Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100108**

ID профиля: **104191**

Вариант 24

Чистовик.

1. $S = a_1 + a_2 + \ldots a_9$

$S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$ по формуле для арифметической прогрессии

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$, где d — разность арифметической прогрессии

То есть для $n = 9$:

$$S = \frac{(2a_1 + 8d)}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d) \cdot 9 =$$
$$= 9a_1 + 36d$$

По условию:

$$\begin{cases} a_5 a_{18} > S - 4 \\ a_{10} a_{13} < S + 60 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ из (1) подставляем $a_5, a_{18}, a_{10}, a_{13}$

$$\begin{cases} (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 17d) > S - 4 \\ (a_1 + 9d) \cdot (a_1 + 12d) < S + 60 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ Подставляем S

$$\begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 17d) > 9a_1 + 36d - 4 \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases}$$

Из (2) и (3) раскрываем скобки и приводим подобные:

$$\begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} a_1^2 + a_1(21d - 9) + 4 \cdot 17d^2 - 36d + 4 > 0 \\ a_1^2 + a_1(21d - 9) + 9 \cdot 12d^2 - 36d - 60 < 0 \end{cases}$$

1

Чистовик

Домножаем (2) на (-1) обе части:

(2) $-a_1^2 - a_1(2\cdot 1d-9) - 4\cdot 17d^2 + 36d - 4 < 0$

Теперь (2) складываем с (3):

(4) $a_1^2 - a_1^2 + a_1(21d-9) - a_1(21d-9) + 9\cdot 12d^2 - 4\cdot 17d^2 + 36d - 36d - 60 - 4 < 0$

$\Updownarrow$

$40d^2 - 64 < 0$

$5d^2 < 8$

$\Updownarrow$

$-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < d < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

По условию ~~в~~ прогрессия возрастает, то есть $d > 0$, все числа прогрессии целые => d - целое

Заметим, что:

$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} > 1$, т.к. если возвести в квадрат

$\frac{8}{5} > 1$

При этом

$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \vee 2$ возводим в квадрат обе части > 0

$<$

$\frac{8}{5} < 4$

$\Downarrow$

$1 < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 2$

2

Чистовик

То есть:

$0 < d < 2$

Т.к. d - целое, $d = 1$

Тогда подставляем $d = 1$ в (2) и (3):

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1 \cdot 12 + 4 \cdot 17 - 36 + 4 > 0 & (2) \\ a_1^2 + 12a_1 + 9 \cdot 12 - 36 - 60 < 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 & (2) \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (a_1 + 6)^2 > 0 & (2) \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 & (3) \end{cases}$$

(3) $a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D = 144 - 48 = 96$

$a_{1,2} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 2\sqrt{6}$

То есть:

(4) $-6 - 2\sqrt{6} < a_1 < -6 + 2\sqrt{6}$

Из (2) следует, что $a_1 \neq -6$

В (4) подходят:

$a_1 = -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2$

Но $a_1 \neq -6 \Rightarrow a_1 = -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2$

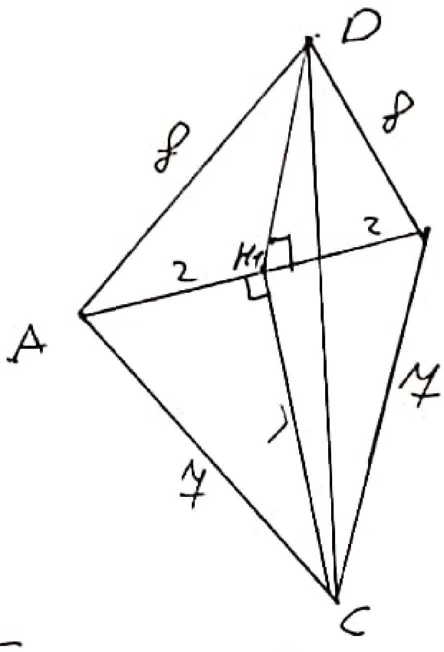
3

Ответ: $a_1 = -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2$

Сканировано с CamScanner

Чистовик

2.



