Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100094**

ID профиля: **154080**

Вариант 24

Чистовик

№1

Пусть a_1 - первый член, а d разность прогрессии.
По условию $a_i \in Z \Rightarrow d \in Z$, но последовательность
a_n - возрастающая, зн $d>0 \to d \geq 1$.

$\begin{cases} a_5 a_{18} > S-4 \\ a_{10} a_{13} < S+6 \end{cases}$ $a_5 = a_{10} - 5d$
$a_{18} = a_{13} + 5d$

$(a_{10}-5d)(a_{13}+5d) > S-4$

$a_{10} a_{13} - 5d a_{13} + 5d a_{10} - 25d^2 > S-4$

$a_{10} a_{13} - 5d(a_{13}-a_{10}) - 25d^2 > S-4$

$a_{10} \cdot a_{13} - 5d \cdot 3d - 25d^2 > S-4$

$a_{10} a_{13} > S-4+40d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S-4+40d^2 < a_{10} a_{13} < S+60$

$\cancel{S}-4+40d^2 < \cancel{S}+60$

$40d^2 < 64 \Rightarrow d < \frac{8}{\sqrt{40}} = \frac{4}{\sqrt{10}} < 2 \to$

$\to d \geq 1$ и $d < 2 >$ единственное $\boxed{d=1}$

$a_5 = a_1+4d = a_1+4$ $a_{10} = a_1+9d = a_1+9$
$a_{18} = a_1+17d = a_1+17$ $a_{13} = a_1+12d = a_1+12$

$S = a_1 + .. + a_9 = \frac{(a_1+a_9)9}{2} = \frac{(a_1+a_1+8d)9}{2} = \frac{2(a_1+4d)\cdot 9}{2} =$
$= 9a_1+36$

21100094 (U154080 M1302490)

Тогда: Чистовик

$$\begin{cases}(a_1+4)(a_1+17) > 9a_1+36-4 \quad (1)\\ (a_1+9)(a_1+12) < 9a_1+36+60 \quad (2)\end{cases}$$

(1) $a_1{}^2+4a_1+17a_1 \; 9a_1+68-36+4>0$

$a_1{}^2+12a_1+36>0$

$(a_1+6)^2>0 \Rightarrow a_1 \in R/\{-6\}$

(2) $a_1{}^2+\cancel{9a_1}+12a_1-\cancel{9a_1}+108-96>0$

$a_1{}^2+12a_1+12>0$

$(a_1{}^2+12a_1+36)+12-36>0$

$(a_1+6)^2-24>0$

$(a_1+6-\sqrt{24})(a_1+6+\sqrt{24})>0 \Rightarrow a_1 \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24})$.

$-6 \; \sqrt{24} > -6-\sqrt{25} = -11$ (но $6-\sqrt{24} > 6-\sqrt{16} = -10$)

$-6+\sqrt{24} < 6+\sqrt{25} = 1$ (но $-6+\sqrt{24} > -6+\sqrt{10} = -2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \in [-10; -2]$ (с учётом целости a_1)

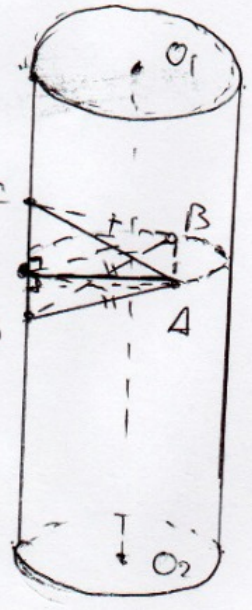
Тогда из (1) $a_1 \neq -6$, получаем множество возможных a_1: $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$

$\boxed{\text{Ответ: } a_1 \in \{-10; -9, 8; -7, -5; -4, 3; -2\}}$

21100094 (U154080 M1302490)

№2 Чистовик

Пусть O_1O_2 ось цилиндра



$CA = CB = 8$; $DA = DB = 8$, зн

$\triangle CBD$ $\triangle CAD$ ($CA = CB$; $DA = DB$, и CD - общ) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ проведем AX - высота в $\triangle CAD$, тогда

BX - тоже высота в $\triangle BCD$, т.к

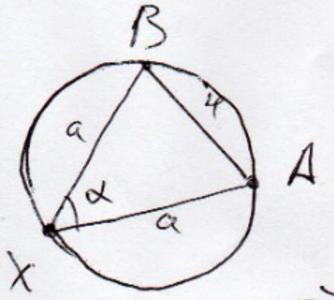
$\angle DAX = \angle DBX$, и $AD = BD$ $\Rightarrow$ $AX = BX$ $\Rightarrow$ $\triangle DAX = \triangle BDX$ $\Rightarrow$

$\rightarrow$ BX - высота, тогда ~~(XBA)~~ $CD \perp (XBA)$

но $CD \parallel O_1O_2$ $\rightarrow$ $O_1O_2 \perp (XBA)$ $\Rightarrow$

$\rightarrow$ (XBA) высекает круг, радиусом R цилиндра

Посмотрим на $\triangle XBA$ сверху:



Пусть $XB = XA = a$, $AB = 4$, $\angle BXA = \alpha$, тогда по теор косинусов:

$$a^2 + a^2 - 2a^2\cos\alpha = 16$$

$$\cos\alpha = \frac{2a^2 - 16}{2a^2} = 1 - \frac{8}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 1 + \frac{16}{a^2} - \frac{64}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{a^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{a^2}} = \frac{4}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$$

по теор синусов: $2R = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{4}{\frac{4}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2-4}}{a}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-4}}$

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-4}} = \frac{a^2 - 4 + 4}{2\sqrt{a^2-4}} = \frac{a^2-4}{2\sqrt{a^2-4}} + \frac{4}{2\sqrt{a^2-4}} = \frac{\sqrt{a^2-4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{a^2-4}} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2-4}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2-4}}} = 2$$ (по неравенству Коши.

условие, при котором $R = 2$ достигается

$$\frac{\sqrt{a^2-4}}{2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-4}} \Rightarrow a^2 - 4 = 4$$

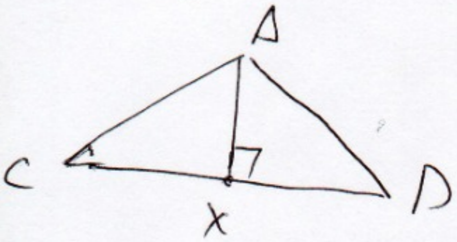
$$a = 2\sqrt{2}$$

$\boxed{3}$

21100094 (U154080 M1302490)

Чистовик.

