Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100284**

ID профиля: **381794**

Вариант 24

Чистовик

Задача №1:

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} 9 = (a_1 + 4d) 9$

Пусть $a_1 = a$, также запишем условия задачи:

Т.к. прогрессия возрастает, то $d > 0$ (разность прогресс.)

и все элементы - целые числа:

$$\begin{cases} d \in N \\ a_i \in Z \end{cases}$$

$S = (a + 4d) 9$

1) $a_5 \cdot a_{18} > S - 4$; $a_5 = a + 4d$; $a_{18} = a + 17d$

$(a + 4d)(a + 17d) > 9(a + 4d) - 4$

$a^2 + 21ad + 68d^2 > 9a + 36d - 4$

$a^2 + (21d - 9)a + (68d^2 - 36d + 4) > 0$

2) $a_{10} \cdot a_{13} < S + 60$: $a_{10} = a + 9d$; $a_{13} = a + 12d$

$(a + 9d)(a + 12d) < 9(a + 4d) + 60$

$a^2 + 21da + 108d^2 - 9a - 36d - 60 < 0$

$a^2 + (21d - 9)a + (108d^2 - 36d - 60) < 0$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + (21d - 9)a + (68d^2 - 36d + 4) > 0 & (1) \\ a^2 + (21d - 9)a + (108d^2 - 36d - 60) < 0 & (2) \end{cases}$$

Умножим (2) на (-1) и сложим с (1), при этом мы получим следующие системы:

$\cancel{a^2} + \cancel{(21d - 9)a} + (68d^2 - 36d + 4) - \cancel{a^2} - \cancel{(21d - 9)a} - (108d^2 - 36d - 60) > 0$

$-40d^2 - 36d + 36d + 4 + 60 > 0$

$-40d^2 + 64 > 0$

1

Чистовик

Задача №1 (продолжение):

$-40d^2+64>0$ $\quad$ $d^2-\frac{16}{10}<0$

$d^2-\frac{64}{40}<0$ $\quad$ $d^2-\frac{16}{10}<0$

1) Сравним 1 и $\frac{4}{\sqrt{10}}$: $\begin{cases}\left(d-\frac{4}{\sqrt{10}}\right)\left(d+\frac{4}{\sqrt{10}}\right)<0\\ d>0\end{cases}$

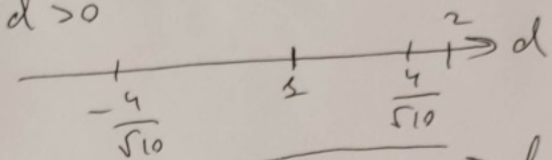
$1 \wedge \frac{4}{\sqrt{10}}$

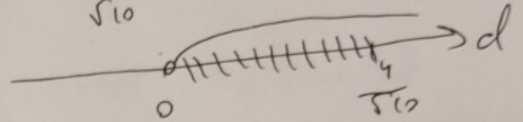
$\sqrt{10} \wedge 4$

$10 < 16$

$\Downarrow$

$1 < \frac{4}{\sqrt{10}}$





2) Сравним 2 и $\frac{4}{\sqrt{10}}$:

$2 \wedge \frac{4}{\sqrt{10}} \rightarrow 2\sqrt{10} \wedge 4 \rightarrow 40>16 \rightarrow 2>\frac{4}{\sqrt{10}}$

Следует, что $\Downarrow$ единственное значение, которое может принимать d, это $1 \Rightarrow d=1$:

Вернемся к исходной системе заменяя d на 1:

$\begin{cases}a^2+12a+36>0\\ a^2+12a+12<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a+6)^2>0\\ a^2+12a+12<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a\neq-6\\ (a-(-3-\sqrt{6}))(a-(-3+\sqrt{6}))<0\end{cases}$

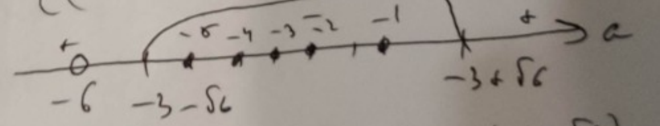
$\Downarrow$

$\begin{cases}a\neq-6\\ (a-(-3-\sqrt{6}))(a-(-3+\sqrt{6}))<0\end{cases}$

$a^2+12a+12=0$

$D=36-12=24$

$a=\frac{-6\pm2\sqrt{6}}{2}=-3\pm\sqrt{6}$



1) Сравним -6 и $(-3-\sqrt{6})$:

$-6=-3-\sqrt{9}<-3-\sqrt{6}$

2) Сравним -5 и $(-3-\sqrt{6})$:

$-5 \wedge -3-\sqrt{6} \quad |+3$

$-2 \wedge -\sqrt{6}$

$2 \vee \sqrt{6}$

$4<6 \rightarrow -5>-3-\sqrt{6}$

3) Сравним -1 и $(-3+\sqrt{6})$:

$-1 \wedge -3+\sqrt{6} \quad |+3$

$2 \wedge \sqrt{6}$

$4<6$

$\Downarrow$

$-1<-3+\sqrt{6}$

4) Сравним 0 и $(-3+\sqrt{6})$:

$0 \wedge -3+\sqrt{6}$

$3 \wedge \sqrt{6}$

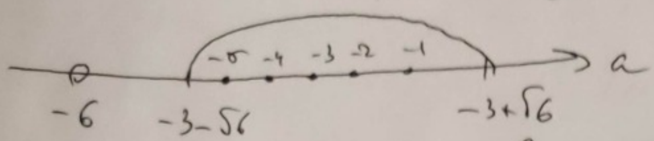
$9>6$

$\Downarrow$

$0>-3+\sqrt{6}$

Чистовик

Задача №1 (продолжение):



Т.к. $a_i \in \mathbb{Z}$, то $a \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$

Заметим, что каждое из данных значений a подойдет, т.к. они были получены из следующей системы:

$$\begin{cases} a^2+12a+36>0 \\ a^2+12a+12<0 \end{cases}$$

которая интерпретирует условие задачи при единственном значении параметра $d=1$; то есть все найденные a могут ~~буд~~ быть a_1.

Ответ: a_1 может быть равен: $-5; -4; -3; -2; -1$

Чистовик

Задача №3:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b;10) \end{cases} \qquad S_M = ?$$

1) Заметим, что если $-6a-2b<0$, то нет решений $\Rightarrow$

$\Rightarrow -6a-2b \ge 0$: $\boxed{b \le -3a}$

2) Рассмотрим несколько случаев:

1) $0 \le -6a-2b \le 10$: $b \ge -5-3a$

2) $-6a-2b > 10$: $b < -5-3a$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le -6a-2b \end{cases} (1) \text{ при } -5-3a \le b \le -3a \\ \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le 10 \end{cases} (2) \text{ при } \begin{cases} b \le -3a \\ b < -5-3a \end{cases} \Rightarrow b < -5-3a \end{array}\right.$$

(1): $\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \\ a^2+6a+9-9+b^2+2b+1-1 \le 0 \end{cases} \to \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \end{cases}$

при $-5-3a \le b \le -3a$;

Отделим границы для переменных a и b:

1) $b = -3a$:

$a^2+9a^2 \le -6a+6a$

$10a^2 \le 0 \Rightarrow \boxed{a=b=0}$

При $a = \frac{-3-\sqrt{3}}{2}$:

$b = -5-3\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

При $a = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$:

$b = -5-3\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$

2) $b = -5-3a$

$a^2 + (3a+5)^2 \le -6a+10+6a$

$a^2+9a^2+30a+25 \le 10$

$10a^2+30a+15 \le 0$

$2a^2+6a+3 \le 0$

$a = \frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$.