В $\triangle ADB$ (равнобедренная) $AD = DB$ высота DH_1 = = медиане

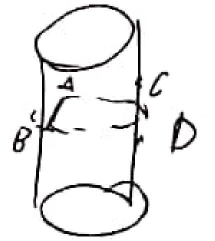
Также в равнобедренном $\triangle ACB$ CH_1 является высотой и медианой

Тогда $AH_1 = H_1B = \frac{AB}{2} = 2$

Заметим, что AB перпендикулярно плоскости DH_1C, т.к. $AB \perp CH_1$ и $AB \perp DH_1$

По условию DC лежит на образующей боковой поверхности, т.к. C, D лежат на боковой поверхности и $CD \parallel$ оси цилиндра

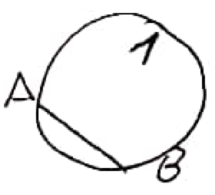
Но $CDH_1 \perp AB \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow AB$ лежит в плоскости $\perp$ оси цилиндра



Проведем сечение цилиндра этой плоскостью.

Это окружность параллельная основанию

AB – хорда.



R – радиус цилиндра

Но $AB = 4 \Rightarrow$ диаметр цилиндра $\geq AB$ (диаметр $\geq$ хорды)

$\Downarrow$

$R \geq \frac{AB}{2}$ ~~[illegible]~~

4

Чистовик

Следовательно

Наименьший $R = \frac{AB}{2} = 2$

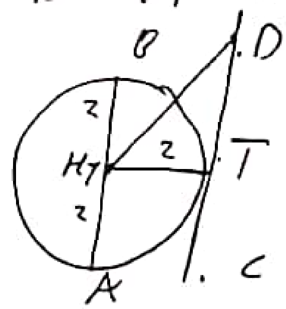
Теперь несколько случаев есть:
CD либо пересекает плоскость 1 в точке T, либо не пересекает и C ближе к D.

Но $AD > AC \Rightarrow$ D не может быть ближе к 1

1) Пусть CD пересекает плоскость 1
из прямоугольного $\triangle ADH_1$:

$DH_1 = \sqrt{64-4} = \sqrt{60}$ т. Пифагора

Т.к. $H_1T = R = 2$ (т.к. $DC \perp$ 1 плоскости и значит $DC \perp HT$), то из прямоугольного $\triangle DH_1T$:



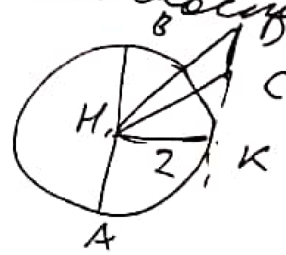
$DT = \sqrt{(\sqrt{60})^2 - 4} = \sqrt{56}$

Аналогично $TC = \sqrt{(\sqrt{45})^2 - 4} = \sqrt{41}$

И значит:

$DC = \sqrt{41} + \sqrt{56}$

2) DC не пересекает 1; C ближе к 1 плоскости



Пусть K – точка пересеч. DC прямой плоскостью 1.
Тогда из $\triangle H_1CK$:

$CK = \sqrt{(\sqrt{45})^2 - 4} = \sqrt{41}$

Из $\triangle H_1DK$:

$DK = \sqrt{60-4} = \sqrt{56}$

$DC = \sqrt{56} - \sqrt{41}$

Ответ:
$DC = \sqrt{41} + \sqrt{56}$
$DC = -\sqrt{41} + \sqrt{56}$

5

чистовик

7. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10) & (2) \end{cases}$

$\Updownarrow$

(1) из (2): $\begin{cases} a^2+b^2 \le 10 & (3) \\ a^2+b^2 \le -6a-2b & (4) \end{cases}$