Тогда в $\triangle CAD$



$AC = 7$
$AD = 8$
$AX = 2\sqrt{2}$

$CX = \sqrt{AC^2\ AX^2} - \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$DX = \sqrt{AD^2 - AX^2} = \sqrt{64-8} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD - \sqrt{41} + 2\sqrt{14}$

Ответ: $CD - 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$

Шистовак

N 3

Пусть $a = x_0$ и $b = y_0$ множество центров окружностей на плоскости радиусом $\sqrt{10}$

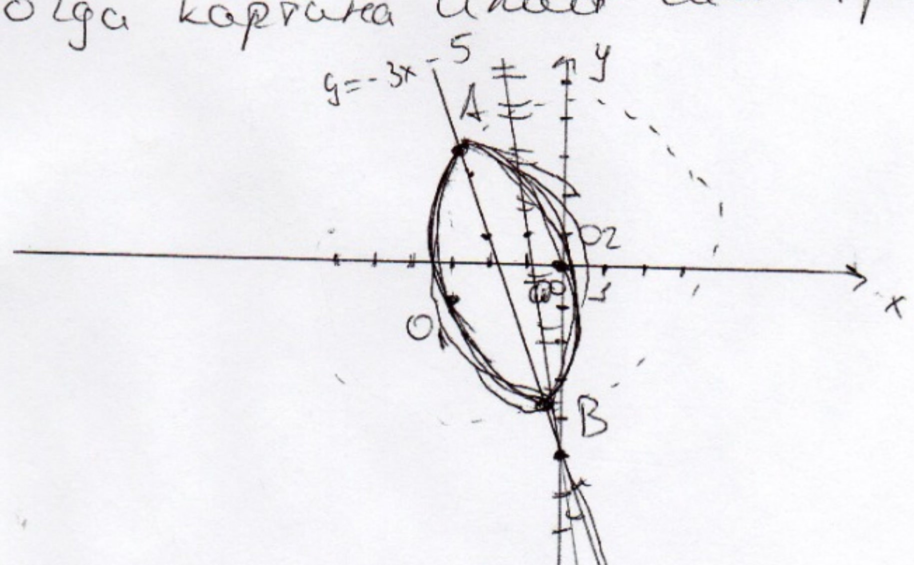
Тогда пусть $-6x_0\ 2y_0 < 10$ >

$\rightarrow \begin{cases} y_0 > \quad 3x_0 - 5 \text{ — ур прямой} \\ x_0^2 + y_0^2 + 6x_0 + 2y_0 \le 0 \quad \text{ур окр} \end{cases}$

$\begin{cases} y_0 \ge -3x_0 - 5 \\ (x_0+3)^2 + (y_0+1)^2 < 10 \end{cases}$ или ~~если~~ $\begin{cases} y_0 \le 3x_0 - 5 \\ x_0^2 + y_0^2 < 10 \end{cases}$

Получим две части окр с центрами в $(3; -1)$ и $(0; 0)$, тогда прямая, соед их центры имеет вид $y - \frac{1}{3}x$, тогда прямая $y = -3x - 5$, перпендикулярна ей и $\frac{1}{3}x \quad -3x - 5 \Rightarrow \frac{10}{3}x = -5 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ пересекает отрезок O_1O_2 $(O_1(-3;-1), O_2(0,0))$ в середине (точка $X(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})) \rightarrow y = -3x - 5$ — сер пер к отрезку O_1O_2

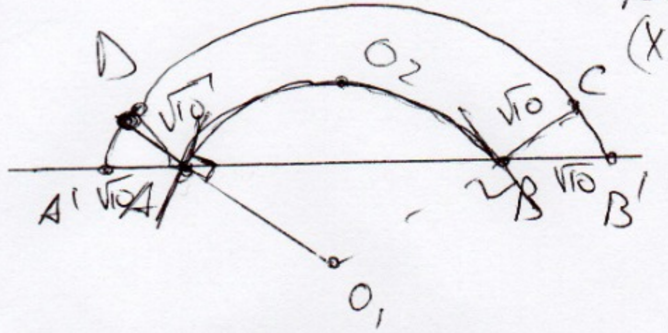
Тогда картина имеет симметричный вид:



21100094 (U154080 M1302490)

$\boxed{5}$

Чистовик



Рассмотрим только одну часть: множество центров, а множество $(x;y)$ можно сделать так: в каждой точке провести касат и продлить от центра O_1 на $\sqrt{10}$ по перпендикуляру в точке касания в точках A и B провести еще пересечение с прямой AB в точках A' и B' так, что $AA' = \sqrt{10}$ и $BB' = \sqrt{10}$

Тогда половина площади M, это S сектора DO_1C + S сектора $A'AD$ и S сектора CBB' (которые равны)

подставим ур прямой $y = -3x - 5$ в ур окружности $x^2 + y^2 = 10$

$x^2 + 9x^2 + 30x + 25 = 10$

$10x^2 + 30x + 15 = 0$

$2x^2 + 6x + 3 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12 = 4 \cdot 3$

$x = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_A = \dfrac{-3 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_A = \dfrac{3\sqrt{3} - 1}{2}$

$x_B = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} \qquad y_B = \dfrac{-3\sqrt{3} - 1}{2}$

Тогда $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{30} \Rightarrow \angle AO_1B = 120^\circ$