$a \in \left[\frac{-3-\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in \left[\frac{-3\sqrt{3}-1}{2}; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right]$

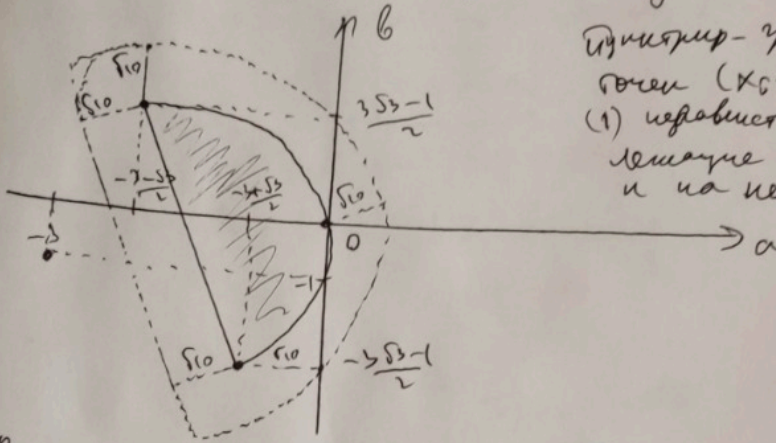
4

21100284 (U381794 M1295543)

Чистовик:
Задача 3 (продолжение)

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \quad (1) \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \quad (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{-3-\sqrt{3}}{2} \le a \le \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3\sqrt{3}-1}{2} \le b \le \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Построим графики неравенств данной системы:



Пунктир — граница критических точек $(x;y)$ — центра круга (1) неравенства; все пары $(x;y)$ лежащие внутри этого контура и на нем будут подходить

1) Второе неравенство задает собой круг с центром $(-3;-1)$ и радиусом $\sqrt{10}$, но используя ограничения на a и b ~~данное~~ данный круг будет обрезан в часть круга, т.к. ограничения на a и b определяют собой полосу значений между прямыми $\begin{cases} b \le -3a \\ b \ge -5-3a \end{cases}$, при этом прямая $b=-3a$ касается окружности $(a+3)^2+(b+1)^2=10$ в точке $(0;0)$.

2) Первое ~~уравнение~~ нер-во задает собой окружность радиуса $\sqrt{10}$ и центром $(x;y)$; т.к. фигура M представляет из себя все множество $(x;y)$, удовлетворяющих системе неравенств, то граничные значения $(x;y)$ будут отходить от ~~фигуры~~ части круга ((2) нер-ва) на $R=\sqrt{10}$ — именно ~~это~~ эти значения будут критическими точками, в том плане, что $(x;y)$ отстоящие от множества точек (решений (2) нер-ва) более чем на $\sqrt{10}$ не будут подходить под решение системы, а все пары $(x;y)$ отстоящие от множества точек (решений (2) нер-ва) не более чем на $R=\sqrt{10}$ будут подходить.

Чистовик

Задача 3 (продолжение)

Теперь рассмотрим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le 10 \quad (2) \qquad b < -5-3a \end{cases}$$

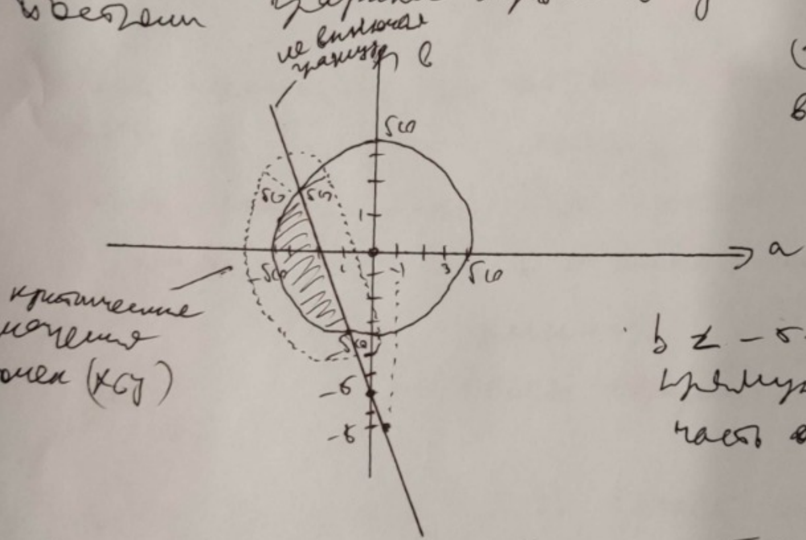
Определим границы для переменных a и b, исходя из условия на b: пусть $b = -5-3a$:

$a^2 + (3a+5)^2 \le 10$

$2a^2+6a+3 \le 0$ – уже было данное нер-во на a

$a \in \left[\frac{-3-\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]$

Построим графики неравенств данной системы.



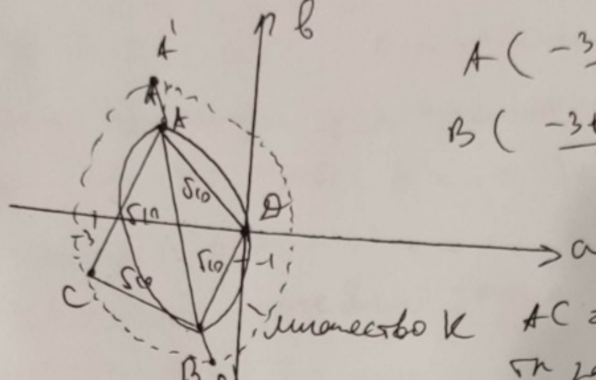
(2) – круг с центром в точке $(0;0)$ и $R=\sqrt{10}$

$b < -5-3a$ – определяет прямую, которая отсекает часть круга графика (2)

Также как и с первой системой (1) нер-во задает множество точек $(x;y)$, границы которых отступают на $\sqrt{10}$ от (заштрихованных) точек множества решений нер-ва (2) и условия на b: $b<-5-3a$;

чистовик
Задача №3 (продолжение)

Посчитаем площади секторов I и II множества:



$A\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$B\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}; \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