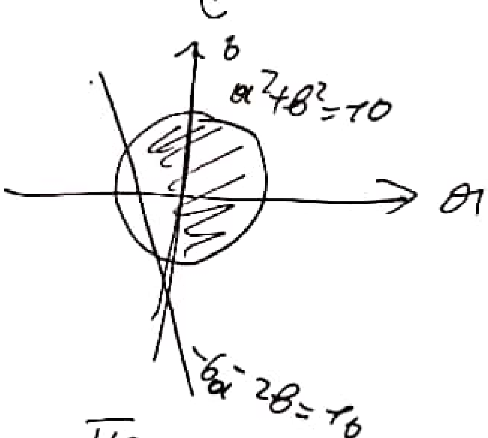
(4) $a^2+6a+9-9+b^2+2b+1-1 \le 0$

$(a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$

На координатах $a;b$ это уравнение задает

1) Предположим $-6a-2b \le 10$

$\Downarrow$



Пересечение прямой и окружности:

$\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ -6a-2b=10 \end{cases} \Rightarrow a_{1,2}=\dfrac{-3\pm 2\sqrt{3}}{2}$

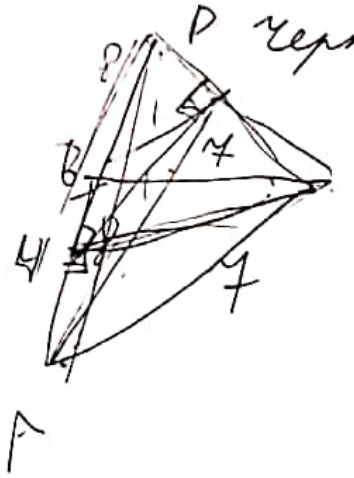
Две точки получим

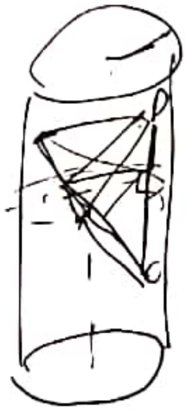
у окружности $(x-a)+(y-b)^2=0$

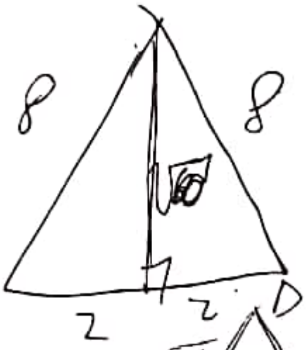
перемещается центр по заштрихованному контуру

6

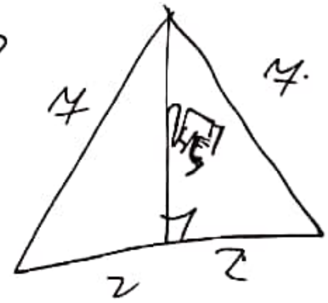
черновик

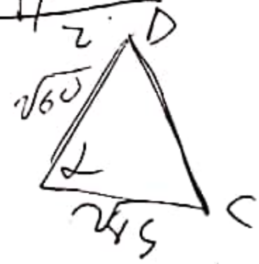


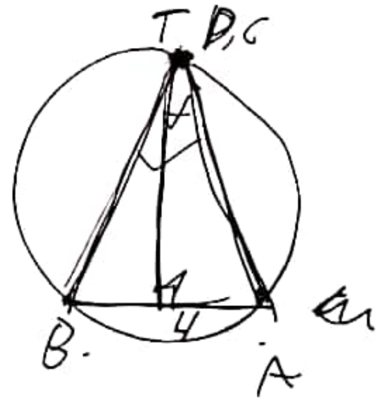


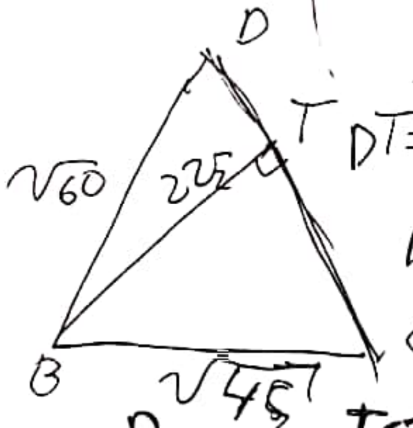


$64 - 4 = 60$









$DT^2 = 60 - 8 = 52$

$DT = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

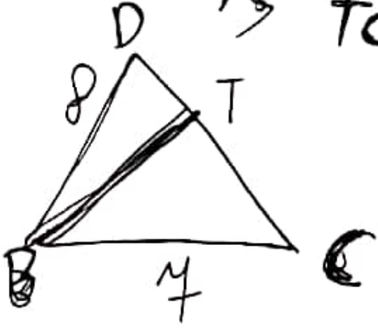
$TC^2 = 45 - 8 = 37$

$TC = \sqrt{37}$

$\frac{4}{\sin\alpha} = 2R$

$R = \min$, когда $\sin\alpha = \max$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$