$a_1 - -10$

$a_5 = 6$

$a_{18} = 7$

$a_{10} - \cancel{1}$

$a_{13} - 2$

$-42 > 58$

$-2 < 6$

$-90 + 36 = 54$

$a_1 = -2$ $S_5 = \cancel{8}^{-18} + 36 = 18$

$a_5 = 2$

$a_{15} = 15$

$30 > 14$ $a_{10} = \cancel{7}8$

$a_1 - 11$

$a_5 = -7$

$a_{15} = 6$

$S_9 = -99 + 36 = 63$ $a_{13} = 10$

$\cancel{2 > 3}$

$\cancel{88} < 70 < \cancel{78}$

$a_1 = -1$

$a_5 = 3$ $S_9 = -9 + 36 = 27$

$a_{18} = 16$

$48 > 23$

$a_{10} = 8$

$a_{13} = 11$ $\cancel{88 > 83}$

$a_1 \in \{-10; -9; 8, -7, \cancel{6}, 5, 4; -3; 2\}$

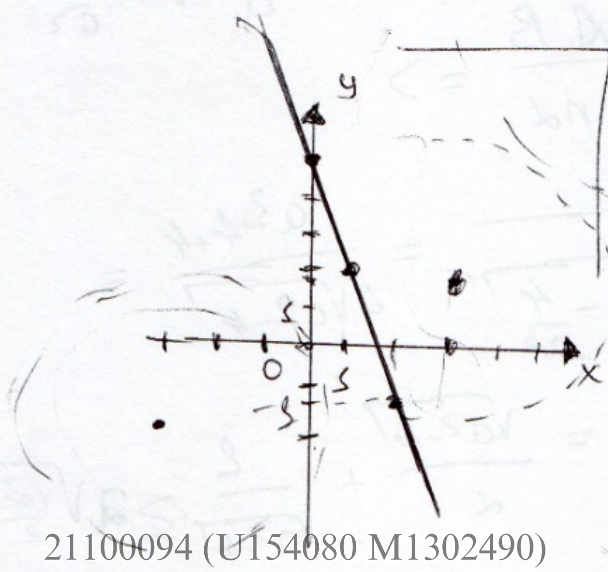
$a^2 + 6^2 \leq -6a - 26$

$a^2 + 6a + 9 + 6^2 + 26 + 4 < \sqrt{13}$

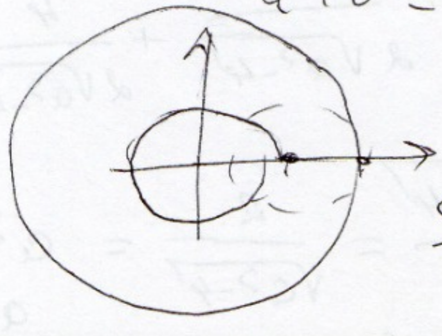
$(a+3)^2 + (6+2)^2 \leq \sqrt{13}$

$-6a - 26 \geq 10$

$6 \geq 3a + 5$



$a^2 + 6^2 \leq 10$

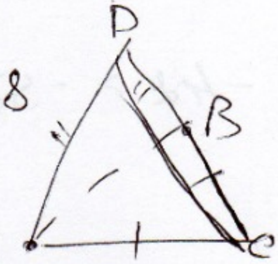


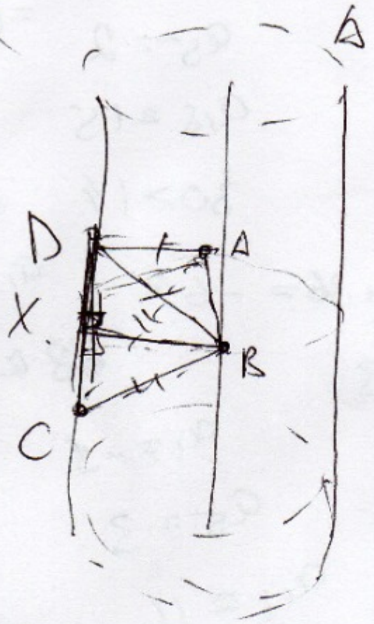
$R - 20$

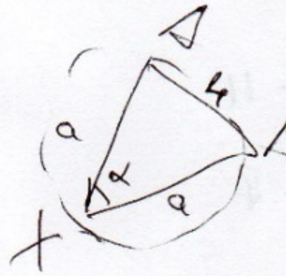
$S = \pi r^2$

$= \boxed{400\pi}$

$a_1=-6 \quad S=-54+36=-18$







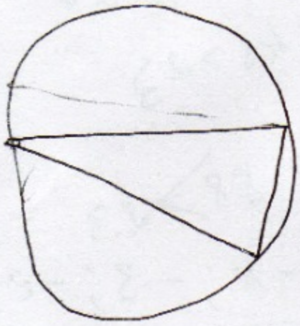
$a^2+a^2-2\cos\alpha\, a^2=16$

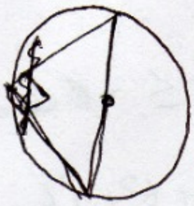
$\cos\alpha=\frac{2a^2-16}{2a^2}=1-\frac{8}{a^2}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}=$

$=\sqrt{1-\left(1-\frac{8}{a^2}\right)^2}=\sqrt{1-1+\frac{16}{a^2}-\frac{64}{a^4}}=$

$=\sqrt{\frac{16}{a^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}=\frac{4}{a}\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}$





$a=2\sqrt{2}$

$2R=\frac{AB}{\sin\alpha} \to$

$DX=\sqrt{64-8}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$ $\quad R=\frac{4}{2\cdot\frac{4}{a}\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}}=\frac{a^2-4+4}{2\sqrt{a^2-4}}=$

$XC=\sqrt{49-8}=\sqrt{41}$

$DC=2\sqrt{14}+\sqrt{41}$

$=\frac{a^2-4}{2\sqrt{a^2-4}}+\frac{4}{2\sqrt{a^2-4}}=\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{a^2-4}}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2-4}}}=2$

$\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}=\frac{2}{\sqrt{a^2-4}} \quad a^2-4=4$

$a^2=8 \quad a=2\sqrt{2}$

$27 \cdot 4 = 108$

21100094 (U154080 M1302490)

$(a_1+9)(a_1+12) < 9a_1+36+60$ $\quad (a_1+6)^2-24<0$

$a_1^2+21a_1+108 < 9a_1+96$ $\quad (a_1+6-2\sqrt{6})(a_1+6+2\sqrt{6})<0$

$a_1^2+12a_1+32<0$ $\quad 48$

$-6-2\sqrt{6} \quad -6+2\sqrt{6}$

$(a_1+4)(a_1+8)<0$

$$\begin{array}{r} 63 \\ -36 \\ \hline 27 \end{array}$$

$\begin{cases} a_1 \in (-8;-4) \\ a_1 \in (-\infty;-6)\cup(-6;+\infty) \end{cases} \Rightarrow a_1 \in (-8;-6)$, с учетом $a_1 \in Z \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=-7 \\ a_1=-5 \end{array}\right.$

$-7, \quad 6, \quad -5$ $\quad S_9 \quad 9a_1+36=-27$

$-8 \; -7 \; -6 \; -5 \; -4$

6

$a_5=-7+4=-3$

$-30 \cancel{<} 31$

$a_{18}=-7+17=10$ $\quad a_1=-5 \quad S_9=-45+36=-9$

$a_{10}=-7+9=2$ $\quad a_5=-1$

$a_{13}=-7+12=5$ $\quad a_{18}=-5+17=12$

$10 < 27+60=\boxed{133}$ $\quad -12>-13$

$a_{10}=-5+9=4$

$a_{13}=-5+12=7$

$26 < -9+60$ $\quad S=0$

$a_{10}=5 \quad a_{13}=8$

$-9< -6-2\sqrt{6} < -8$

$40<$

$8 < \sqrt{24}$

$a \in \{10;\ 9;\ -8,\ -7;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2\}$