множество K $AC = CB = AD = DB = \sqrt{10}$ – т.к. радиусы окр с центрами $(-3;-1)$ и $(0;0)$

1) Длина AB:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{31}}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2} = \sqrt{31} \Rightarrow AB = \sqrt{31}$$

2) $A'B' = 2\sqrt{10} + AB = \sqrt{31} + 2\sqrt{10}$

• $\triangle ABC = \triangle ADB$ (по 3 сторонам) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = \alpha$

~~Sсектора~~ 3) По т. косинусов в $\triangle ABC$ для $\angle ACB = \alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 - AC^2 - CB^2}{-2AC \cdot CB} = \frac{31-20}{-2 \cdot 10} = -\frac{11}{20} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{279}}{20}$$

а) $S_{\text{сектора } ACB} = \alpha R^2 = (\sqrt{10})^2 \cdot \left(\pi - \arccos\frac{11}{20}\right) = 10\left(\pi - \arccos\frac{11}{20}\right)$

б) $S_{\text{сектора } ADB} = \alpha R^2 = (\sqrt{10})^2\left(\pi - \arccos\frac{11}{20}\right) = 10\left(\pi - \arccos\frac{11}{20}\right)$

в) $S_{ADBC} = 2S_{\triangle ACB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha(\sqrt{10})^2 = \frac{\sqrt{279}}{20} 10 = \frac{\sqrt{279}}{2}$

г) $S_{\text{множества } K} = S_{\text{сектора } ACB} + S_{\text{сектора } ADB} - S_{ADBC} =$
$= 20\left(\pi - \arccos\frac{11}{20}\right) - \frac{\sqrt{279}}{2}$

7

21100284 (U381794 M1295543)

Чистовик

Задача 3 (продолжение)

$S_{\text{множества } M} = k^2 \cdot S_{\text{множества}}$

k – коэффициент подобия этих множеств, определяем его (множества подобны в виду гомотетии относительно точки-центра множества K)

$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\sqrt{31}+2\sqrt{10}}{\sqrt{31}}$

$\Downarrow$

$S_{\text{множества } M} = \left(\frac{\sqrt{31}+2\sqrt{10}}{\sqrt{31}}\right)^2 \cdot \left(20\left(\pi - \arccos\frac{11}{20}\right) - \frac{\sqrt{279}}{2}\right) =$

$= \frac{71+4\sqrt{310}}{31}\left(20\left(\pi - \arccos\frac{11}{20}\right) - \frac{\sqrt{279}}{2}\right)$

Ответ: $S_M = \frac{71+4\sqrt{310}}{31}\left(20\left(\pi - \arccos\frac{11}{20}\right) - \frac{\sqrt{279}}{2}\right)$

21100284 (U381794 M1295543)

Черновик

№1:

1) $S = a_1 + a_2 + .. + a_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a + a + d \cdot 8}{2} \cdot 9 =$

$a_1 = a$

$= \frac{2a + 8d}{2} 9 =$

$= (a + 4d) 9$

$S = (a + 4d) 9$

$\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ d \in \mathbb{N} \end{cases}$ (1) $\cdot\ a_5 a_{18} > S - 4$ $\quad a = ?$

(2) $\cdot\ a_{10} a_{13} < S + 60$

(1): $a_5 = a + 4d$, $a_{18} = a + 17d$

$(a+4d)(a+17d) > 9(a+4d) - 4$

$\times \begin{array}{r} 17 \\ 4 \\ \hline 68 \end{array}$

$a^2 + 17da + 4da + 68d^2 > 9a + 36d - 4$

$\boxed{a^2 + 21da - 9a + 68d^2 - 36d + 4 > 0}$

(1): $a^2 + (21d - 9)a + (68d^2 - 36d + 4) > 0$

(2): $a_{10} = a + 9d$; $a_{13} = a + 12d$

$\times \begin{array}{r} 12 \\ 9 \\ \hline 108 \end{array}$

$(a+9d)(a+12d) < S + 60$

$a^2 + \underbrace{12da + 9da}_{21da} + 108d^2 < 9a + 36d + 60$

(2) $\boxed{a^2 + (21d - 9)a + (108d^2 - 36d + 60) < 0}$

черновик

$$\begin{cases} a^2+(21d-9)a+(68d^2-36d+4)>0 \\ a^2+(21d-9)a+(108d^2-36d-60)<0 \end{cases}$$

$D_1=(21d-9)^2-4(68d^2-36d+4)=441d^2-378d+81-272d^2+144d-16=$
$=169d^2-650d+65=$
$=13(13d^2-50d+5)$

$$\begin{cases} a^2+(21d-9)a+(68d^2-36d+4)>0 \quad (1) \\ -a^2-(21d-9)a-(108d^2-36d-60)>0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) + (2):

$68d^2-36d+4-108d^2+36d+60>0$
$-40d^2+64>0$
$40d^2-64<0$
$10d^2-16<0$
$d^2-\frac{16}{10}<0$

$d^2-\frac{16}{10}<0$ $\quad (d-\frac{4}{\sqrt{10}})(d+\frac{4}{\sqrt{10}})<0$

$-\frac{4}{\sqrt{10}}$ $\quad \frac{4}{\sqrt{10}}$ d

0 $\quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad$ d

$\boxed{d=1}$

$2 \wedge \frac{4}{\sqrt{10}}$
$4 \wedge \frac{16}{10}$
$40 \wedge 16$
$2>\frac{4}{\sqrt{10}}$
$1<\frac{4}{\sqrt{10}}$

(1): $a^2+(21-9)a+(68-36+4)>0$
$a^2+12a+36>0$
$(a+6)^2>0 \Rightarrow \boxed{a\neq-6}$

$a^2+12a+12=0$
$D=36-12=24=4\cdot6$
$a=\frac{-6\pm2\sqrt6}{2}=-3\pm\sqrt6$

$441-272=169$; $378+272=650$; $81-16=65$; $21\cdot18=168$; $168\cdot21=378$; $68\cdot4=272$; $36\cdot4=144$; $65:13=5$; $13\cdot5=65$; $108-68=40$; $64:4=16$; $21-9=12$; $68-36=32$; $32+4=36$; $68+4=72$; $72-36=36$; $108-60=48$; $64-36$; $108-68=40$; $108-60=48$; $48-36=12$

2

21100284 (U381794 M1295543)

Черновик:

$(2): a^2 + (21d - 9)a + (108d^2 - 36d - 60) < 0$

$d = 1:$

$a^2 + 12a + (108 - 36 - 60) < 0$

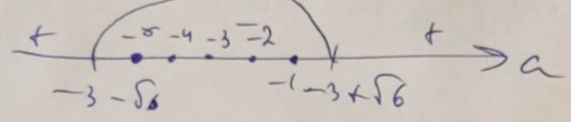
$108 - 60 = 48$, $48 - 36 = 12$

$a^2 + 12a + 12 < 0$

$a = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 12}}{2}$

$36 - 12 = 24 = 4 \cdot 6$ $\qquad 60 + 36 = 96$ $\qquad 96 + 12 = 108$

$a = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{1} = -3 \pm \sqrt{6}$



$-3 - \sqrt{6} \overset{<}{\vee} -5$ $\qquad -3 + \sqrt{6} \overset{>}{\vee} -2 \mid +3$