$2BT^2 = 16$

$BT = 2\sqrt{2}$

Черновик

S_9. $a_5 \cdot a_{18} > S - 4$

$a_{10} a_{13} < S + 60$

$a_1 = ?$ $\quad S = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

возрас $\quad a_n = a_1 + (n-1)d$

$$S = \frac{(2a_1 + (n-1)d)\, n}{2} = \frac{(2a_1 + 8d) \cdot 9}{2} =$$

$n = 9$

$$= (a_1 + 4d) \cdot 9$$

$\frac{(2a_1 + 9d) \cdot 10}{2}$

$a_5 = \underbrace{a_1 + 4d}_{a_5}$

$\cancel{10 a_1 + 45d}$

$S = a_5 \cdot 9$ $\quad a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{18} = a_1 + 17d$

$\cancel{a_5 (a_1 + 17d)} > a_5 \cdot 9 - 4$

$$\begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > a_1 \cdot 9 + 36d - 4 \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < a_1 9 + 36d + 60 \end{cases}$$

$\frac{64}{8} = 8$

$a_1^2 + 17d a_1 + 4d a_1 + 4 \cdot 17 \cdot d^2 >$

$> a_1 9 + 36d - 4$

$a_1^2 + a_1(21d - 9) + 4 \cdot 17 d^2 - 36d + 4 > 0$

Черновик

$D = (21\alpha-9)^2 - 4\cdot 4\cdot 17\alpha^2 + 36\cdot\alpha\cdot 4 - 16\cdot 60$

$21^2\alpha^2 + 9^2 - 9\cdot 2\cdot 21\alpha$ =

$= 169\alpha^2 - 234x + 65 =$

$= 13(13\alpha^2 - 18\alpha + 5) =$

$= (\alpha - 1)\cdot 13^2\left(\alpha - \frac{5}{13}\right)$

$a_1 = \dfrac{9 - 21\alpha \pm 13\sqrt{(\alpha-1)(\alpha-\frac{5}{13})}}{}$

96 16

$a_1^2 + 12a_1 + 72$ $\dfrac{9-21\alpha-13\sqrt{\dots}}{2}$ $\dfrac{9-21\alpha+\sqrt{\dots}}{2}$

$a_1^2 + 12\alpha a_1 + 9\alpha a_1 + 9\cdot 12\alpha^2 < a_1 9 + 36\alpha + 60$

$(a_1 + 6)^2$

$a_1^2 + a_1(21\alpha - 9) + 9\cdot 12\alpha^2 - 36\alpha - 60 < 0$

$D = (21\alpha - 9)^2 - 4\cdot 9\cdot 12\alpha^2 + 36\cdot 4\cdot\alpha + 4\cdot 60$

$= 9x^2 - 234x + 321 =$

$= 3(3x^2 - 78x + 107) = 9\cdot\left(x - \frac{39+20\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(x - \frac{39-20\sqrt{3}}{3}\right)$

$a_1 = \dfrac{-21\alpha + 9 \pm 3\sqrt{\dots}}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100108**

ID профиля: **104191**

Вариант 24

Чистовик

4. Заметим, что a, b, c это числа вида $11^x \cdot 3^y$. Пусть $a = 11^{x_1} \cdot 3^{y_1}$, $b = 11^{x_2} \cdot 3^{y_2}$, $c = 11^{x_3} \cdot 3^{y_3}$. Но, чтобы НОД $= 33$, нужно, чтобы хотя бы одно $x_t = 1$ и $y_p = 1$, где t, p индексы у степени x, y. При этом аналогично, чтобы НОК $= 3^{19} \cdot 11^{15}$, нужно, чтобы хотя бы один $x_{t_1} = 15$, хотя бы один $y_{p_1} = 19$.

