Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100387**

ID профиля: **816895**

Вариант 24

ЧИСТОВИК

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 10 \ (1)\\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b;10) \ (2)\end{cases}$$

изобразим график (2) в пл-ти $(a;b)$

I сл. $-6a-2b\le 10$ (*) заметим, что $(-3;-1)$ симметрична $(0;0)$ отн. прямой $-6a-2b-10=0$

$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$ - окружность с центром в $(-3;-1)$ и $R=\sqrt{10}$

II сл. $-6a-2b\ge 10$

$a^2+b^2\le 10$ - ок-ть с центром $(0;0)$ и $R=\sqrt{10}$

изобразим (1) в пл-ти $(a;b)$:

$(a-x)^2+(b-y)^2\le 10$ - ок-ть с центром $(x;y)$ и $R=\sqrt{10}$

~~$(x;y)$~~ должно быть: 1. расположено на (*) части окружности с центром $(-3;-1)$ и $R=$ ~~$\sqrt{20}$~~ $2\sqrt{10}$

крайние положение $(x;y)$

2. расположено на части ок-ти с центром в $(0;0)$ и $R=2\sqrt{10}$

(**) $\begin{cases}a^2+b^2=10\\ 3a-b-5=0\end{cases}$

$a^2+9a^2+30a+25=10$

$10a^2+30a+15=0$

$2a^2+15a+3=0$

$D=225-8\cdot 3=201$

$a=\frac{-15\pm\sqrt{201}}{4}$

3. на ок-ти (**) с центром $\left(\frac{-15-\sqrt{201}}{2}; 3\cdot\frac{15+\sqrt{201}}{2}-5\right)$ и $R=\sqrt{10}$

4. на ок-ти (*) с центром $\left(\frac{-15+\sqrt{201}}{2}; 3\frac{15-\sqrt{201}}{2}-5\right)$ и $R=\sqrt{10}$