$3 + \sqrt{6} \vee 5 \mid -3$ $\qquad \sqrt{6} \overset{>}{\vee} 1$ $\qquad -3 + \sqrt{6} \overset{>}{\vee} -1 \mid +3$

$\sqrt{6} \vee 2$ $\qquad \sqrt{6} \overset{>}{\vee} 2$

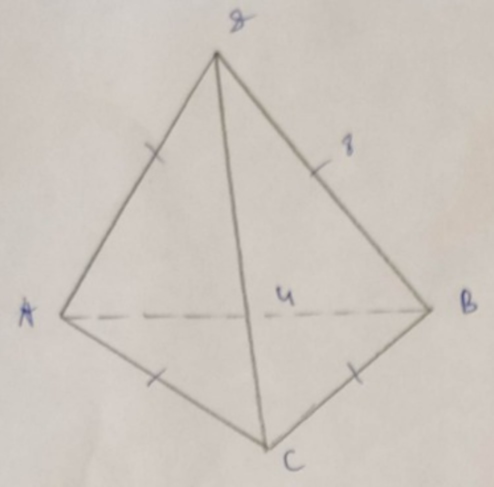
$6 > 4$

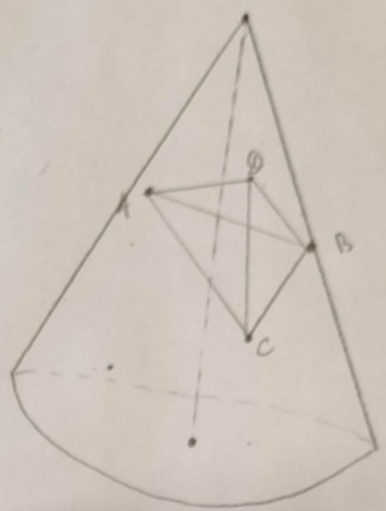
$a = -5; -4; -3; -2; -1$, $d = 1$

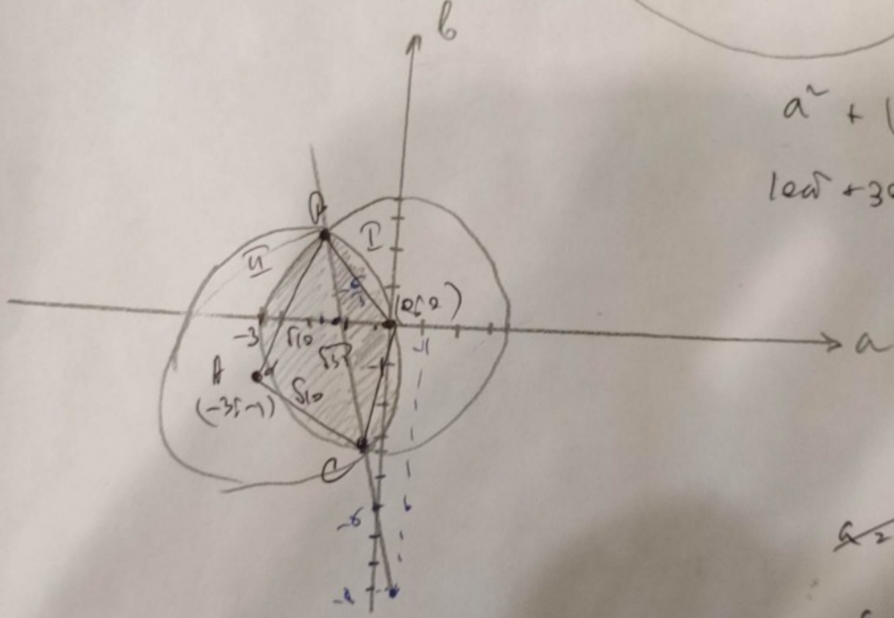
~~$a = -5:$~~

~~$\sqrt{2} \quad -5 + \frac{-5 + 1 \cdot 8}{2} \cdot 9 = \frac{-10 + 8}{2} \cdot 9 =$~~

черновик.







$a^2+(3a+5)^2\le 10$

$10a^2+30a+15\le 0$

$2a^2+6a+3\le 0$

$a\in\left[\frac{-3-\sqrt{3}}{2};\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]$

$\cancel{a=-6\pm}$

$a=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$

Черновик:

$\forall (x; y) : \exists (a; b)$ при которых вып. система:

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$; $M = ?$

при $-6a-2b < 0$ – нет решений $\Rightarrow$

$\Rightarrow -6a-2b \ge 0$: $\quad -3a \ge b$

$-6a \ge 2b$ $\quad \boxed{b \le -3a}$

1) $-6a-2b \le 10$:

$-2b \le 10+6a$

$b \ge -5-3a \Rightarrow \boxed{b \in [-5-3a; -3a]}$

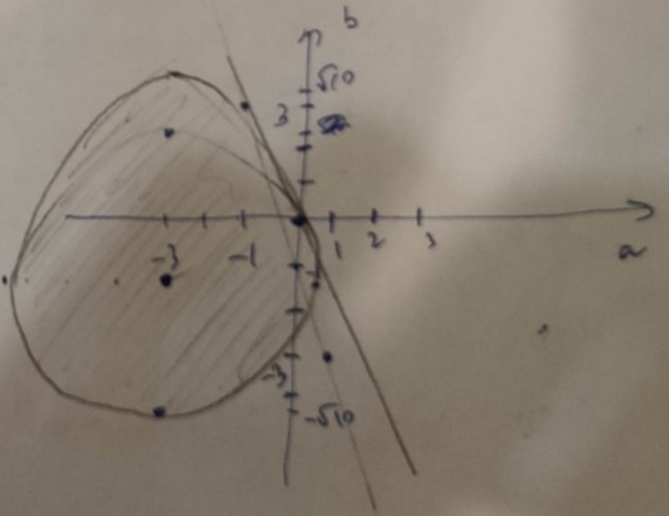
(1) : $b \in [-5-3a; -3a]$

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le -6a-2b \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \end{cases}$

(2) : $a^2+6a+b^2+2b \le 0$

$a^2+6a+9-9+b^2+2b+1-1 \le 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$



