Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100039**

ID профиля: **308587**

Вариант 24

Чистовик

№1

$a_5 = a_4 + d = a_3 + 2d = a_2 + 3d = a_1 + 4d$ где d - раз-ть арифм пр-ии.

$a_{18} = a_{17} + d = ... = a_1 + 17d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{13} = a_1 + 12d$

$S = a_1 + a_2 + ... + a_9 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + 8d) = 9a_1 + 36d$

$$\begin{cases} a_5 a_{18} > S - 4 \\ a_{10} a_{13} < S + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > 9a_1 + 36d - 4 \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 17 \cdot 4d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 9 \cdot 12d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \quad | + 40d^2 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a_1 + 36d - 4 + 40d^2 < a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} (1)$$

$-4 + 40d^2 < 60$

$40d^2 < 64$

$d^2 < \frac{64}{40}$

$|d| < \sqrt{\frac{64}{40}} = \sqrt{\frac{32}{20}} = \sqrt{\frac{16}{10}}$

Т.к. арифметическая прогрессия возрастающая и сост из целых чисел $\Rightarrow d > 0$, $d \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d < \sqrt{1,6} \\ d > 0 \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow d = 1$$

$$(1) \begin{cases} d = 1 \\ 9a_1 + 36 - 4 + 40 < a_1^2 + 21a_1 + 108 \\ a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + 36 + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0 \ (2) \\ a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0 \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

(2) $a_1^2 + 12a_1 + 36 \geq 0$

$D = 36 - 36 = 0$

$(a_1 + 6)^2 \geq 0$

(3) $a_1^2 + 12a_1 + 12 = 0$

$D = 36 - 12 = 24$

$a_1 = -6 \pm \sqrt{24}$

$\boxed{01}$

Чистовик

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ (a_1+6)^2>0 \\ (a_1-(-6-\sqrt{24}))(a_1-(-6+\sqrt{24}))<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ a_1 \neq -6 \\ \text{(+) } -6-\sqrt{24} \text{ (−) } -6+\sqrt{24} \text{ (+)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ a_1 \neq -6 \\ a_1 \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24}) \end{cases}$$

$4<\sqrt{24}<5$ $\quad -5<-\sqrt{24}<-4 \ | -6$ $\quad 4<\sqrt{24}<5 \ | -6$

$16<24<25$ $\quad -11<-6-\sqrt{24}<-10$ $\quad -2<-6+\sqrt{24}<-1$

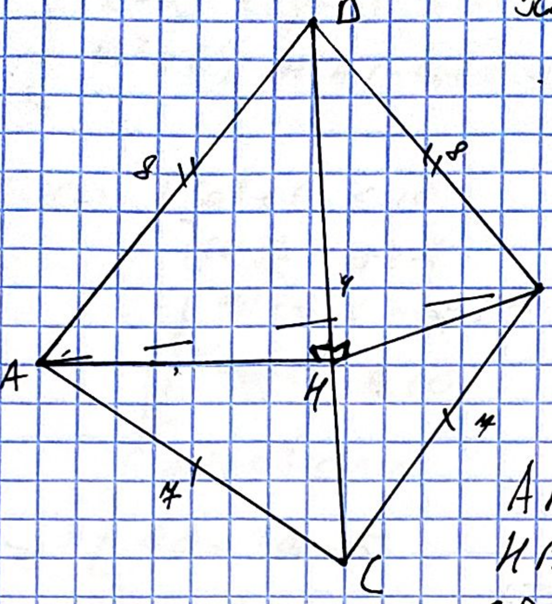
$$\begin{cases} a_1 \in Z \\ a_1 \in (-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24}) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a_1 \in [-10; -2]} \Leftrightarrow a_1 \in \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2\}$$

$a_1 \in Z$ и $a_1 \neq -6$

Ответ: $a_1=-10$; $a_1=-9$; $a_1=-8$; $a_1=-7$; $a_1=-5$; $a_1=-4$; $a_1=-3$; $a_1=-2$

Чистовик

№2



По усл $AD = DB = 8$, $AC = CB = 7$, DC - общ $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$ по 3-м сторонам

Д.п. AH - выс в $\triangle ACD$

BH - тогда будет выс в $\triangle BCD$, т.к. в равных треуг-х высоты опущ. на равные стороны делят её в одном пропорц.

