}\cdot 9 = (a_1+4d)9 = S$

$\begin{cases} a_5\cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10}\cdot a_{13} < S+60 \end{cases}$ $a_1 - ?$

$x^2+12x+\cancel{9x}+108 < \cancel{9x}+36+60$

$\begin{cases} (a_1+4d)(a_1+17d) > S-4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d) < S+60 \end{cases}$

N3 $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10) \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+17a_1d+4a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4 \\ a_1^2+12a_1d+9a_1d+108d^2 < 9a_1+36d+60 \end{cases}$

$x^2+12x+12<0$

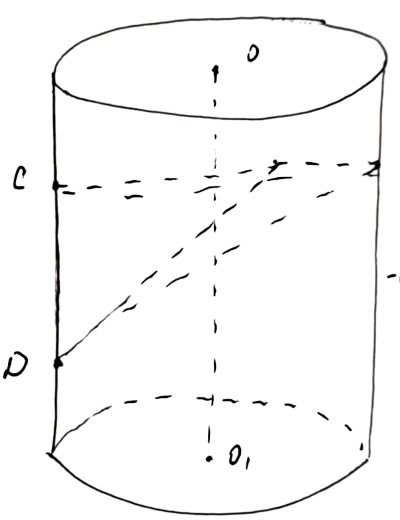
$\cancel{x^2+}$ $\begin{cases} x^2+12x+36>0 \\ x^2+12x+12<0 \end{cases}$ ... $(x+6)^2>0$

AB = 4

AC = CB = 7

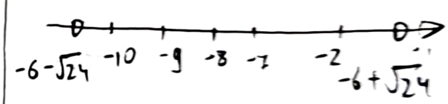
AD = DB = 8

CD ∥ OO₁



$\frac{-6\pm\sqrt{36-12}}{}$

$-6\pm\sqrt{24}$



$-\frac{81}{16}$

$\frac{9\pm\sqrt{81-68}}{34}$

$234 = 78\cdot 3 =$

$= 13\cdot 6\cdot 3$

$2\cdot 13\cdot 9$

$-\frac{378}{144}$ 234

$\cancel{a_1^2+21da_1+68d^2}$

$4(17d^2-9d+1)$

$12(9d^2-3d-5)$

$\frac{3\pm\sqrt{9+180}}{18}$

$-\frac{441}{272}$ 169

$\cancel{x^2+(17d}$ $\begin{cases} x^2+(21d-9)x+(68d^2-36d+4)>0 \\ x^2+(21d-9)x+(108d^2-36d-60)<0 \end{cases}$

$-\frac{144}{\cancel{378}}$ 6

$441d^2-378d+81-272d^2+144d-16 = 169d^2-234d+65 = (13d-9)^2-16$

$441d^2-378d+81-432d^2+144d+240 = 9d^2-234d+321 = (3d-39)^2-1200$

1521

$3\cdot 78 = 3\cdot 2\cdot 39$

$\begin{cases} y+(68d^2-36d+4)>0 \\ y+(108d^2-36d-60)<0 \end{cases}$

$68d^2-36d+4 > 108d^2-36d-60$

$40d^2 < 64$

$d^2 < \frac{64}{40} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

$\cancel{108d^2-36d-60 > 68d^2-36d+4}$

$\cancel{40d^2>68}$

$\cancel{d^2 > \frac{68}{40} = \frac{17}{10}}$

$d > \sqrt{\frac{17}{10}} \approx \sqrt{1{,}7}$

$d>2$

$d<\sqrt{1{,}6}$

$d=1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100464**

ID профиля: **806232**

Вариант 24

N6 Чистовик Вариант 24.