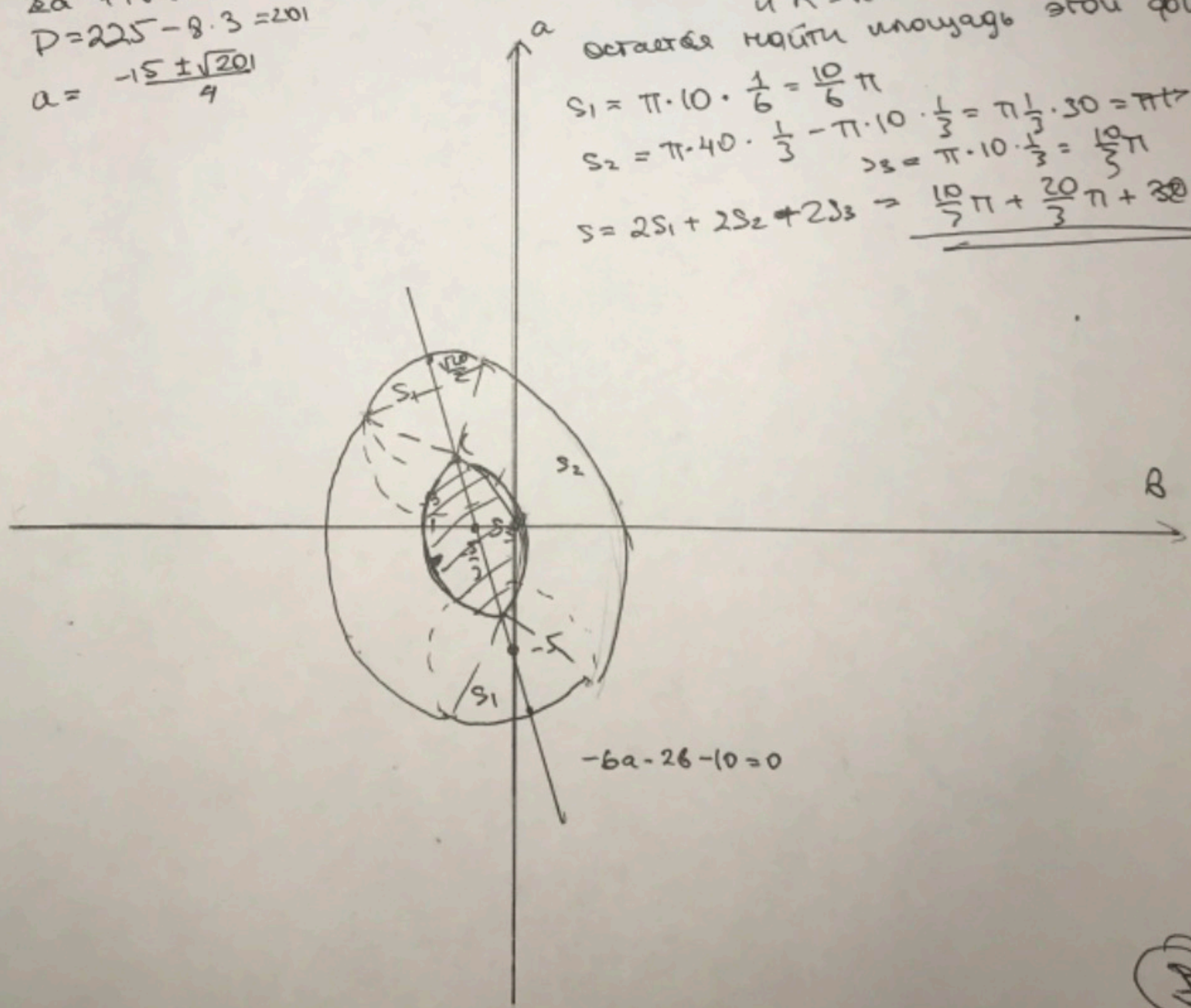
остается найти площадь этой фигуры

$S_1=\pi\cdot 10\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{6}\pi$

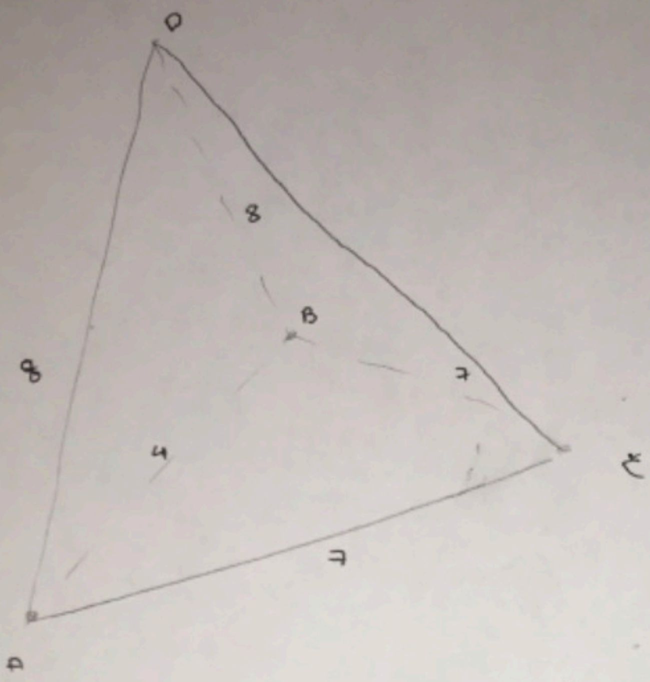
$S_2=\pi\cdot 40\cdot\frac{1}{3}-\pi\cdot 10\cdot\frac{1}{3}=\pi\frac{1}{3}\cdot 30=\pi\cdot 10\pi$

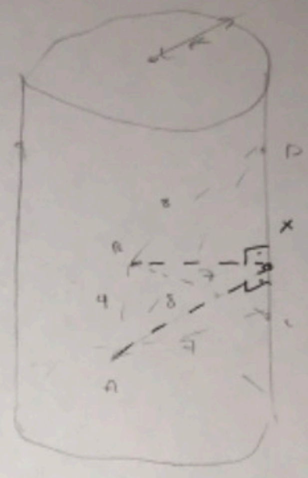
$S_3=\pi\cdot 10\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{3}\pi$

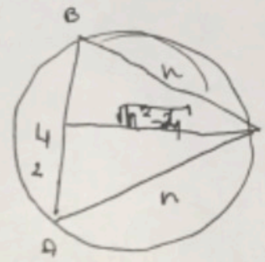
$S=2S_1+2S_2+2S_3=\frac{10}{3}\pi+\frac{20}{3}\pi+$ ~~30~~ 20π



(18)







$$2R = \frac{n^2}{\sqrt{n^2-4}}$$

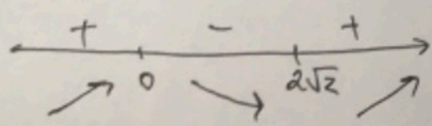
$$R = \frac{n^2}{2\sqrt{n^2-4}} =$$

$$R' = \frac{2n\sqrt{n^2-4} - n^2 \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}\sqrt{n^2-4}}}{2(n^2-4)} =$$