1) $x_t = 1$ можно выбрать 3 способами из x_1, x_2, x_3. Из оставшихся x выбираем $x_{t_1} = 15$ 2 способами.

При этом у нас осталось только одно число из x_1, x_2, x_3, которое принимает значение от 1 до 15 (если оно больше 15, то НОК $\neq 3^{19} \cdot 11^{15}$)

То есть тут способов $= 3 \cdot 2 \cdot 15 = 90$

2) Теперь для y:

Аналогично $y_p = 1$ можно выбрать 3 способами; y_{p_1} из оставшихся 2 способами. Последний y_f из y_1, y_2, y_3 может быть от 1 до 19, иначе НОК $\neq 3^{19} \cdot 11^{15}$

1

Чистовик

То есть здесь способов:

$3 \cdot 2 \cdot 19 = 114$ способов, т.к. все эти значения выбраны независимо.

3) Но y и x мы выбирали независимо

⇓

[redacted] надо перемножить каждый способ ~~выбрать~~ x и y:

$114 \cdot 90$

Но есть пересечения (тройки чисел, которые я посчитал 2 раза)

4) Тройки, в которых два числа $x = 1$ и 15, а последнее: $x \in [2; 14]$, то есть 13 чисел, при этом все 3 числа y равны либо 1, либо 19 я посчитал 2 раза.

выбрать эти тройки можно $= (3 \cdot 2 \cdot 13) \cdot 3 \cdot 2$ способами. Т.к. $3 \cdot 2 \cdot 13$ это выбор x; выбор y: $3 \cdot 2$

5) Аналогично тройки чисел, где два числа y равны 1 и 19, а третье, последнее число $y \in [2; 18]$, то есть 17 чисел. При этом все 3 числа x равны либо 1, либо 15 также попадаются по 2 раза

Чистовик

~~Изначально~~ Для этого случая выбираем ~~...~~ Y: $\cancel{16}^{17} \cdot 3 \cdot 2$ способами.

А для X: $3 \cdot 2 = 6$ способов

То есть:

$6 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 2$ способов

б) Есть тройки чисел, где ~~...~~ все x_t равны 1 или 15 ~~...~~ или две 1, одна 15 или наоборот. ~~...~~ и все y_p равны 1 или ~~...~~ 19 (или две 1, одна 19 или наоборот) их можно выбрать:

$$\underbrace{3 \cdot 2}_{\text{выбор } x_t} \cdot \underbrace{3 \cdot 2}_{\text{выбор } y_p} \text{ способами}$$

~~...~~ Каждую такую тройку я посчитал 4 раза

То есть всего способов (минус пересечения):

$114 \cdot 90 - 3 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot \cancel{...} \cdot 6 \cdot 17 - 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 =$

$= 10260 - 468 - 612 - 108 = 9072$

Ответ: 9072 способа

Чистовик

5. ООФ:

$$\begin{cases} 29-x>0 \\ 29-x\neq 1 \\ \frac{x}{7}+7>0 \\ \frac{x}{7}+7\neq 1 \\ x\neq -1 \\ -x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -49,\ -42,\ -1 \ \ x$$

Решение.

Пусть $u_1 = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

То есть $u_1 = 2\log_a b$

$v_1 = \log_{(x+1)^2}(29-x) = \frac{1}{2}\log_{|x+1|}(29-x)$

по одз $|x+1|$ превращается $-x-1$ $\Rightarrow$

$v_1 = \frac{1}{2}\log_c(29-x)$

$w_1 = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2\log_b(c)$

Заметим, что

(1) $v_1\cdot u_1\cdot w_1 = 2\log_a b\cdot\log_c a\cdot\log_b c = 2$

4

Чистовик

1) Пусть теперь $u_1 = v_1$, $v_1 = u+1$

из (1):

$$u_1 \cdot u_1 \cdot (u_1+1) = 2$$

$$u_1^3 + u_1^2 - 2 = 0$$

Заметим, что $u_1 = 1$ подходит.