$\begin{cases} -5-3a \le b \\ -3a \ge b \end{cases}$

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \end{cases}$

$-5-3a \le b \le -3a$

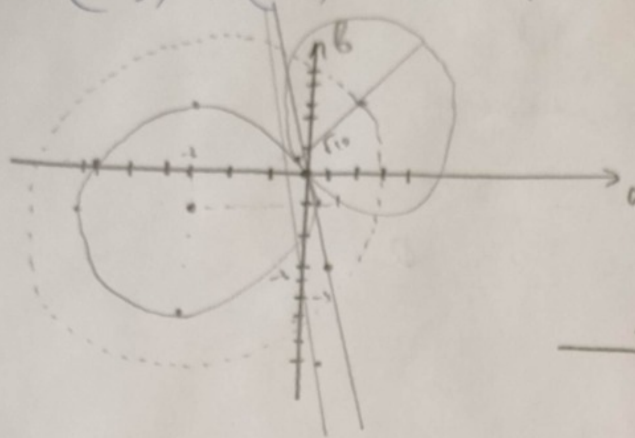
6

21100284 (U381794 M1295543)

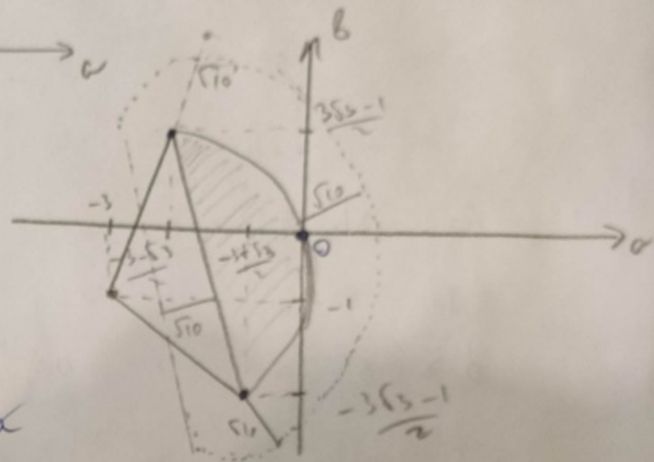
Черновик:

1) $-5-3a \le b \le -3a$:

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 10 \Rightarrow \text{центр } O_1(x;y) \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10 \Rightarrow \text{центр } O_2(-3;-1) \end{cases}$$



$R_{окр.\ большой} = 2\sqrt{10}$



1) $b=-3a$:

$a^2+9a^2 \le -6a+6a$

$10a^2 \le 0 \Rightarrow a=0 \quad b=0$

2) $b=-5-3a$:

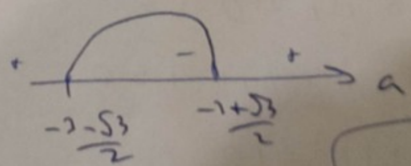
$a^2+(5+3a)^2 \le -6a+6a+10$

$a^2+9a^2+30a+25-10 \le 0$

$10a^2+30a+15 \le 0$

$2a^2+6a+3 \le 0$

$a=\frac{-3\pm\sqrt{9-6}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}$



1) $b=-5-3\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)=-5+\frac{9+3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

2) $b=-5-3\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)=-5+\frac{9-3\sqrt{3}}{2}=\frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$

• ~~Sсектора~~

$S_{круга}=\pi R^2$

$S_{сектора}=\frac{\alpha}{360}\cdot R^2=\alpha R^2$

Черновик

$F\left(-\frac{3-\sqrt{3}}{2};\ \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$ верх

$\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2};\ \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$\begin{array}{r} 10 \\ +21 \\ \hline 31 \end{array}$

$\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}=$

$=\sqrt{\frac{9+\cancel{6\sqrt{3}}+3+18-\cancel{6\sqrt{3}}+1}{4}}+\sqrt{\frac{3-\cancel{6\sqrt{3}}+9+18+\cancel{6\sqrt{3}}+1}{4}}=$

$=\frac{\sqrt{31}}{2}+\frac{\sqrt{31}}{2}=\sqrt{31}$

$\begin{array}{r} 400 \\ -121 \\ \hline 279 \end{array}$

$\begin{array}{r} 400 \\ -121 \\ \hline 279 \end{array}$

$\cos\angle=\frac{31-10-10}{-2\cdot 10}=\frac{11}{-20}=-\frac{11}{20}$

$\sin\angle=\sqrt{\frac{400-121}{400}}=\frac{\sqrt{279}}{20}$

$\angle=\pi-\arccos\frac{11}{20}$

$S_{\text{сектора I}}=\left(\pi-\arccos\frac{11}{20}\right)10^{\leftarrow R^2}$

$S_{\text{сектора II}}=\left(\pi-\arccos\frac{11}{20}\right)10$

$S_M=S_{I}+S_{II}-2S_{\triangle ABC}=20\left(\pi-\arccos\frac{11}{20}\right)-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{279}}{20}\cdot 10=$

$=20\left(\pi-\arccos\frac{11}{20}\right)-\frac{\sqrt{279}}{2}$

(7)

21100284 (U381794 M1295543)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100284**

ID профиля: **381794**

Вариант 24

Чистовик

Задача №1:

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 3^1 \cdot 11^1 \\ НОК(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1} \\ b = 3^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2} \\ c = 3^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3} \end{cases}$$

1) По определению НОД имеем:

$$НОД(a; b; c) = 3^{\min(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)} \cdot 11^{\min(\beta_1; \beta_2; \beta_3)}$$

2) По определению НОК имеем:

$$НОК(a; b; c) = 3^{\max(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)} \cdot 11^{\max(\beta_1; \beta_2; \beta_3)}$$

~~Значения степеней~~: max степень min степень ~~любая степень~~

~~Основание~~:

~~3~~ ~~3) Заметим, что~~

~~11~~

3) Определим кол-во способов выбрать α_i как максимальное значение 19, затем выберем α_i (из оставшихся α) как минимальное значение, тогда единственное значение α, которое осталось, может принимать любое значение в диапазоне от 1 до 19, тк максимальная и минимальная степени уже выбраны:

max	min	[1...19]
3	2	1

$\Rightarrow (3 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 19) \Rightarrow$

3 — можно выбрать одну из 3 α_i

2 — можно выбрать одну из 2 α_i

1 — берем последнюю α

$\Rightarrow \bullet (3 \cdot 1)$ и $(2 \cdot 1)$: кол-во значений, которое может принимать max и min ~~значение~~ значения степени α равны 19 и 1 соответственно, значит это 1 вариант

$\bullet (1 \cdot 19)$ кол-во способов для последней α выбрать значение от 1 до 19

1

Чистовик:

Задача 1 (продолжение):

Итого имеем кол-во способов выбрать степени α_i:

$$(3\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)\cdot(1\cdot 19) = 6\cdot 19$$

мы их перемножаем, т.к. каждая степень α берется независимо от другой.

4) Определим кол-во способов выбрать значения для степеней β_i; сделаем это таким же образом как для степеней α_i:

max значение 15	min значение 1	значение [1...15]
3 способа выбрать β_i	2 способа выбрать β_i	1 способ выбрать β_i

$\Downarrow$

$$(3\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)\cdot 1\cdot(15-1+1) = 6\cdot 15 \text{ способов}$$

выбрать значение для степеней β.