$$= \frac{2n(n^2-4) - n^2 \cdot \cancel{2}n}{2(n^2-4)\sqrt{n^2-4}} =$$

$$2n^2 - 8 - n^2 = 0$$

$$n = 2\sqrt{2}$$



ЧЕРНОВИК

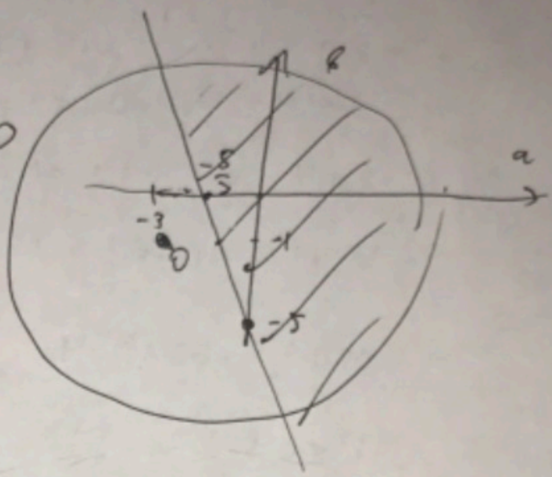
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b; 10) \end{cases}$$

$-6a-2b \le 10$

$a^2+b^2 \le -6a-2b$

$\cancel{a^2+6a}$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 9+1=10$

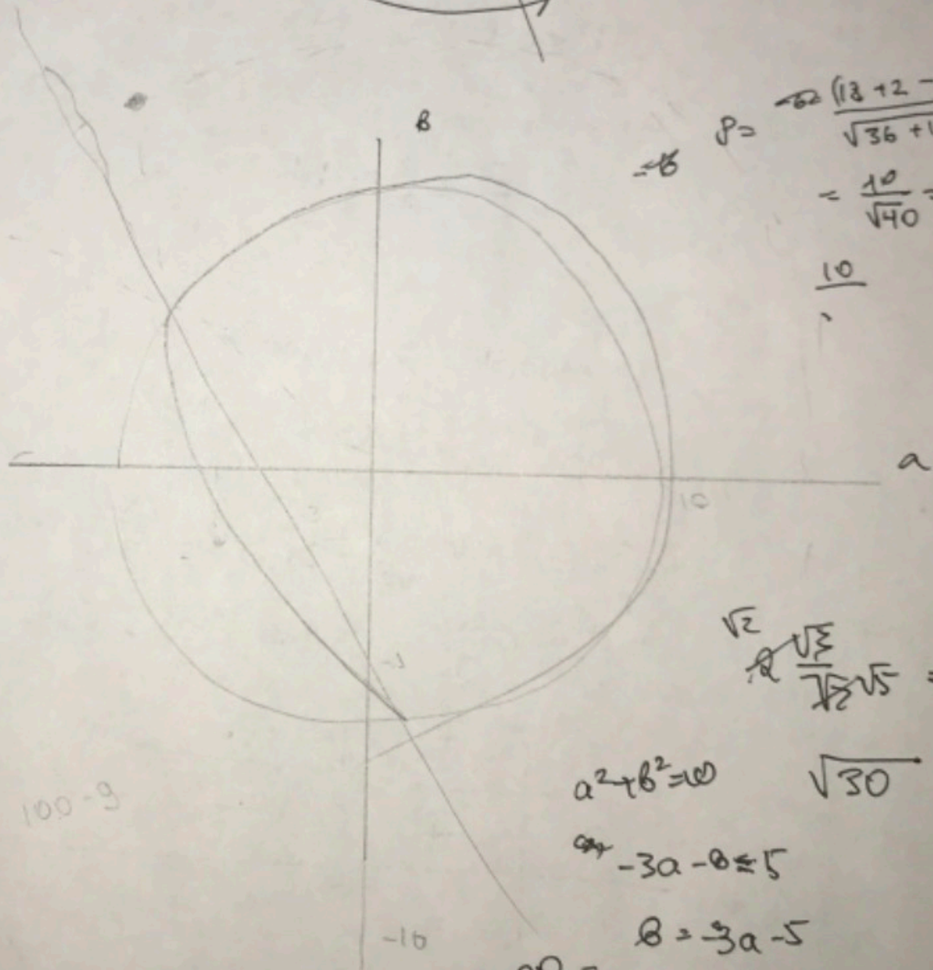


$10-\frac{10}{\sqrt5}$

$\sqrt{10} \cdot 10$

$\rho = \frac{|18+2-10|}{\sqrt{36+4}} = \frac{10}{\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{10}{}$



$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{5}} =$

$\sqrt{30}$

$a^2+b^2=10$

$-3a-b \le 5$

$b=-3a-5$

a^2+9a^2+

$D=225-$

$\cos\alpha = \frac{30-20}{-20} = -\frac{1}{2}$

чистовик

№1

Пусть ~~первый~~ i-ый член прогрессии — a_i, разность — d. Тогда $(d>0)$

$S = S_9 = \frac{(2a_1+8d)9}{2} = (a_1+4d)9 = 9a_1+36d$

$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S-4 \\ a_{10}\cdot a_{13} < S+60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+4d)(a_1+17d) > 9a_1+36d-4 \\ (a_1+9d)(a_1+12d) < 9a_1+36d+60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+21a_1d+68d^2 > 9a_1+36d-4 \\ a_1^2+21a_1d+108d^2 < 9a_1+36d+60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+21a_1d - 9a_1-36d > -68d^2-4 \\ a_1^2+21a_1d - 9a_1-36d < 60-108d^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 60-108d^2 > -68d^2-4$