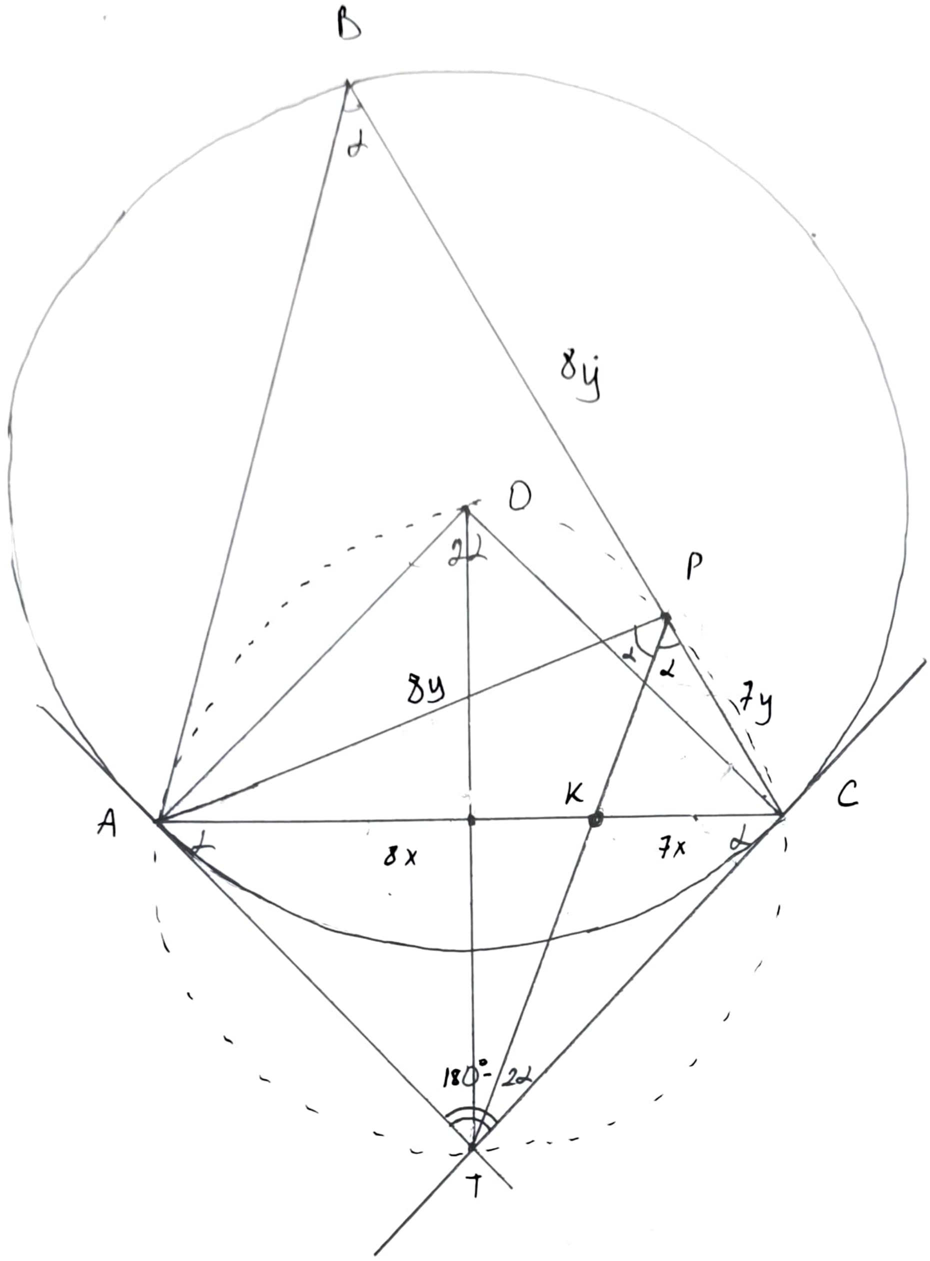
$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

а) S_{ABC} - ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, AC - ?

1



а)

1. Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (т.к. $\angle ABC$ - вписанный, а $\angle AOC$ - центральный). Т.к. угол между касательной и хордой проведённой в точку касания, равен углу, опирающемуся на эту хорду, то $\angle ABC = \angle CAT = \angle ACT = \alpha$. Отсюда $\angle ATC = 180° - 2\alpha$. Значит, A, O, C, T лежат на одной окружности ($\angle AOC + \angle ATC = 180°$)

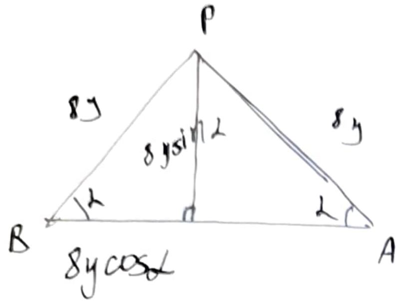
2. Треугольники APK и KPC имеют равные ~~высоты~~, ~~провед.~~ опущенные из вершины P $\Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$. $\angle TPC = \angle TAC = \angle ABC = \alpha \Rightarrow PK \parallel AB \Rightarrow \triangle PKC \sim \triangle ABC$ с $k = \frac{7}{15}$. Значит,

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \cancel{\left(\frac{7}{15}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = 49} \left(\frac{15}{7}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{225}{49} \cdot 14 = \frac{450}{7}$.