Тогда по т. Безу $u_1^3+u_1^2-2 \vdots (u_1-1)$

$$\begin{array}{l|l} u_1^3+u_1^2-2 & u_1-1 \\ \underline{-\,u_1^3-u_1^2} & u_1^2+2u_1+2 \\ \quad 2u_1^2-2 & \\ \quad \underline{-\,2u_1^2-2u_1} & \\ \qquad 2u_1-2 & \\ \qquad \underline{-\,2u_1-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$u_1^2+2u_1+2=0$$

$$D = 4-8<0$$

$\Downarrow$ нет корней

То есть единственный корень $u_1 = 1$

~~$\log$ ...~~

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = 1 = \log_{\sqrt{29-x}}\sqrt{29-x}$$

$$\frac{x}{7}+7 = \sqrt{29-x} \quad \uparrow \text{возводим в квадрат}$$

$$\frac{x^2}{49} + \cancel{49}_{20} + 2x = \cancel{29}-x$$

$$\frac{x^2}{49}+3x+20=0$$

$$x_1 = -140;\ x_2 = -7$$

$x_1 = -140$ не подходит по ООФ

5

Чистовик

2) Абсолютно аналогично получаем

$v_1 = 1$ или $w_1 = 1$

Тогда:

$$\log_{(x+1)^2}(29-x) = 1 = \log_{(x+1)^2}(x+1)^2$$

$$(x+1)^2 = 29-x$$

$$x^2+2x+1 = 29-x$$

$$x^2+3x-28=0$$

$x_1=-7$ или $x_2=4$

по ООФ не подходит

$\cancel{w_1=1}$

$$\cancel{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 1 = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\sqrt{\frac{x}{7}+7}}$$

$$\cancel{-x-1 = \sqrt{\frac{x}{7}+7}}$$

$$\cancel{x^2+2x+1 = \frac{x}{7}+7}$$

$$\cancel{x^2+x\left(2-\frac{1}{7}\right)-6=0}$$

$\cancel{w_1=1:}$

$$\cancel{-x-1=\sqrt{\frac{x}{7}+7}}$$

$$\cancel{x^2+2x+1 = \frac{x}{7}+7}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 1 = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\sqrt{\frac{x}{7}+7}$$

$$x^2+2x+1 = \frac{x}{7}+7$$

$$x^2+x\left(2-\frac{1}{7}\right)-6=0$$

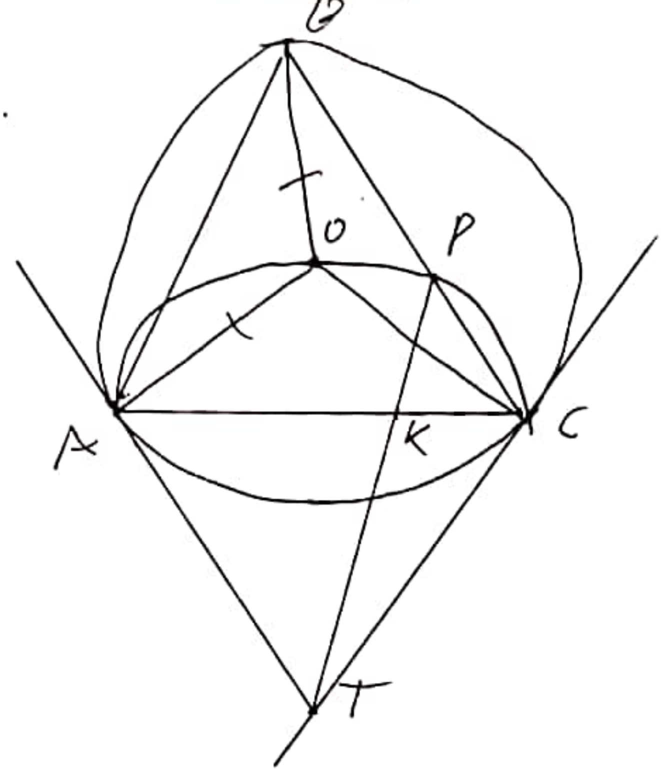
Не подходят x

$x=-7$ только

6 Ответ: $x=-7$

Черновик

6.



