Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100110**

ID профиля: **872671**

Вариант 24

Задача 1 Чистовик Вариант 24

Пусть разность может быть числами d, тогда $a_1+a_2+\ldots+a_9=S$

$S = \frac{a_1+a_1+8d}{2}\cdot 9 = (a+4d)\cdot 9$. Из условия $a_5 a_{18}=(a_1+4d)(a_1+17d)>S-4$

$a_9 a_{13}=(a_1+9d)(a_1+12d)<S+60$

Рассмотрим первое условие

$a_1^2+17a_1d+4a_1d+68d^2>9a_1+36d-4$

$a_1^2+21a_1d+68d^2-9a_1-36d+4>0$

$a_1^2+(21d-9)\cdot a_1+68d^2-36d+40>0$

Аналогично из второго условия вытекает, что $a_1^2+(21d-9)a_1+109d^2-36d-60<0$

$-a_1^2-(21d-9)a_1-109d^2+36d+60>0$

Сложим условия, получается $64-40d^2>0$

Т.к d-целое легко увидеть, что $d=1$. ~~Состав.~~ Подставим в 1 уравнение

$a_1^2+12a_1+36>0$

$(a_1+6)^2>0$

$a_1\neq 6$

Подставим во второе уравнение

$a_1^2+12a_1+12<0$; $D=144-48=96$

a_1 ~~прина~~ $\in(-6-\sqrt{12}, -6+\sqrt{12})$

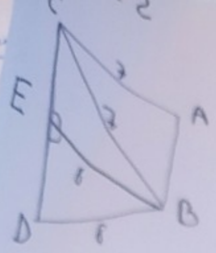
Т.к a - целое, $3<\sqrt{12}<4$, то

$a\in\{-10,-9,\ldots-2\}$

Таким образом, ответ: $a\in\{-10,-9,-8,-7,-5,-4,-3,-2\}$

(1)

Задача 2 Чистовик Вариант 24



Отметим точку E на прямой CD - основание A и B в треугольниках ACD и BCD, соответственно, очевидно, что высоты падают в одну точку и равенство треугольников ACD и BCD. Теперь заметим, что CD параллельно стороне цилиндра параллельна плоскости AEB => плоскость AEB ∥ основанию цилиндра => радиус цилиндра равен радиусу описанной около AEB = R.

Т.к. AB - хорда в этой окружности => $2R \geq AB$ => min радиус достигается, когда AB - диаметр => AEB - равнобедренный и прямоугольный => $AE = BE = 2\sqrt{2}$ => $CE = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$DE = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{64-8} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

1) △BCD - остроугольный, т.е. E принадлежит CD => $CD = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

2) △BCD - тупоугольный, т.е. E не принадлежит CD => $CD = 2\sqrt{14} - \sqrt{41}$

~~Ответ: ACD = $\sqrt{41} + 2\sqrt{14}$, если △BCD - острый, т.е. E пр~~

Ответ: 1) △BCD - острый, т.е. E принадлежит CD => $CD = \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

2) △BCD - тупоугольный, т.е. E не принадлежит CD => CD = 2

Задача 3 Чистовик Вариант 24

$$\begin{cases} x-a^2+(y-b)^2\le 10 \\ a^2+b^2\le \min(-6a-2b,10) \end{cases}$$

Второе неравенство

1.Пусть $-6a-2b\geq 10$: ~~$2a+$~~ $a^2+b^2\le \cancel{\theta}^{\min}(-6a-2b,10)$

$a^2+b^2\le 10$

Это круг с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{10}$

С учетом ~~от~~ условия от круга отрезается небольшой кусок ниже прямой

$-6a-2b=10$

~~Верхний~~ ~~-6~~

Если $-6a-2b<10$: $a^2+b^2\le -6a-2b$

$a^2+6a+9-9+b^2+2b+1-1\le 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2\le 10$

Это тоже круг с центром в точке $(-3,-1)$ и радиусом $\sqrt{10}$.. С учетом условия от круга отрезается небольшой кусок выше прямой