Пусть $CK = 7x$, $AK = 8x$, тогда $AP = 8y$, $CP = 7y$

Из подобия следует, что $BP = 8y \Rightarrow \triangle ABP$ – равноб.

$$S_{ABP} = S_{ABC} - S_{APK} - S_{PKC} = \frac{240}{7}$$



$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\cdot 8y\sin\alpha\cdot 16y\cos\alpha =$$

$$= 64y^2\sin\alpha\cos\alpha = 64y^2\cdot\frac{15}{34}$$

$$\cancel{64}^{\,4}\,y^2\cdot\frac{\cancel{15}}{34} = \frac{\cancel{240}^{\,16}}{7}$$

$$y^2 = \frac{34}{28}$$

Значит, $BC = \frac{15}{8}y = \frac{15}{8}\cdot\sqrt{\frac{34}{28}}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}AB\cdot\frac{\cancel{15}}{8}\cdot\sqrt{\frac{34}{28}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\sqrt{34}} = \frac{4\cancel{8}0^{\,10}}{7}$$

$$AB = \frac{8\sqrt{28}\cdot 2\cdot 10}{7} = \frac{160\sqrt{28}}{7}$$

Итак, по теореме косинусов:

$$AC^2 = \frac{160^2\cdot 28}{49} + \frac{225}{64}\cdot\frac{34}{28} - 2\cdot\frac{160\cdot\sqrt{28}}{7}\cdot\frac{15}{8}\cdot\sqrt{\frac{34}{28}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} =$$

2

Чистовик

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\log_{(x+1)^2}(29-x)$ $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+1}}(-x-1)$

$$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{2}\log_{-x+1}(29-x)$$

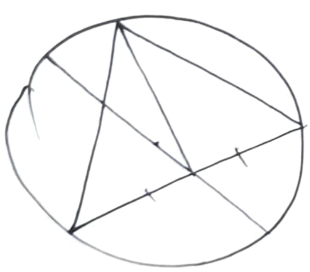
$$4\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{x+1}(29-x)$$

$$4\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \cancel{\frac{1}{\log_{x+1}(29-x)}} \quad \frac{1}{\log_{29-x}(-x+1)}$$

$$4\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\log_{29-x}(-x+1) = 1$$

$$\cancel{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}} - \frac{1}{2}\log_{x+1}(29-x)} \qquad \frac{1}{2}\log_{x+1}(29-x)$$

$$\cancel{\log} \quad 2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) - 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 1$$



$$2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) - \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x) = 1$$

$$\cancel{2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) - \frac{1}{\log}}$$

$$\frac{2}{\log_{-x-1}\left(\frac{x}{7}+7\right)} - \frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x) = \cancel{\log_{(-x-1)}(-x-1)} \; 1$$

$$4 - \log_{-x-1}(29-x)\log_{-x-1}\left(\frac{x}{7}+7\right) - \log_{(-x-1)}(-x-1) = 0$$