5) Т.к. α и β выбираются независимо друг от друга, то кол-ва способов выбрать α и β перемножается:

$$(6\cdot 19)\cdot(6\cdot 15) = 36\cdot 15\cdot 19 = 10260$$

Ответ: $10260 = 36\cdot 15\cdot 19$

Чистовик

Задача №2

$x = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

$y = \log_{(x+1)^2}(29-x)$

$z = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

Ограничения:

$$\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ -x-1>0 \\ (x+1)^2\neq 1 \\ (x+1)^2>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<29 \\ x\neq 28 \\ x>-49 \\ x\neq -42 \\ x<-1 \\ x\neq 0;\ x\neq -2 \\ x\neq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>-49 \\ x<-1 \\ x\neq 0,-2,-42 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in (-49;-1)\setminus\{-42;-2\}$

$\sqrt{29-x} = \sqrt{a}$

$\sqrt{\frac{x}{7}+7} = b$

$-(x+1) = c$

$x = 4\log_a b$

$y = \frac{1}{2}\log_c a$

$z = \log_b c$

$xyz = 2\log_a b \cdot \frac{\log_c a}{\log_c b} =$

$= 2\log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} = 2$

$\boxed{xyz = 2}$

$$\left[\begin{array}{ll} x^2(x+1)=2 & (1) \\ y^2(y+1)=2 & (2) \\ z^2(z+1)=2 & (3) \end{array}\right.$$

(1): $x^3+x^2-2=0$

$x=1$ - решение

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-2 & x-1 \\ \underline{-\ x^3-x^2} & x^2+2x+2 \\ \quad 2x^2-2 & \\ \underline{-\ 2x^2-2x} & \\ \quad\quad 2x-2 & \\ \underline{-\ 2x-2} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$D=4-4\cdot 2<0 \Rightarrow$ нет решений у второй скобки

3

Чистовик

Задача №2 (продолжение)

Тк уравнения (1), (2), (3) симметричны, то

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \ (1) \\ y=1 \ (2) \\ z=1 \ (3) \end{array}\right.$$ – равносильно исходной совокупности

(1): $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

$\frac{x}{7}+7=\sqrt{29-x}$

$x+49=7\sqrt{29-x} \quad x>-49$

$x^2+147x+49\cdot 20=0$

$D=(7\cdot 19)^2 \quad x=\frac{-147\pm 7\cdot 19}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-140 \\ x=-7 \end{array}\right.$

Под ограничения подходит только $\boxed{x=-7}$

(2): $y=1$.

$\log_{(x+1)^2}(29-x)=1$

$(x+1)^2=29-x$

$x^2+2x+1+x-28=0$

$x^2+3x-28=0$

$x=\frac{-3\pm 11}{2}$

$x_1=-7 \quad x_2=\frac{11-3}{2}=4>0$

под ограничения подходит только $x=-7$

(3): $z=1$!

$\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(x+1)^2=0$

$(x+1)^2=\frac{x}{7}+7$

$7(x^2+2x+1)=x+49$

$7x^2+14x+7-x-49=0$

$7x^2+13x-42=0$

$x=\frac{-13\pm\sqrt{1345}}{14}$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-7 \\ x_2=4 \end{array}\right.$ – только $\boxed{x=-7}$

$x=\frac{-13+\sqrt{1345}}{14}>0$

не подходит

$\frac{-13-\sqrt{1345}}{14} \wedge -49$

$-\sqrt{1345} \wedge -49\cdot 14+13$

(4)

21100284 (U381794 M1295544)

Чистовик

Задача №2 (продолжение):

$$-\sqrt{1348} \vee \underbrace{-49 \cdot 14 + 13}_{}$$

$$-\sqrt{1348} \vee -673 \Rightarrow -\sqrt{1348} > -673 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-13-\sqrt{1348}}{14} < -1$$

$$\Leftrightarrow$$

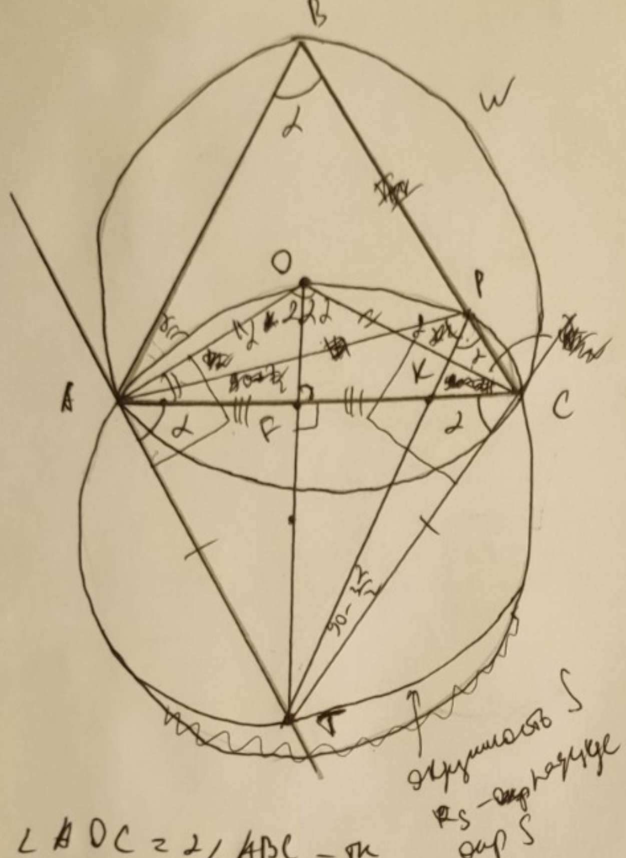
$x = \dfrac{-13-\sqrt{1348}}{14}$ — подходит под ограничение

Ответ: -7; $\dfrac{-13-\sqrt{1348}}{14}$

6

Чистовик

Задача №6:



$S_{\triangle APK} = 16$

$S_{\triangle CPK} = 14$

а) $S_{\triangle ABC} = ?$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{6}$

$AC = ?$

1) $AT = TC$ - тк отрезки касательных

⇓

$\alpha = \angle ACT = \angle CAT$, тк $\triangle ACT$ - равнобедренный

2) тк AT - касательная к W, то $\angle ABC = \angle TAC = \angle ACT$ - тк вписанный угол, опирающийся на хорду, равен углу между этой хордой и касательной AT.

3) $\angle AOC = 2\angle ABC$ - тк $\angle AOC$ - центральный; а $\angle ABC$ - вписанный ⇒

⇒ $\angle AOC = 2\alpha$

4) В $\triangle ACT$: $\angle ATC = 180° - 2\alpha$ ⇒ $AOCT$ - вписанный, тк $\angle AOC + \angle ATC = 180°$ ⇒ $T \in$ окр. описанной около $\triangle AOC$

5) $\angle OCA = \angle OAC = \frac{180° - \angle AOC}{2} = 90° - \alpha$ - в $\triangle AOC$, где $AO = OC$ - тк радиусы окр W. ⇒ $\angle OCT = \angle OCA + \angle ACT = 90 - \alpha + \alpha = 90°$ ⇒

⇒ ~~OT - радиус~~ OT - диаметр окр описанной около $\triangle AOC$.