$-6a-2b=10$

Радиусы равны. Поэтому эти два куска образуют облас пересечения двух окружностей радиус $\sqrt{10}$ и центрами $(0;0)$ и $(-3;-1)$. Это и есть все возможные значения $(a;b)$

Первое неравенство: $x-a^2+(y-b)^2\le 10$. Решение – круг с центром a,b и таким же радиусом $\sqrt{10}$. Кроме того у нас есть всевозможные центры таких окруж из второго неравенства. Тогда если нарисовать множество окружности с центром в этой области, то мы получим все возможные решения 1 неравенства. Все ~~общества~~ множества ~~э~~этой окружности образуют элипс. Найдем его полуоси a и b. Расстояние между центрами $(0;0)$ и $(-3,-1)$ равно $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. Малая полуось: $2b=\sqrt{10+2}\cdot\sqrt{10}=3\sqrt{10}$. (Здесь расстоянию между центрами окружностей добавляются еще 2 окружности – решение первой системы.)

Большая полуось: $2a=\sqrt{10}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{10}=\sqrt{10}$

3

2

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100110**

ID профиля: **872671**

Вариант 24

Вариант 24 часть 2

Задача 4

Чистовик Вариант 24 часть 2

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=33 \\ НОК(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15} \end{cases}$

Пусть $a=3^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}$

$b=3^{\beta_1}\cdot 11^{\beta_2}$

$c=3^{\gamma_1}\cdot 11^{\gamma_2}$

Соответственно из условия на НОД равносильно

$\min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$

$\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1$

Тем самым условия на НОК

$\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=19$

$\max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=15$

Посмотрим, как можно распределить степени 3

Вариант 1. Пусть все степени различны

Соответственно у нас есть $3\cdot 2\cdot 17$ вариантов. Выбрать степень равную 1 степень, выбрать степень равную 19, а также оставшуюся в промежутке между 1 и 19

Вариант 2

Пусть какая-то степень повторяется. В общем вариантов всего $2\cdot 3$, т.к выберем повторяющуюся степень и затем место в котором ее нет

Всего получается $6\cdot 18$ вариантов.

Аналогично и для степеней тройки, подобное распределение: $6\cdot 14$.

Значит всего вариантов $6\cdot 14\cdot 6\cdot 18=9072$

1

Ответ: 9072

Задача 4

Чистовик Вариант 24 Часть 2

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;c) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$

Пусть ~~...~~ $a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

4) Черновик

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 33 \\ НОК(a;b;C) = 3^{19} \cdot 11^{15} \end{cases}$

Пусть

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$

$\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$

$\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 19$

$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 15$

1) Разл. => $3 \cdot 2 \cdot 17$

1 19

2) Один. => $2 \cdot 3$

$6 \cdot 18$ всего

$18 \times 14 = 252$

$252 \times 36 = 9072$

$6 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 18 = 36 \cdot 252 = 9072$

Ответ: 9072

5) $\log_{\sqrt{29-x}} \left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

Чистовик Вариант 24

Задача 6

Вариант 24 Часть 2

Пусть $\angle ABC = \beta \Rightarrow AOC = 2\beta \Rightarrow \angle CAT = \angle ACT = \beta \Rightarrow AT = TC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow$ T лежит на второй окружности $\Rightarrow \angle ATC =$
$\angle ABC = \angle AOC = 2\beta \Rightarrow \angle DAT = \angle ATC - \angle ABC = \beta = \angle ABC \Rightarrow \triangle ATB$ - равнобедренный
Соответств. $AT = DT$ $AT = TC \Rightarrow T$ - середина дуги $\Rightarrow$ TK - биссектриса $\Rightarrow \frac{AT}{TC} = \frac{AK}{KC} = \frac{ATK}{CTK}$

$$\frac{CAPB}{CAPC} = \frac{BP}{TC} = \frac{AB}{PC} \Rightarrow CABC = CAPB + SAPC = SAPC$$