$OM \cdot MT = \frac{225}{4}x^2$

$\cancel{AO^2 \cos^2\alpha} =$

$AO \cdot \cos\alpha \cdot \frac{15x}{2} tg\alpha$

$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

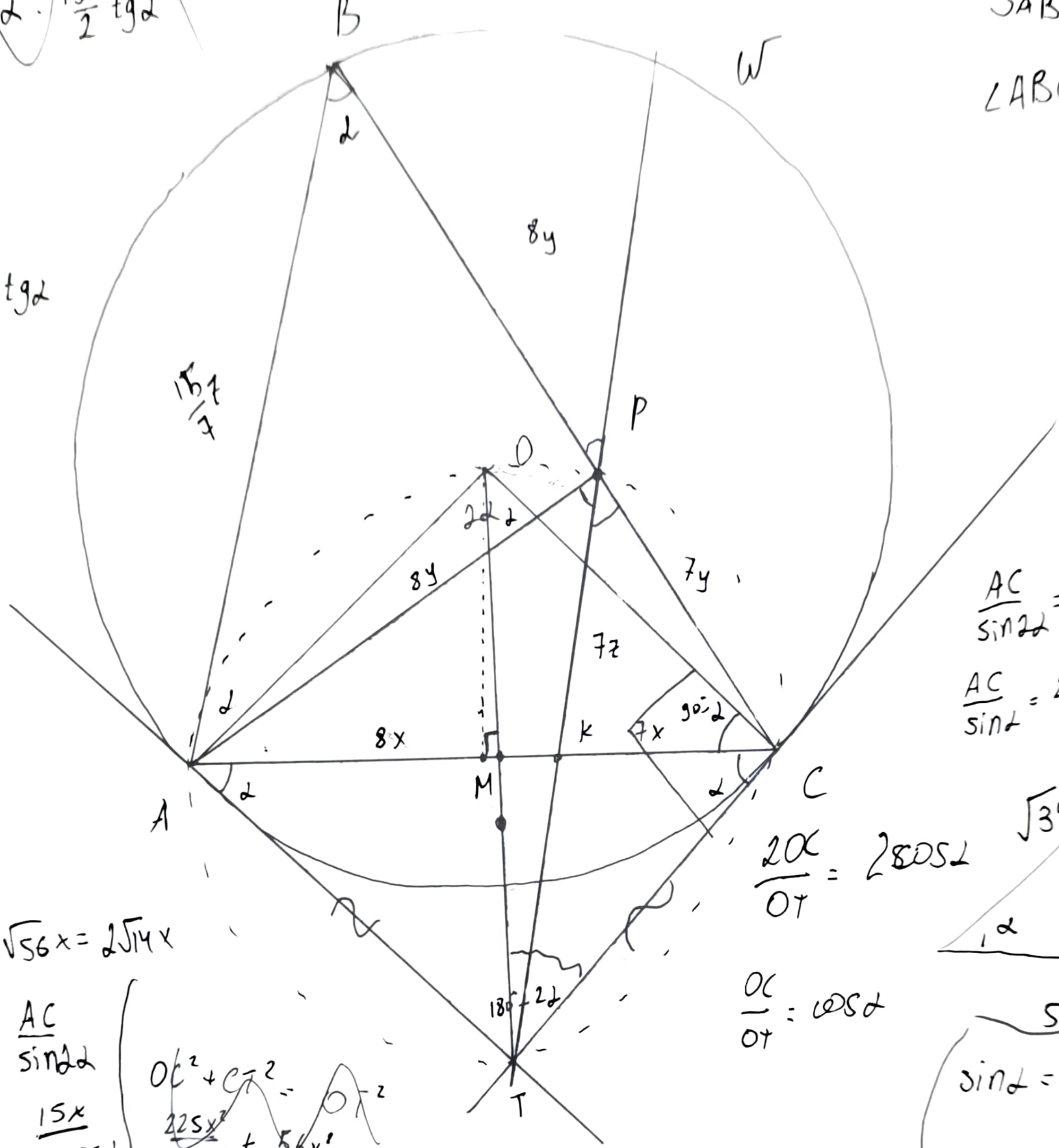
$S_{ABC} - ?$

$\angle ABC = arctg\frac{3}{5}$

$AC - ?$

$tg\alpha = \frac{MT}{\frac{15x}{2}}$

$MT = \frac{15x}{2} tg\alpha$

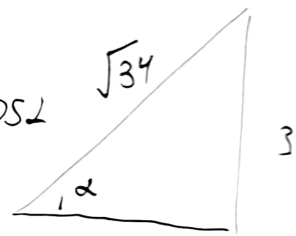


$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = OT$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2OC$

$\frac{2OC}{OT} = 2\cos\alpha$

$\frac{OC}{OT} = \cos\alpha$



$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$CT = \sqrt{56}x = 2\sqrt{14}x$

$\frac{CT}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$

$\frac{2\sqrt{14}x}{\sin\alpha} = \frac{15x}{2\cos\alpha}$

$OC^2 + CT^2 = OT^2$

$\frac{225x^2}{4\sin^2 2\alpha} + 56x^2$

$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

$PK \cdot KT = 56x^2$

$\cancel{CT^2 = TK \cdot TP}$

$\cancel{CT^2x}$

$TK(TP - TK) = 56x^2$

$TP \cdot TK - TK^2 = 56x^2$

$\frac{15x}{\sin\alpha} = OT$

$\frac{15x}{\sin 2\alpha} = 2OC$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{7}{15}\right)^2$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AO}{\sin(90°-\alpha)}$

$\frac{AC}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{AO}{\cos\alpha}$

$AC = 2AO\sin\alpha$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = OT$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2OC$

$MC = \frac{15x}{2}$ $\quad \frac{45}{\sin\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{15x}{2R}$

$\log_{\sqrt{29-x}}(\quad) = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

$2\log_{29-x}(\quad) = \frac{1}{2}\log_{-x+1}(29-x)$

$4\log_{29-x}(\quad) = \log_{-x-1}(29-x)$

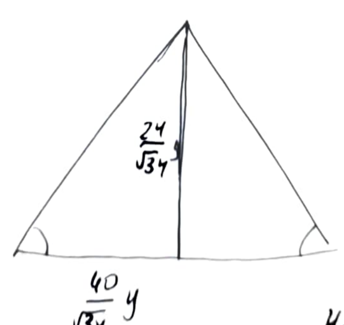
$4\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{\log_{29-x}(-x-1)}$

$4\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{29-x}(-x-1) = 1$

$\cancel{\log \quad 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)}$ $2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1) - 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 1$

$2\log - 2\log_{(-x-1)}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

$AB = \frac{8}{15}BC \cdot 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}$



$\frac{40}{34}\cdot\frac{24}{\quad}y^2 =$

$\frac{\cancel{40}\cdot\cancel{24}}{34}y^2 = \frac{\cancel{240}}{7}$ (4, 10)

$\frac{450}{7} - \frac{98}{7} - \frac{112}{7} = \frac{240}{7}$ (210)

$y^2 = \frac{34}{28}$