$=\sqrt{25}$. $\quad \sqrt{25} > \sqrt{24}-5$

$-6+2\sqrt{6}$

$-\sqrt{24} > -\sqrt{25}$

$-6 \quad \sqrt{24} < -6\sqrt{25}$

21100094 (U154080 M1302490)

$-6-\sqrt{24} > 6-5=-11$ $\quad < -1$

$a_5 = a_1+4d$ $\quad a_{10} = a_1+9d$ $\quad x_0^2+y_0^2 < \min(6x_0-2y_0, 10)$

$a_{18} = a_1+17d$ $\quad a_{13} = a_1+12d$ $\quad$ пусть $-6x_0-2y_0 \le 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0^2+y_0^2 < 6x_0+2y_0 \Leftrightarrow$

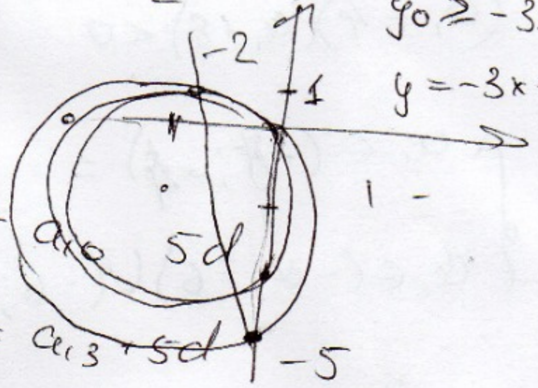
$\Leftrightarrow (x_0+3)^2+(y_0+2)^2 \le \sqrt{13}$

$S = a_1+a_2+\dots+a_9 = \frac{(a_1+a_9)\cdot 9}{2}$ $\quad \frac{(a_1+a_1+8d)9}{2} =$

$= 9a_1+36d$

$y_0 \ge -3x_0-5$

$y = -3x-5$



$a_5 a_{18} \ge 9a_1+36d-4$

$a_5 = a_{10} - 5d$

$a_{10} a_{13} < 9a_1+36d+60$

$a_{18} = a_{13}+5d$

$a_5 a_{18} = (a_{10}-5d)(a_{13}+5d) =$

$= a_{10}a_{13} - 5d\underbrace{(a_{13}-a_{10})}_{3d} - 25d^2 > S-4$

$S+60 - 40d^2 > a_{10}a_{13} - 15d^2 - 25d^2 > S-4$

$\times \begin{array}{r} 17 \\ 4 \\ \hline 28 \\ 40 \\ \hline 68 \end{array}$

$S+60-40d^2 > S-4$

$40d^2 < 64$

$10d^2 <$

$2\sqrt{10}d < 8$

$(a_1+4)(a_1+17) > S-4$

$\sqrt{10}d < 4 = \sqrt{16}$

$a_1^2+21a_1+68 > 9a_1+\overbrace{36-4}^{32}$

$d < \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{10}} < 2$

$a_1^2+12a_1+36 > 0$

$d < 2$

$(a_1+6)^2 > 0$

$a_1 \in (-\infty; -6) \cup (-6; \infty)$ $\quad d \ge 1 \Rightarrow d = 1$

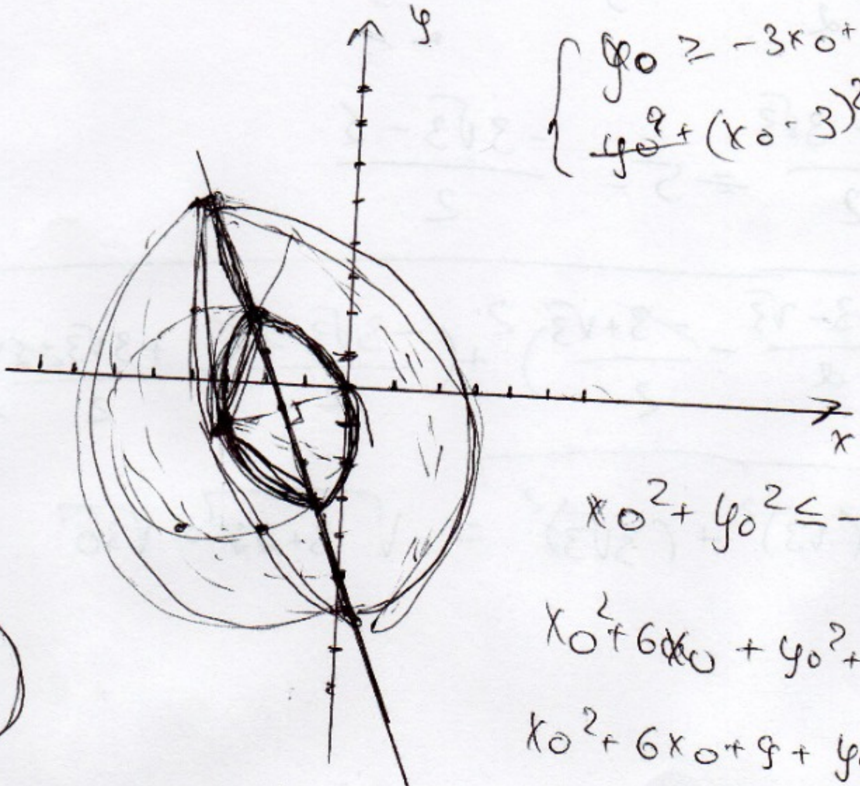
(т.к. $d \in \mathbb{N}$)

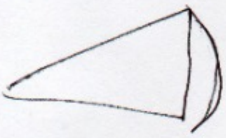
$\begin{cases} a_1 \ne -6 \\ \end{cases}$