$40d^2 < 64$

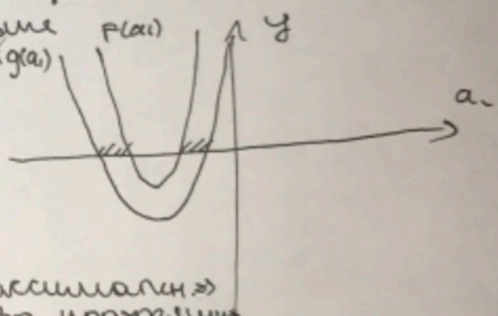
$d^2 < \frac{8}{5}$

$0 < d < \frac{2\sqrt{10}}{5}$

Заметим, что $f(a_1) = a_1^2+21a_1d-9a_1-36d+68d^2+4$ и

и $g(a_1) = a_1^2+21ad-9a_1-36d+108d^2-60$ — ~~две пар~~ одинаковые параболы, отличающиеся по сдвигу вдоль оси Oy

~~Заметим, что чем меньше d, тем меньше подходящих нам a_1, т.к. вдоль уменьшается $g(a_1)$~~
~~Тогда рассмотрим систему при $d = \frac{2\sqrt{10}}{5}$~~



$\cancel{a_1^2+21a_1\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}-9a_1-36\frac{8}{5}\frac{2\sqrt{10}}{5}+68\cdot\frac{8}{5}+4>0}$

$\cancel{a_1^2+21a_1\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}-9a_1-36\frac{2\sqrt{10}}{5}+108\cdot\frac{8}{5}-60}$

При $d=0$, $|-68d^2-4-(60-108d^2)|$ — максимален $\Rightarrow$ наибольшее кол-во подходящих a_1

Тогда система имеет вид

$\begin{cases} a_1^2-9a_1+4>0 \quad (1) \\ a_1^2-9a_1+60<0 \quad (2) \end{cases}$

(1): $D = 81-16 = 65$

$a_1 = \frac{9\pm\sqrt{65}}{2}$

(2): $D = 81+4\cdot60 = 321$

$a_1 = \frac{9\pm\sqrt{321}}{2}$

~~$a_1=0$ — подх~~ +

~~$a_1=1$~~

$+ \quad \frac{9-\sqrt{65}}{2} \quad - \quad \frac{9+\sqrt{65}}{2} \quad + \quad a_1$

$+ \quad \frac{9-\sqrt{321}}{2} \quad - \quad \frac{9+\sqrt{321}}{2} \quad + \quad a_1$

$a_1 \in \left(\frac{9-\sqrt{321}}{2}; \frac{9-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{65}}{2}; \frac{9+\sqrt{321}}{2}\right)$

ОТВЕТ: ~~$a_1=\{1;$~~ ~~$a_1 \in \{-4;0\}$~~ $\{-4;-3;-2;-1;0;9;10;11;12;13\}$

2

Чистовик

№2

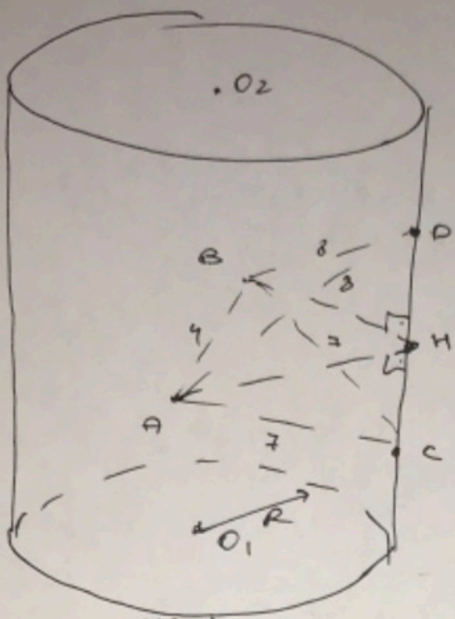


рис. 1

Дано:
$AB = 4$
$AC = CB = 7$
$AD = DB = 8$
R – min
$CD \parallel O_1O_2$
Найти:
CD – ?