⑥

Чистовик:

Задача №6 (продолжение)

6) $\angle OTC = \angle OAC = 90 - \alpha$ (т.к. вписанные углы и опираются на OC дугу)

$\Downarrow$

$\angle TOC = \alpha$, т.к. $\angle OCT = 90^\circ$, тогда

$OT \perp AC$, т.к. $\angle OFC = 180^\circ - \angle FOC - \angle OCF = 180^\circ - 90^\circ + \alpha - \alpha = 90^\circ$

7) $\angle TPC = \angle COT = \alpha$ (т.к. вписанные и опираются на дугу TC)

$\Downarrow$

$\angle APC = 2\alpha$ и TP – биссектриса $\angle APC$

8) $S_{\triangle APC} = S_{\triangle AKP} + S_{\triangle CPK} = 16 + 14 = 30 = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \, AP \cdot PC$

$2 \cdot R_S = \dfrac{AC}{\sin 2\alpha}$ – по т. синусов в $\triangle APC$ и окр S

$2R = \dfrac{AC}{\sin\alpha}$ – по т. синусов в $\triangle ABC$ и окр ω

---

9) $\angle BAC = \angle BCA = \dfrac{180 - \alpha}{2} = 90 - \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCP = \angle ACB - \angle OCA = 90 - \dfrac{\alpha}{2} - 90 + \alpha = \dfrac{\alpha}{2}$

$\Downarrow$

$\angle OCP = \angle OAP = \angle OTP = \dfrac{\alpha}{2}$ – т.к. вписанные и опир. на OP

10) $\cancel{\angle AKC = 180^\circ - \angle KPC - \angle PCA = 180^\circ - \alpha - 90 - \frac{\alpha}{2} = 90 - \frac{3\alpha}{2}}$

$\cancel{\angle PAK = 180^\circ - \angle APK - \angle PKA = 180^\circ - \alpha - 90 + \frac{3\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}}$

$\angle PAK = \cancel{90} + 90 - \alpha - \dfrac{\alpha}{2} = 90^\circ - \dfrac{3\alpha}{2}$

$\angle PAK = 90^\circ - \dfrac{3\alpha}{2}$

$\angle PKA =$

Чистовик

Задача № 6 (продолжение):

а) $\angle BAD = 90° - \frac{\alpha}{2} - 90° + \alpha = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAD = \alpha \Rightarrow \triangle BDA$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD = AP$

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot AP \cdot PC = 30 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, AP = \frac{30}{PC}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AP \cdot PB \sin \angle BPA = \underbrace{\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot PB}_{= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, AP} \cdot AP = \frac{30}{PC} AP$

$$\boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{30 AP}{PC}}$$

Чилсовик

Задача №6:

$S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} PK \cdot AP \cdot \sin\alpha = 16$

$S_{\triangle PKC} = \frac{1}{2} PC \cdot PK \sin\alpha = 14$

$\Downarrow$

$$\frac{\frac{1}{2} PK \cdot AP \sin\alpha}{\frac{1}{2} PC \cdot PK \sin\alpha} = \frac{16^{8}}{14_{7}} \Rightarrow \boxed{\frac{AP}{PC} = \frac{8}{7}} \qquad AP = \frac{8}{7} PC$$

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = 30 = 16 + 14$

$\frac{4}{7} PC^2 \sin 2\alpha = 30$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2R_S$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{8}$

9

Черновик

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}$ $\quad (3^1 \cdot 11^1) ; [3^{19} \cdot 11^{15}]$

$b = 3^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2}$ $\quad 19^6 : 3 ; 1 \ldots 19 : 2$

$c = 3^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3}$ $\quad 19 \geq \alpha_i \geq 1$

$15 \geq \beta_i \geq 1$

$$\begin{cases} (a;b;c) = 3^{\min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)} \cdot 11^{\min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)} \\ [a;b;c] = 3^{\max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)} \cdot 11^{\max(\beta_1;\beta_2;\beta_3)} \end{cases}$$

max min value: 1...19

$3: \underbrace{3}_{1} \cdot \underbrace{2}_{1} \quad \underbrace{1}_{19} = (3 \cdot 1)(2 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 19)$

$\times$

max min value: 1...15

$11: \underbrace{3}_{1} \quad \underbrace{2}_{1} \quad \underbrace{1}_{15} \Rightarrow (3 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \quad (\cdot 1 \cdot 15)$

$$(6 \cdot 19) \cdot (6 \cdot 15) = 6^2 \cdot 15 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 19 \\ \hline 135 \\ +15\ \ \\ \hline 285 \\ \times\ 36 \\ \hline 1710 \\ +855\ \ \\ \hline 10260 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 285 \\ \times\ 36 \\ \hline 1710 \\ +855\ \ \\ \hline 10260 \end{array}$$

2

б:

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = a$; $\log_{(x+1)^2}(29-x)$; $= b$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = c$

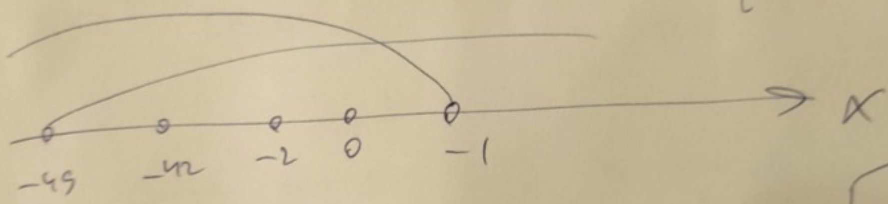
$x > -49$

$x = ?$:

$\begin{cases} a = b \\ c = 2a+1 \end{cases}$

ООЗ:

$\begin{cases} 29-x>0 \\ \sqrt{29-x} \neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7} \neq 1 \\ -x-1>0 \\ (x+1)^2 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<29 \\ x \neq 28 \\ x>-49 \\ x \neq -42 \\ x<-1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$



$x \in (-49, -1) \setminus \{-42, -2, 0\}$

$2\log_{(29-x)}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\quad \frac{1}{2}\log_{(x+1)}(29-x)$

$2\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(-x-1)$

$\boxed{\begin{matrix} \sqrt{29-x} = a \\ \sqrt{\frac{x}{7}+7} = b \\ (-x-1) = c \end{matrix}}$

$a > 1$
$c > 1$

$\log_a b^2$; $\log_{c^2} a^2$; $\log_b c$

$2\log_a b$; $\log_c a$; $\log_b c$

3

21100284 (U381794 M1295544)