21100094 (U154080 M1302490)

$$x_0^2+y_0^2\le 10$$

$$\begin{cases} y_0 \ge -3x_0+5 \\ \cancel{y_0^2+}(x_0+3)^2+(y_0-1)^2 \le \sqrt{10} \end{cases}$$





$$x_0^2+y_0^2\le -6x_0 \; 2y_0 \le 10$$

$$x_0^2+6x_0+y_0^2+2y_0\le 0$$

$$x_0^2+6x_0+9+y_0^2+2y_0+1\le 10$$

$$(x_0+3)^2+(y_0+1)^2\le 10$$

$$y=\frac{1}{3}x=-3x+5$$

$$\frac{10}{3}x=5$$

$$x \quad \frac{15}{10}-\frac{3}{2}$$

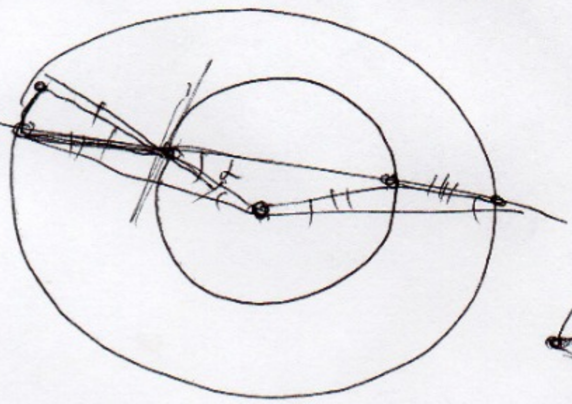
$$y=-3x \quad 5$$

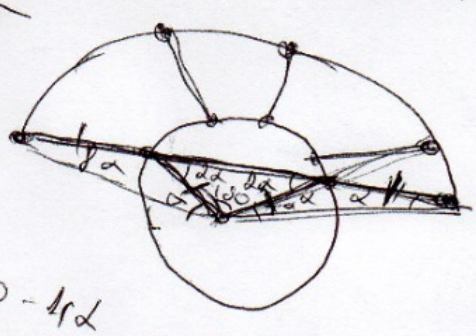
$$x^2+y^2=10$$

$$x^2+9x^2+30x+25=10$$

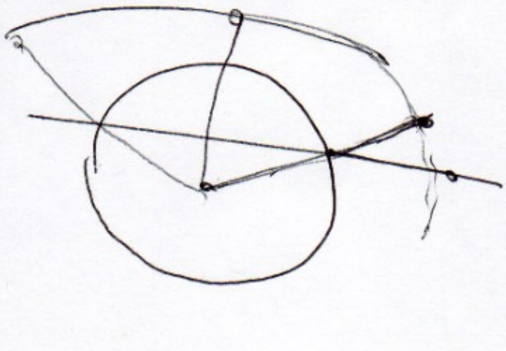
$$10x^2+30x+15=0$$

$$2x^2+6x+3=0$$





$180-4\alpha$



$$\frac{+9+3\sqrt{3}}{2} \quad -5- \quad \frac{3\sqrt{3}\quad 5}{2}$$

$$\frac{+9-3\sqrt{3}}{2} = 5 \quad \frac{-3\sqrt{3}-5}{2}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{\cancel{3}-\sqrt{3}}{2} - \frac{-\cancel{3}+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3\sqrt{3}\cancel{-5}}{2} - \frac{+3\sqrt{3}\cancel{-5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+27} \quad \sqrt{30}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100094**

ID профиля: **154080**

Вариант 24

Чистовик

№5

есть числа $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

заметим, что $-x-1>0 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = -x-1$

Перемножим числа:

$$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) =$$

$$= \frac{\log_2\left(\sqrt{\frac{x}{7}+7}\right)^2\cdot\log_2\left(\sqrt{29-x}\right)^2\cdot\log_2(-x-1)}{\log_2\sqrt{29-x}\cdot\log_2(-x-1)^2\cdot\log_2\sqrt{\frac{x}{7}+7}} =$$

$$= \frac{2\cdot\cancel{\log_2\sqrt{\frac{x}{7}+7}}\cdot 2\cdot\cancel{\log_2\sqrt{29-x}}\ \cancel{\log_2(-x-1)}}{\cancel{\log_2\sqrt{29-x}}\cdot 2\cdot\cancel{\log_2(-x-1)}\ \cancel{\log_2\sqrt{\frac{x}{7}+7}}} = 2$$

То есть, есть числа a, a и $a+1$, произведение которых равно 2.

$$a^2(a+1) = 2 \qquad a^3 - 1 + a^2 - 1 = 0$$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0 \Rightarrow a = 1$ — единственный корень

Пусть $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) = 2 \Leftrightarrow -x-1 = \frac{x}{7}+7 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{8x}{7} = 8 \Rightarrow x = -7$

Проверка: $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) = \log_{\sqrt{36}}(6) = 1$

$\log_{(x+1)^2}(29-x) = \log_{6^2}36 = 1$

Зн $x = -7$ — подходит

21100094 (U154080 M1302491)

Чистовик

Пусть $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2 \Leftrightarrow \frac{x}{7}+7=29-x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{7}x=22 \Rightarrow x=\frac{77}{4}$

тогда $\log_{(x+1)^2}(29-x)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=29-x \Rightarrow x^2+3x-28=0$

$(x+7)(x-4)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=4 \end{array}\right.$, но $x=\frac{77}{4}\neq-7$ и $x=\frac{77}{4}\neq4 \Rightarrow$ нет решений

Пусть $\log_{(x+1)^2}(29-x)=2 \Leftrightarrow 29-x=(x+1)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{29-x}=(x+1)^2$, тогда $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{7}+7=\sqrt{29-x}=x^2+2x+1$

$x^2+\frac{13}{7}x-6=0 \quad | \cdot 7$

$7x^2+13x-42=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D=169+4\cdot42\cdot7=169+1176=1345$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-13+\sqrt{1345}}{14} \\ x=\frac{-13-\sqrt{1345}}{14} \end{array}\right.$, но $x<-1$, а $\frac{13+\sqrt{1345}}{14}>0$

$\frac{-13-\sqrt{1345}}{14} > \frac{-13-\sqrt{1369}}{14}=\frac{-13-17}{14}$ $\quad \frac{50}{14}\approx3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^4<(3+1)^4=16$, а $29-x>32$, зн нет решений.