Решение:

Заметим, что $\triangle ADC = \triangle BDC$ (по 3-м сторонам) => их высоты из B и A на CD приходят в одну точку (точка H на рис 1). Тогда

$$\left.\begin{matrix} CD \perp BH \\ CD \perp AH \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (BAH) \\ O_1O_2 \parallel CD \end{matrix}\right| \Rightarrow O_1O_2 \perp (BAH) \Rightarrow (BAH)$$ пересекает цилиндр по окружности с радиусом основания (BAH)

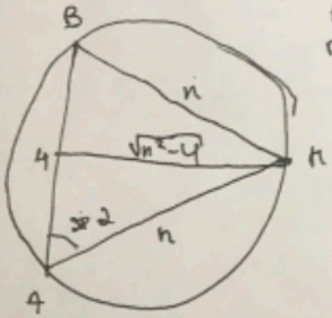


рис. 2

$AH = BH = h$

по т. синусов

$$2R = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{h}{\frac{\sqrt{h^2-4}}{h}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2-4}}$$

$$R = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2-4}}$$

$$R' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2h\sqrt{h^2-4} - h^2\frac{1}{2\sqrt{h^2-4}}\cdot 2h}{2(\sqrt{h^2-4})^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2h(h^2-4)-h^3}{2(h^2-4)\sqrt{h^2-4}}$$

$$2h(h^2-4) - h^3 = 0$$

$$h(h^2-8) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} h = 0 \\ h = 2\sqrt{2} \\ h = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

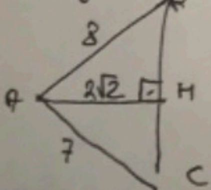
R': − + − +

R: ↘ $-2\sqrt{2}$ ↗ 0 ↘ $2\sqrt{2}$ ↗ h

min

=> R min, когда $h = 2\sqrt{2}$

Тогда найдём CD



$HD = \sqrt{64-8} = \sqrt{56} = \sqrt{8\cdot 7} = 2\sqrt{14}$ (по т. пифагора)

$HC = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$ (—||—)

$CD = HD + HC = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

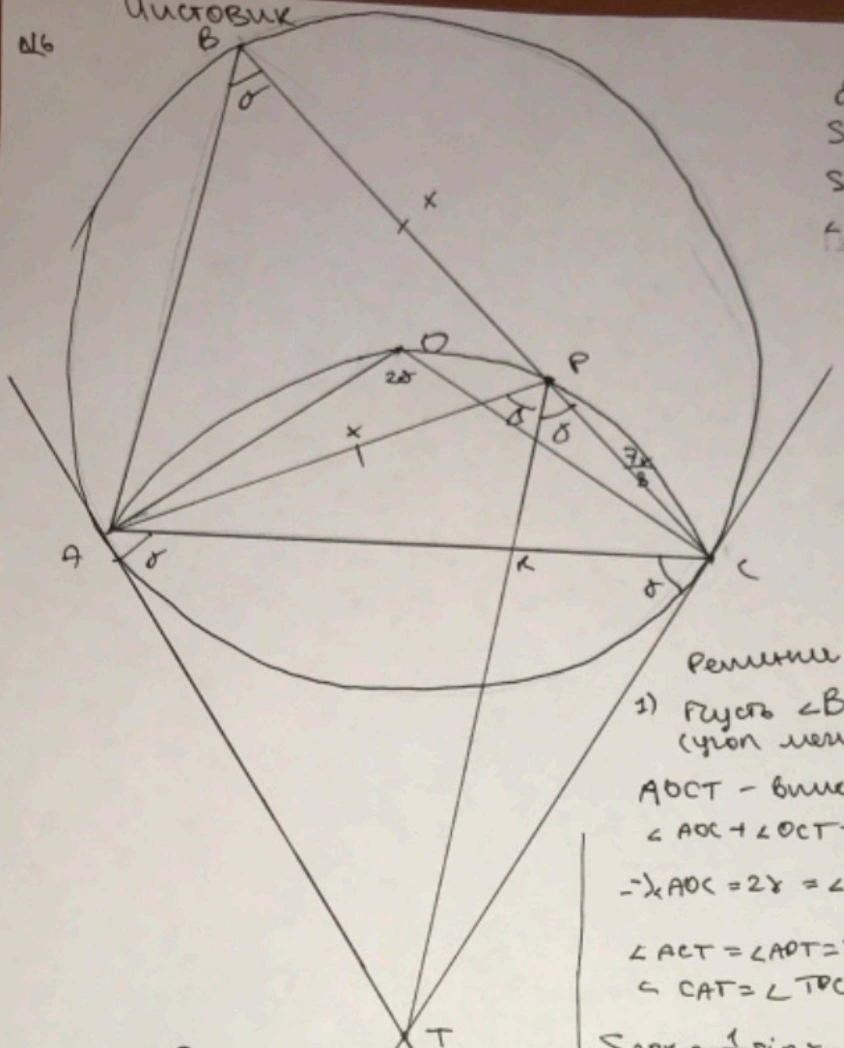
Шифр: **21100387**

ID профиля: **816895**

Вариант 24

Чистовик

№6



Дано:

$S_{CPK} = 14$

$S_{APK} = 16$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$

Решение

1) Пусть $\angle B = \gamma \Rightarrow \angle ACT = \angle OAT = \gamma$ (угол между кас. и хордой)

$AOCT$ – вписан. четырёхугольник, т.к. $\angle AOC + \angle OCT = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOC = 2\gamma = \angle APC$ (как опир. на ту же дугу)

$\angle ACT = \angle APT = \gamma$ (они соотв. опираются на одну дугу) $\Rightarrow$

$\angle CAT = \angle TPC = \gamma$

~~$S_{APK} = \frac{1}{2} \sin A\gamma$~~ $\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AP \cdot PK}{PK \cdot PC} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

$PC = \frac{7AP}{8} = \frac{7x}{8}$ ($AP = x$)

В $\angle BPA = 180° - 2\gamma \Rightarrow \angle BAP = 180° - \gamma - 180° + 2\gamma = \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABP$ – р/б $\Rightarrow BP = AP = x$

$BA = 2\cos\gamma \cdot x$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\cos\gamma\, x \cdot \frac{15x}{8} \cdot \sin\gamma = \frac{15}{16}x^2 \cdot 2\cos\gamma \cdot \sin\gamma =$

$= \cancel{4x^2 \cdot 2\cos\gamma \sin\gamma} = \frac{15}{16}x^2 \sin 2\gamma$

$= \cancel{4x^2 \sin 2\gamma}$, но

$S_{APC} = \frac{1}{2} x \cdot \frac{7x}{8} \cdot \sin 2\gamma = 30$

$x^2 \sin 2\gamma = \frac{30 \cdot 16}{7}$

Итого: $S_{ABC} = \cancel{4 \cdot \frac{16 \cdot 2}{7} = \frac{128}{7}}$

$\cancel{\frac{15}{16} \cdot \frac{16}{7}}$

$\frac{15}{16} \cdot \frac{30 \cdot 16}{7} = \frac{15 \cdot 30}{7} = \frac{450}{7}$

2) $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}} = \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}$

$S_{ABC} = 8x^2 \cdot \frac{5 \cdot 3}{(\sqrt{34})^2} = \cancel{\frac{128}{7}} \frac{450}{7}$

$8x^2 = \frac{34 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 10^5}{7 \cdot 5 \cdot 3}$

$x^2 = \frac{17 \cdot 3 \cdot 5}{14}$

По т. косинусов в $\triangle APC$:

$AC^2 = 50x^2 - 14x^2 \cdot \cos 2\gamma =$

$= \cancel{50 \frac{34 \cdot 16}{7 \cdot 5 \cdot 3} - 14 \frac{34 \cdot 16}{7 \cdot 5 \cdot 3}\left(\frac{25}{34} - \frac{9}{34}\right)} =$

$= \cancel{\frac{34 \cdot 16}{7 \cdot 5 \cdot 3}\left(50 - 7\frac{16}{17}\right)} =$

$= \cancel{\frac{34 \cdot 16}{7 \cdot 5 \cdot 3} \cdot \frac{738}{17} = \frac{246 \cdot 32}{7 \cdot 5}}$

$\cancel{AC = 4\sqrt{\frac{492}{35}}}$

~~Ответ:~~ 1) $\cancel{\frac{128}{7}}$ $\frac{450}{7}$

2) $\cancel{4\sqrt{\frac{492}{35}}}$

1

чистовик

<u>№6</u> (продолжение)

2) По т. косинусов в $\triangle APC$:

$$AC^2 = \frac{49}{64}x^2 + x^2 - \cancel{14}\,\frac{7}{4}x^2\cos 2\gamma = \frac{113}{64}\cdot\frac{17\cdot 3\cdot 5}{14} =$$

$$= \frac{17\cdot 3\cdot 5}{14}\left(\frac{113}{64} - \frac{7}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{34}_{17}}\right) =$$

$$= \frac{17\cdot 3\cdot 5}{14}\cdot\left(\frac{113}{64} - \frac{14}{17}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{17}\cdot 3\cdot 5}{14}\cdot\frac{1125}{\cancel{17}\cdot 64} = \frac{5^2\cdot 225\cdot 3}{14\cdot 64} =$$

$$= \frac{5^2\cdot 15^2\cdot 3}{14\cdot 8^2}$$

$$AC = \frac{5\cdot 15}{8}\sqrt{\frac{3}{14}} = \frac{75}{8}\sqrt{\frac{3}{14}}$$

<u>**ОТВЕТ:**</u> 1) $\cancel{\frac{75}{4}}$ $\frac{450}{7}$

2) $\frac{75}{8}\sqrt{\frac{3}{14}}$

Чистовик

№4

$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 33 = 3\cdot 11 & (1) \\ \text{НОК}(a;b;c) = 3^{19}\cdot 11^{15} & (2) \end{cases}$