Отрезки касательной к окружности, проведенные из т.1 равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окруж.

Пусть $\angle ATO = \alpha = \angle OTC$

$OA \perp AT$, $OC \perp TC$

$\angle AOT = 90^\circ - \alpha$ из $\triangle AOT$

$AO = OC$ = радиус окруж.

$\angle OAC = \angle OCA = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \alpha$

$\angle OAT = 90^\circ = 2\alpha$

$\Downarrow$ $\alpha = 45^\circ$

$\triangle AMO$ – прямоугольный, т.к. $\angle AMO = 180^\circ - \angle OAM - \angle AOM = 90^\circ$

Аналогично $\triangle OMC$ прямоугольный

$\Downarrow$

$OT \perp AC$

$S_{APK} = PK \cdot AK \cdot \sin B = \cancel{12}\ 16$

$S_{CPK} = PK \cdot KC \cdot \sin B = 14$

$PK \cdot \sin B = \frac{16}{AK}$

$PK \cdot \sin B = \frac{14}{KC} \Rightarrow \frac{16}{AK} = \frac{14}{KC} \Rightarrow$

$KC = \frac{7}{8} AK$

$\triangle AOT$ и $\triangle OCT$ равнобедренные

$\Downarrow$

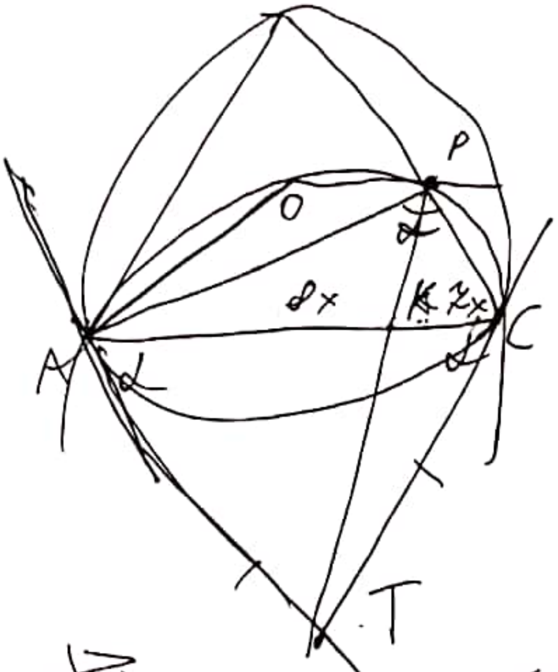
$OA = OC = AT = TC = R$

$\Downarrow$

$AOCT$ – квадрат со стороной радиуса

7

в Черновик



$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

$S_{ABC} = ?$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$$

Черновик

4. $\text{нод}(a; b; c) = 33$

$\text{нок}(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$

$\text{нод} \cdot \text{нок} = a \cdot b \cdot c$

$33 \cdot 3^{19} \cdot 11^{15} = a \cdot b \cdot c$

$3^{20} \cdot 11^{16} = a \cdot b \cdot c$

3

a 3^{20}

5. Пусть $^2\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \frac{1}{2}\log_{(x+1)}{}^2(29-x)$

ООФ.

$29 \geq x$

$x \neq 28$

$x \geq -49$

$x < 29$

$x \neq -7$

$\frac{4 \cdot \log_{(x+1)}\left(\frac{x}{7}+7\right)}{\log_{(x+1)}(29-x)} = \log_{x+1}{}^2(29-x)$

$4\log_{(x+1)}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \left(\log_{(x+1)}(29-x)\right)^2$

$\log\left(\frac{x}{7}+7\right)^4 =$

$29-x+29-x$

$\frac{1}{2}\log_{(x+1)}{}^2(29-x) = {}^2\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-7)$

$\frac{\log_{\left(\frac{x}{7}+7\right)}(29-x)}{\log_{\frac{x}{7}+7}(x+1)}$