Ответ: $\boxed{x=-7}$

21100094 (U154080 M1302491)

№4 Чистовик

$\begin{cases} НОД(a, b, c) \ 33 \\ НОК(a; b; c) - 3^{19} 11^{15} \end{cases}$

тогда $a = n\,33$ $b = k\,33$ $c - m\,33$, при этом и n и k и m - состоят только из 3 и 11

$НОК(a; b; c) - 3^{19} 11^{15}$

$НОК(n, k, m) - 3^{18} \cdot 11^{14}$

пусть $m = 1$ тогда $НОК(n, k) - 3^{18} 11^{14}$

если $n - 3^{18} 11^{14}$, то $k = 3^{\alpha} 11^{\beta}$, где $\alpha \le 18$, $\beta \le 14$

вариантов всего ~~18 14~~ 19 15 ($\alpha = 0$ и $\beta = 0$)

если n $3^{18} 11^{\beta}$, то $k - 11^{14} 3^{\alpha}$, где $\beta < 14$ $\alpha \le 18$ =>

=> вариантов всего 19·15 (но вар $3^{18} 11^{14}$ - уже посчитали)

в силу симметрии осталось еще 2 18 14 вар

Тогда общее число (4 19 15 - 3)

в силу симметрии n, k и m, (вар. где одно из чисел 1 равно 3(4 19 15 - 3)

если ни одно из чисел не равно 1 (из m, n, k):

то среди n, m, k есть ровно одно число, имеющее только 3^{18} и ровно одно только 11^{14} (иначе, если есть делители 3 в трех числах, то $НОД(m, n, k) \ne 1$)

тройки есть в двух числах и 11 есть только в двух числах:

$m - 3^{\alpha} 11^{\beta}$ если $m = 3^{18} \cdot 11^{14}$, то $\gamma \in [1; 14]$ и $\varphi \in [1, 18]$ =>

$n = 3\,11^{\gamma}$ => 14 18 вар

$k = 3^{\varphi}$ ~~есть еще оди~~

если $m \le 3^{18} 11^{4}$, то $\gamma = 14$, $\varphi = 18$ и всего

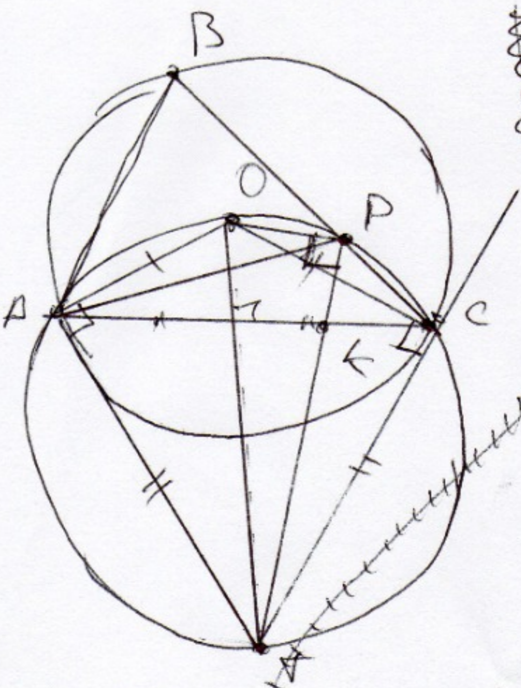
18 14 вар - 14 18

$\boxed{3}$

Ответ: $3(9\ 19\ 15-3)+3\cdot(14\ 18+18\ 14-14-18)$ шестиугольник

Чистовик

№6



~~Пусть~~ Заметим, что вокруг OATC можно описать окр. ($\angle OAT + \angle OCT = 180°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $T \in$ окр вокруг $\triangle AOC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ AOPCT вписанный пятиугольник

$$\frac{AK}{KC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AK \sin\angle AKB\ PK}{\frac{1}{2}\ KC \sin\angle PKC\ PK} = \frac{S_{\triangle AKP}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

$\frac{AK}{KC} = \frac{8}{7}$, TO - диаметр ($\angle OAT = 90°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ OT серпер к AC

$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\angle APC$

$\cos\angle TOC = \frac{OC}{AT} = \frac{R_\omega}{2R} = \cos\angle ABC$ (т.к. $\angle TOC = \frac{1}{2}\angle AOC$)

$\angle OPT = 90°$ (OT диаметр)

а - 33 наименьшее

НОК (a, b; c) = 3^{19} 11^{15} =>

-> НОК (1, m, n) 3^{18} 11^{14}

если m - 3^{18} 11^{14} n ∈ {1, 3, 11, 3^2 , 3^{17} 11^{13}} всего

18 14 - вариантов m > n

если m = 3^{18} 11^{α} n = 11^{14} · 3^{β} и 11^{14} нет

α: 0, до 14-1 => 14 вар

β: 0, до 18-1 -> 18 вар] 14 18 вар

$13^2 = 169$

$4 \cdot 42$
28
336
84
1176

= 39/4

---

m - 3^{18} 11^{α}

n 3^{β} 11^{14}

1176
169
1345

$\alpha < 18$ $\beta < 14$

n = $3^{\alpha} \cdot 11^{\beta}$ => $\alpha \in (0; 17)$ $\beta \in (0; 13)$

17 13 вар

другое число m = 3^{18} 11^{14}

$-x-3 > 0$

$x < -3$

$\frac{11}{4} + 7 =$

$-\frac{39}{4}$

n = 3^{18} 11^{β} $\beta \in (0; 13)$

m - $11^{4} \cdot 3^{\alpha}$ $\alpha \in (0; 17)$

n = 3^{α} 11^{14} $\beta \in (0; 13)$

m - 3^{18} 11^{β}

13 · 17 вар 1345

n = 3^{14} 3^{18} n = m = $= 3^{14}$ 3^{18} не подходит

$\frac{x}{7} + 7 = \sqrt{29 - x} - (x+5)^2$

3 · (4 17 · 13 + 1)

m = 3^{α} 3^{β}

11^{14}

269 17
-17
99

269 · 5

$x = \frac{-13 + \sqrt{269 \cdot 5}}{14}$

$\frac{-13 \pm \sqrt{269 \cdot 5}}{14}$

m 3^{α} 11^{β} $14 \le \alpha < 18$ $\beta < 14$ 3^{18} 11^{β}

> 0 $x - \frac{13 - \sqrt{269.5}}{14}$

m 3^{14} 11^{18}

3^{α} 11^{β} $19 \le \alpha + \gamma$ ~~≤ 38~~

~~$\beta + \gamma \le 14$~~

3^{γ} ~~11^{4}~~ $14 \le \beta + \gamma \le 28$

1345 | 5
-10 | 269
34
-30
45

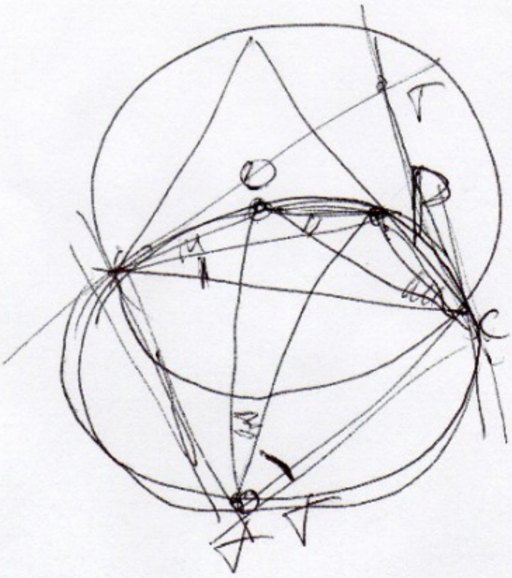
21100094 (U154080 M1302491)