Числа a, b, c имеют вид $a = 3^{a_1}\cdot 11^{a_2}$; $b = 3^{b_1}\cdot 11^{b_2}$; $c = 3^{c_1}\cdot 11^{c_2}$

Причем из ~~сист~~ ур-я (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \\ c_1 = 1 \end{array}\right.$ $\quad a_1 \geq 1 \quad a_2 \geq 1$

$\quad b_1 \geq 1 \quad b_2 \geq 1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_2 = 1 \\ b_2 = 1 \\ c_2 = 1 \end{array}\right.$ $\quad c_1 \geq 1 \quad c_2 \geq 1$

Из ур-я (2) следует, что:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1 = 19 \\ b_1 = 19 \\ c_1 = 19 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a_2 = 15 \\ b_2 = 15 \\ c_2 = 15 \end{array}\right. \end{cases}$

Тогда кол-во способов выбрать два числа, ~~у одного~~ одно из которых в разложении имеет 3, а второе 3^{19}:

$3\cdot 2 = 6$ способов

Тогда последнее оставшееся может иметь в разложении $\cancel{3^0}; 3^1 \ldots$

$\ldots 3^{19}$ 19 или ~~20~~ 19 вариантов

~~Итого~~ $6\cdot \cancel{20} = 114$ ~~120~~ вариантов (Но ещё нужно вычесть $C_3^2 = 3$ (~~когда~~ мы дважды посчитали числа у которых в разлож. 3^{19}

итого: ~~$120 - 3 = 117$~~ 111

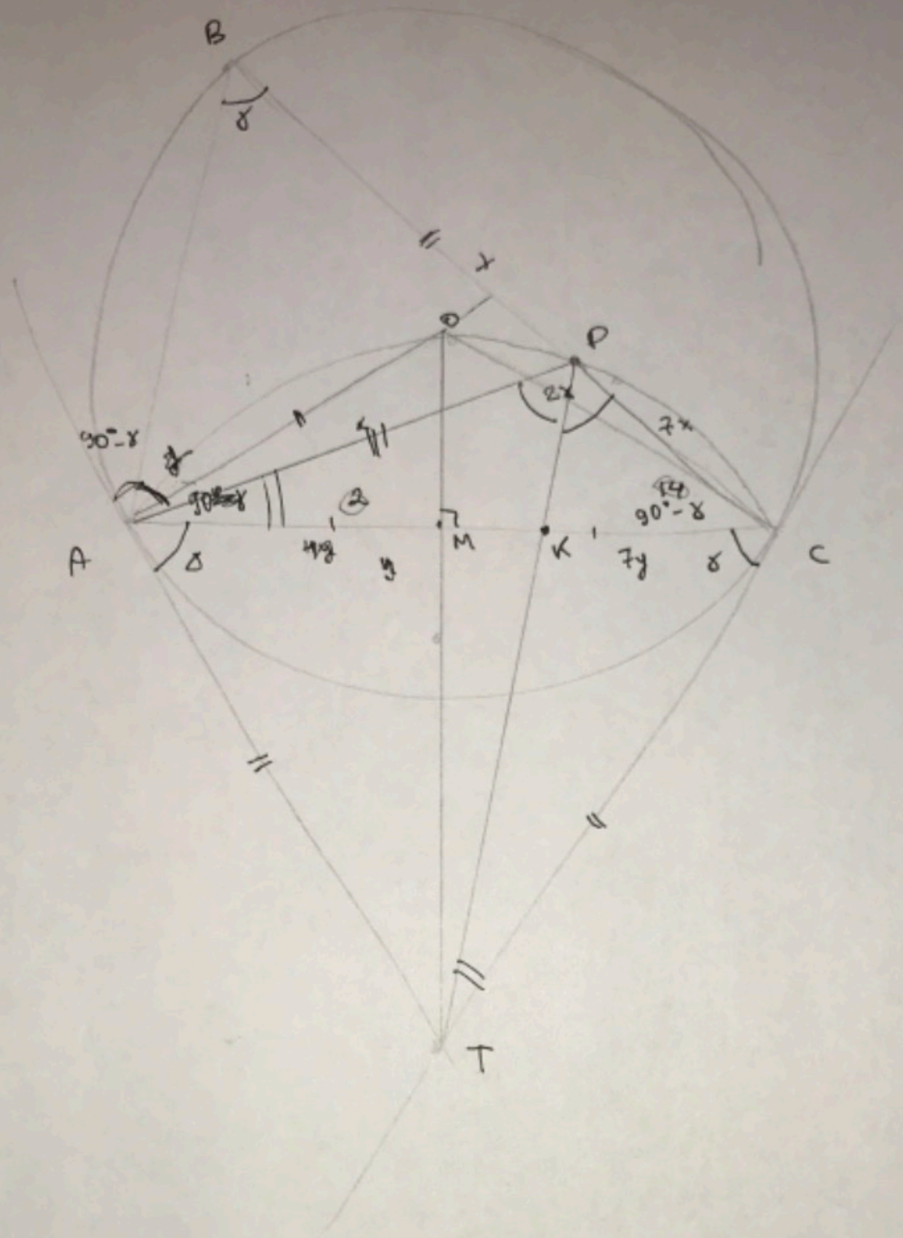
Аналогично с ~~11~~ с 11, только последнее число в разложении должно иметь $11^0; 11^1 \ldots 11^{15}$