$\log_a(b^2)$, $\log_{c^2} a^2$, $\log_b c$

$a = \sqrt{25-x}$

$b = \sqrt{\frac{x}{7}+7}$

$c = -(x+1)$

$x \in (-49; -1) \setminus \{-42; -2; 0\}$

1) $\begin{cases} \log_a(b^2) = \log_c a \\ \log_b c = 2\log_c a + 1 \end{cases}$

• $\log_c a \cdot \log_b c =$

$= \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a =$

$= \frac{1}{\log_a b}$

2) $\begin{cases} \log_a(b^2) = \log_b c \\ \log_c a = 2\log_b c + 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_c a = \log_b c \\ \log_a(b^2) = 2\log_b c + 1 \end{cases}$

$\log_a(b^2) \cdot \underbrace{\log_c a \cdot \log_b c}_{\frac{1}{\log_a b}} = \frac{2\log_a b}{\cancel{\log_a b}} = 2$

• произведение всегда сразу равно 2

$\log_a(b^2) \cdot \log_b(c) = (2\log^2_c a + \log_c a)$

$\frac{2}{\log_c a} = 2\log^2_c a + \log_c a$

$2 = 2\log^3_c a + \log^2_c a$

$2\log^3_c a + \log^2_c a - 2 = 0$

$2 \cdot 2 \log_a$

4

21100284 (U381794 M1295544)

$D = 169 + 4 \cdot 7 \cdot 42$

$\frac{+13 + \sqrt{1348}}{14} > x \quad +49$

$13 + \sqrt{1348} \vee 49 \cdot 14$

$\sqrt{1348} \vee \underbrace{49 \cdot 14 - 13}_{>4000}$

$28 \times 42 = 56 + 112 = 1176$

$1176 + 169 = 1348$

$95 \times 5 = 475$

$42 \times 7 = 294 \cdot 4 = 1176$

$\sqrt{1348} = 3$

9×448

$x^2 + 2x + 6 - \frac{x}{7} = 0 \,|\cdot 7$

49

$7x^2 + 14x - x - 42 = 0$

$\frac{-13 - \sqrt{1348}}{14} \wedge -1$

$7x^2 + 13x - 42 = 0$

$65 \times 5 = 325$

$-13 - \sqrt{1348} \wedge -14 \quad D = 169 + 4 \cdot 7 \cdot 42$

$\sqrt{11.76} = 3$

$1176 + 169 = 1348$

$\sqrt{1348} : 3$

$1348 \,|\, 5 = 269$

$1348 \,|\, 25 = 5$

$269 \cdot 5$

$6x \times 3$

$49 \times 14 = 196 + 49 = 686 - 13 = 673$

7

$xyz = 1$

$x^2(2x+1) = 1$

$2x^3 + x^2 - 1 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4\cdot 28}}{}$

$28 \cdot 4 = 112$

$2x^3 (x+1) x^2 = 1$

$2x^3 = -x^2 + 1$

$2x^3 - 1 = -x^2$

$-\left(\frac{7\cdot 40}{2}\right) = -140$

$-\left(\frac{7\cdot 2}{2}\right) = -7$

$29 \cdot 9 = 261$

$\begin{cases} x^2(x+1) = 1 \\ \cancel{z} \end{cases}$

$x^3 + x^2 - 1 = 0$

$\sqrt{361} = 19$

$x = y$ $\quad xyz = 1$

$z = x+1$ $\quad x^2(x+1) = 1$

$x^3 + x^2 - 1 = 0$

$x = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_{(29-x)} \sqrt{\frac{x}{7}+7} = 4 \log_{(29-x)} \sqrt{\frac{x}{7}+7}$

$y = \log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\log_{(-(x+1))}(29-x)$

$z = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-(x+1)) = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-(x+1))$

$\sqrt{361} = 19$

$29 - x = a \quad \sqrt{\frac{x}{7}+7} = b \quad -(x+1) = c$

$x = 4\log_a b$

$y = \frac{1}{2}\log_c a$

$z = \log_b c$

$xyz = 2\log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} = 2$

$x^2(x+1) = 2$

$x^3 + x^2 - 2 = 0$

$-\left(\frac{49\cdot 3 \pm 7\cdot 19}{7\cdot 21}\right)$

$49 \cdot 2 = 98$, $98 + 49 = 147$

$490 - 49 = 441$, $441 - 80 = 361$

$\frac{1}{49}(x+49)^2 = 49(29-x)$

$x^2 + 98x + 49^2 - 49\cdot 29 + 49x = 0$

$x^2 + 147x + 49\cdot 20 = 0$

$D = 49^2 \cdot 9 - 49\cdot 80 =$

$= 49(49\cdot 9 - 80) =$

$= 49\cdot 361 = (7\cdot 19)^2$

6

21100284 (U381794 M1295544)

Черновик

4:

$$НОД(a,b,c) = (a;b;c)$$
$$НОК(a,b,c) = [a,b,c]$$

НОД: $(a,b,c) = 33 = 3^1 \cdot 11^1$ $\quad a = 3 \cdot 11 \cdot k$

НОК: $[a,b,c] = 3^{19} \cdot 11^{16}$ $\quad b = 3 \cdot 11\, n$

$\quad c = 3 \cdot 11\, m$

1) Т.к. НОК$(a;b;c)$ содержит только 3 и 11 в разложении на pr.times, то и сами числа a,b,c содержать только эти pr.times

2) Т.к. НОД$(a;b;c)$ — равен $3^1 \cdot 11^1$, то каждое из чисел a,b,c имеет в своем разложении ~~хотя бы~~ ~~$3^1 11^1$~~ pr.times 3 и 11 хотя бы в 1 степени:

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}$

$b = 3^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 3^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3}$

$$НОК(a;b;c) = 3^{\max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)} \cdot 11^{\max(\beta_1;\beta_2;\beta_3)} = 3^{19} \cdot 11^{16}$$

$\begin{cases} \alpha_i \geq 1 \\ \beta_i \geq 1 \end{cases}$

1) $\alpha_1 = 19$

1.1) $\beta_1 = 16 \rightarrow$

1.2) $\beta_2 = 16$

1.3) $\beta_3 = 16$

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 = 19 & -1 \\ \beta_1 = 16 & -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 1 \dots 16 \end{cases} - 16 \\ \begin{cases} \beta_2 = 1 \dots 16 \\ \beta_3 = 1 \end{cases} - 16 \end{array}\right. \end{cases}\right\} 30$$

value:	$\overset{1}{\cancel{19}}$	$\overset{19}{(1 \dots 19)}$	$\overset{1}{1}$	$= 19$
α_i:	3	$\cdot$ 2	$\cdot$ 1	
	16	$1 \dots 16$	$1 \rightarrow 16$	
β_i:	3	2	$1 \rightarrow 6$	

$\} \Rightarrow 6 \cdot 19$

$\} \; 16 \cdot 6$

$\} \Rightarrow 6^2 \cdot 16 \cdot 19$