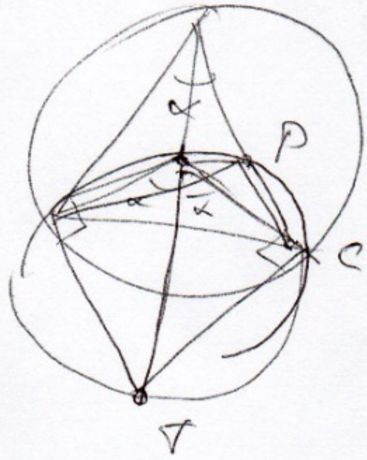
14

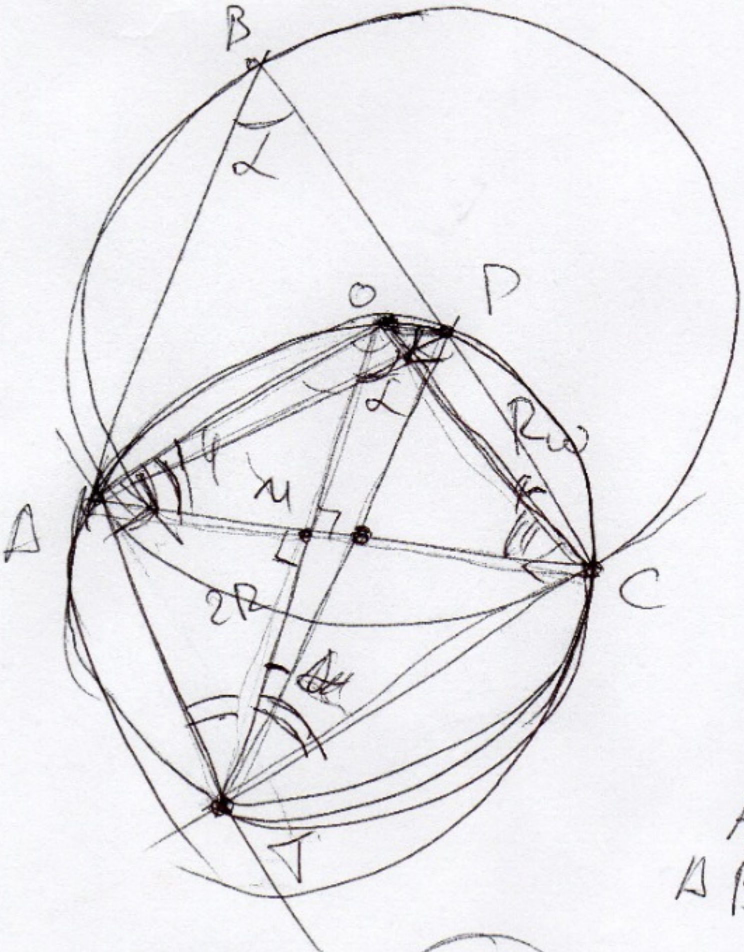
0, 14

15 0; 13

$< \frac{-13 - \sqrt{269 \cdot 5}}{14} <$







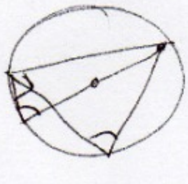
$OM \cdot MT = AM \cdot MC$

$AM =$

$\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} - \frac{R_w}{2R}$

$AP = \sin\angle C \cdot 2R$

$AB = \sin\angle C \; R_w$



$$\frac{AB}{AP} = \frac{R_w}{2R}$$

$\alpha \in [8;18]$

$\beta \in [1,14)$

$3^{18} \quad 11^{14}$

$3^{18}\, 11^{14},\ 3^{\alpha}\, \beta^{\beta},\ 5$

$3^{18}\, 11^{14},\ 3^{\alpha},\ 31^{\beta}$

$11^{\beta},\ 3^{\alpha}$

$3^{\alpha},\ 11^{\beta}$

1, M, k

21100094 (U154080 M1302491)

$$\boxed{\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2}$$

$120-4=116$

$\frac{x}{7}+7=29-x$

81

$\frac{81}{81}$

$\frac{8}{7}x=22$

$\frac{648}{6561}$

$x=\frac{77}{4}$

$29-x=29-\frac{77}{4}=\frac{116-77}{4}=$

$=\frac{39}{4}$

$1+\frac{77}{4}=\left(\frac{81}{4}\right)^2$

$\log_{\cancel{329}}$

$(x+1)^2=29-x$ не подходит

$x^2+2x+1=29-x$

$x^2+3x-28=0$ 7 4

$x=-7$

$x=4$ X

$\log_{\sqrt{(x+1)^2}}(29-x)$ 2

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=1.$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

$x^2+2x+1=\frac{x}{7}+7$

$x^2+\frac{13}{7}x-6=0$ 42 7

$7x^2+13x-42=0$ 7 7 6 27 37

$\frac{x^2}{49}+2x+49=29-x$

3 49 20 49

$\frac{x^2}{49}+3x+20=0$

5 49

21100094 (U154080 M1302491)

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$ $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right) \cdot \log_{(x+1)^2}(29-x) \cdot \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(x\ 1) =$

$= \frac{\log_2 \sqrt{\left(\frac{x}{7}+7\right)}^2}{\log_2(\sqrt{29-x})} \cdot \frac{\log_2 \sqrt{29-x}^2}{\log_2(x+1)^2} \cdot \frac{\log_{\cancel{2}}(-x-1)}{\log_2\sqrt{\frac{x}{7}+7}} =$

$\frac{x}{7}+7>0$

$\sqrt{29\ x}$

$-x\ 1>0 \Rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x-1$

$= \frac{2\log_2 \cancel{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}}{\log_2 \cancel{\sqrt{29-x}}} \cdot \frac{\cancel{2}\log \cancel{\sqrt{29-x}}}{\cancel{2}\log_2(-x-1)} \cdot \frac{\log_2(-x-1)}{\log_2\sqrt{\frac{x}{7}+7}} = 2.$