$6\cdot 1\cancel{5} = 96 - C_3^2 = 93$

ОТВЕТ: $\cancel{93}\cdot 111 = \cancel{10287}$ 10159

87

③


B
γ
x
O
P
2x
7x
90°-γ
A
C
M
K
7y
y
T

$\frac{AK}{KT} =$

$$\begin{cases} AP \cdot PC \sin 2\gamma = \cancel{16}\ 32 \\ PK \cdot PC \cdot \sin\gamma = 28 \\ PA \cdot PK \cdot \sin\gamma = 4 \end{cases}$$

$2\ \frac{AP}{PK} \cdot \cos\gamma = \frac{32}{28}$ $\qquad$ $2\frac{PC}{PK}\cos\gamma = \frac{32}{4}$

$\frac{AP}{PK} \cdot \cos\gamma = \frac{16}{28}$ $\qquad$ $\frac{PC}{PK}\cos\gamma = 4$

$\frac{AP}{PC} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

$64 + 49 = 113$

$AC = 7AP$

$$\begin{cases} 7AP^2 \sin 2\gamma = 32 \\ AP \cdot PK \sin\gamma = \cancel{28}\ 4 \end{cases}$$

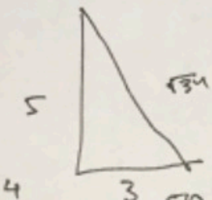
$32 \times 4 = 128$

$\frac{1}{2}\,2x\cos\gamma \cdot 8x \cdot \sin\gamma$

$\frac{\cancel{8} \cdot 8 \cdot 10}{7} - \frac{5 \cdot 17}{34}$ $\quad 8a^2$

$tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$



$\sqrt{25+9}$

$\sqrt{34} =$

$\frac{3 \cdot 10 \cdot 34}{7} = 8x^2$

$16 \times 7 = 112$

$50 \times 17 = 850$; $850 - 112 = 738$

$738 : 3 = 246$

$246 : 7 = 3$

$246 \times 2 = 492$

$113 \times 17 = 1921$; $1921 - 796 = 1125$

$64 \times 14 = 896$

15×30

$30 \times 15 = 450$

$1125 : 5 = 225$

ЧЕРНОВИК

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

I сл. $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{\log_{\sqrt{29-x}}(-x-1)}{\log_{\sqrt{29-x}}\sqrt{\frac{x}{7}+7}}$

$\log^2_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\cancel{t}=\log_{\sqrt{29-x}}((-x-1)^2)$, $-x-1>0$, $x\neq 28$

$\frac{x}{7}+7=x^2+2x+1$

$\cancel{x+49}\ 7x^2+13x-42=0$ $\quad -\frac{13}{14}$

$D=169+4\cdot 42\cdot 7$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)+1=\log_{(x+1)^2}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-(x+1))+1=\frac{1}{2}\log_{-(x+1)}(29-x)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\left(-(x+1)\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right)=\frac{1}{2}\log_{-(x+1)}(29-x)$

$\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}\left(-(x+1)\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right)$

$x+1<0$
$\underline{x<-1}$

$\frac{x}{7}+7>0$
$\underline{x>-49}$

$29-x>0$
$\underline{x<29}$

$117\cdot 93$: 351, 1053, 10881

3^{19}; 11; 11^{15}

$29\cdot 19$; $42\cdot 4$; $168\cdot 7=1176$; $1176+169=1345$; $1345:5=269$

II сл.

$\log_{(x+1)^2}(29-x)$

НОД$(a;b;c)=3\cdot 11$

$a\overset{3}{\equiv}0$

$a\overset{11}{\equiv}0$

$117\cdot 3=351$

$3\cdot\cancel{2\cdot 36}$

$3\cdot 2\cdot 18$

3^2; 3^2; 3^2

3	11

c 3^{15}

b 3^9

a 3

3

$16\cdot 6=96$

$1\ldots 18$

$6\cdot 15$

$117\cdot 87$: 819, 936, 10179