$a,\ a,\ a+1$

$a^2(a+1)\quad 2$

$\log_{\sqrt{30}}(6) = 1$

$a^3+a^2\ 2=0$

$\log_{36} 36 = 1$

$a=1$ - корень

$(a^3\ 1)+(a^2-1) = (a-1)(a^2+a+1)+(a\ 1)(a+1) =$

$= (a-1)(a^2+2a+2) \Rightarrow a=1$ - единств. корень

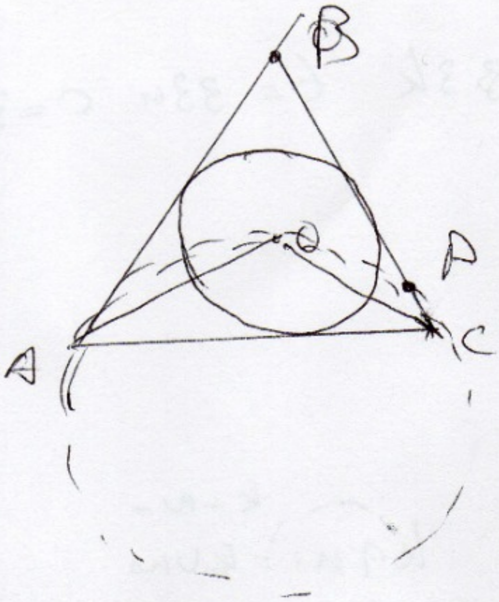
$(a^2+2a+1)+1>0$

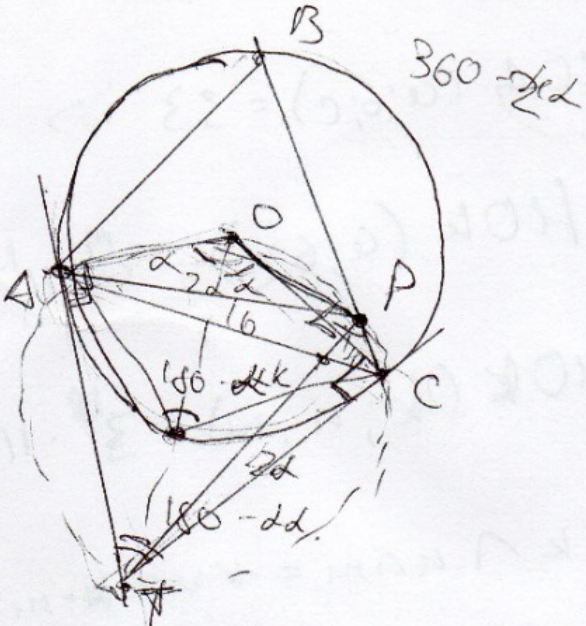
$1,\ 1,\ 2$

$\boxed{\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) - 2}$

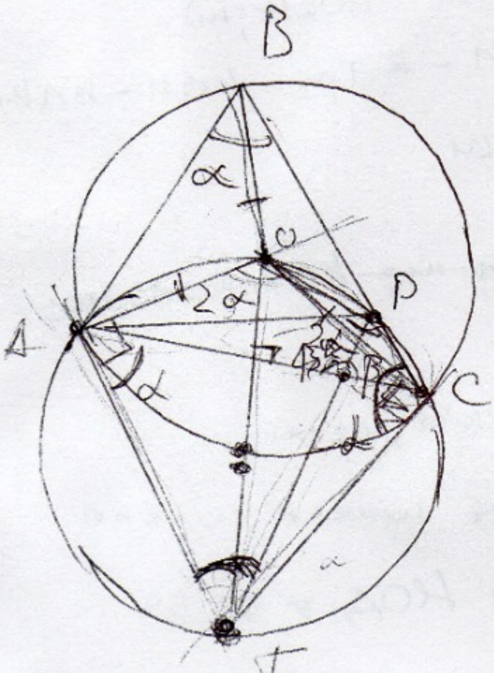
21100094 (U154080 M1302491)

$-x\ 1 = \frac{x}{7}+7 \qquad \frac{8}{7}x = 8 \qquad \boxed{x=-7}$ V





$AK \cdot KC = PK \cdot KT$



$S_{\Delta PK} =$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AK\,KP\sin(180-\beta)}{KC\,KP\cdot\sin\beta} = \frac{S_{AKP}}{S_{PKC}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array}$$

$\sqrt{1345} < \sqrt{1369} \leq 37$

$$x = \frac{13-\sqrt{1345}}{14} > \frac{-13-37}{14} =$$

$\sqrt{1345} = 36$

$$\begin{array}{r} 67 \\ 67 \\ \hline 469 \end{array}$$

$= -\frac{50}{14} = -\frac{9}{...}$

$6x \quad 29 - x > 29 + 3 = 32$

21100094 (U154080 M130249M)

≥ -3

$(x+5)^4 < (-3+5)^4 = 16$

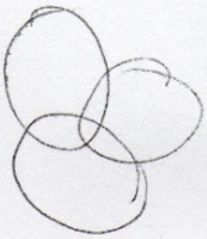
№1

$НОД(a;b;c) = 33 \Rightarrow a = 33k \quad b = 33n \quad c = 33m$

$НОК(a;b;c) = 3^{19}\,11^{15}$

$НОК(k,n,m) = 3^{18}\,11^{14}$

$k \cap n \cap m = \cancel{k \cup n}\; k \cdot m \cdot n\,/$ $\qquad k \cap m = k \cup m$ $\quad k+m$



$\dfrac{k\,m}{НОК(k;m)}$

$k \cup n \cup m = k + m + n \quad k \cap m - k \cap n - n \cap m + k \cap n \cap m$

$\cancel{НОК(k,n,m) = k \cdot n \cdot m : НОД(k,m) : НОД}$

a, или b, или c = 33 иначе, если a = 33p, то НОК имеет p, но нок имеет только 3 и 11 $\Rightarrow$ p = 3 или 11, но тогда НОД $\neq 33$

$НОД(a;b) = 3^{9}\,11^{15}$ $\qquad$ a - минимальное $\Rightarrow$ $\Rightarrow k \geq 1$ $\quad m \geq$

$НОК(k, m, 1) = 3^{18} \cdot 11^{14}$

в m содержится меньше, чем 11^{14} и в k меньше, то НОК содержит меньше 11^{14}, что не верно $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ или k или m содержит 11^{14}, аналогично 3^{18}

$k = 3^{18}\,11^{14}$ $\qquad k = 3^{18}$ $\qquad k = 11^{14}$

4 варианта $\geq m \geq 1$ $\qquad m = 11^{14}$ $\qquad m = 3^{18}$

$3^{18}\,11^{14}$ $\qquad 19 \cdot 15$ $\qquad m = 19 \cdot 15$ способ