$AH \perp CD$
$HB \perp CD$
$CD \parallel$ оси цилиндра
$\Rightarrow$ $AH \perp$ оси цилиндра, $HB \perp$ оси цилиндра $\Rightarrow$

$\Rightarrow (AHB) \perp$ оси цилиндра $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\triangle AHB$ будет зад. радиус для цилиндра, т.к. $\triangle AHB$ будет $\perp$ оси цилиндра и его нужно вписать в окр. с радиусом, равным радиусу цилиндра

в $\triangle AHB$

$$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = \frac{4}{\sin\angle AHB} = 2R$$ (по сл. т. из sin) $\Rightarrow R$ - ~~максимальный~~ минимальный при $\sin\angle AHB = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{min} = 2$

$\sin\angle AHB = 1 \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$

$AH = HB$ т.к. это высоты в равных треуг. пров к одной стороне

$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Rightarrow 2AH^2 = AB^2 \Rightarrow AH = \sqrt{8} = HB$

$DC = DH + HC$

$\triangle DHB$
$DH^2 = DB^2 - HB^2 = 8^2 - 8 = 64 - 8 = 56 \Rightarrow DH = \sqrt{56}$

$\triangle BHC$
$HC^2 = BC^2 - BH^2 = 7^2 - 8 = 49 - 8 = 41 \Rightarrow HC = \sqrt{41}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow DC = DH + HC = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

Ответ: $DC = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b,\ 10) & (2)\end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 10\\ 10 \le -6a-2b\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le -6a-2b\\ -6a-2b \le 10\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 10\\ b\le -3a-5\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+6a+9+b^2+2b+1-10\le 0\\ -6a-2b\le 10\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 10\\ b\le -3a-5\end{cases}\\ \begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10\\ -6a-2b\le 10\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 10\\ b\le -3a-5\end{cases}\\ \begin{cases}(a+3)^2+(b+1)^2\le 10\\ b\ge -3a-5\end{cases}\end{array}\right.$$

$$(a+3)^2+(b+1)^2 = a^2+b^2$$

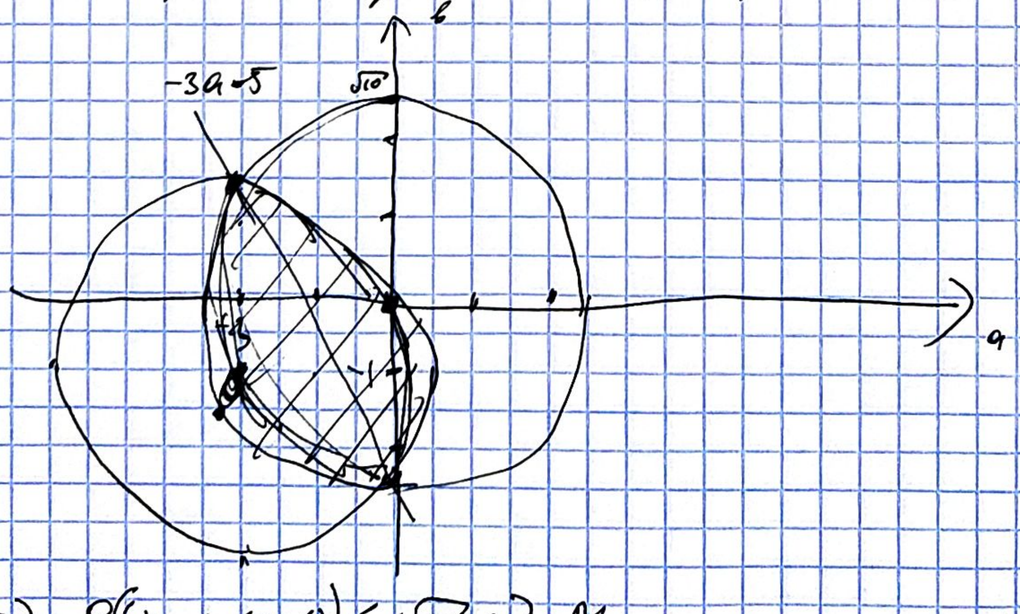
$$a^2+6a+9+b^2+2b+1 = a^2+b^2$$

$$6a+2b+10=0$$

~~$a=b$ — в точках пересеч~~

$$b=-3a-5$$

Если рассмотреть на графике



$(1) \Rightarrow \rho((x,y),(a,b)) \le \sqrt{10} \Leftrightarrow$ M - фигура пол. на $\rho' \le \sqrt{10}$ от отмеч.

обе окр-ти проходят через центр другой

$\boxed{04}$

Черновик

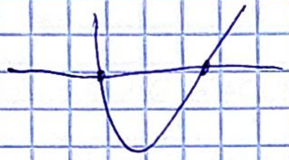
$= 441d^2 - 378d + 81 - 272d^2 + 144d - 16 =$

$= 169d^2 - 234d + 65 = 0$

$D = 117^2 - 65 \cdot 169 = 13689 - 10985 > 0$

$= 2704 = 52^2$

$d = \dfrac{117 \pm 52}{169}$; $\dfrac{169}{169} = 1$; $\dfrac{65}{169}$



$52 \cdot 52 = 2704$

$117 \cdot 117 = 13689$

$65 \cdot 169 = 10985$

Черновик

$a_5 = a_4 + d = a_3 + 2d = a_2 + 3d = a_1 + 4d$ $\quad 17 \cdot 4 = 68 \quad 12 \cdot 9 = 108$

$a_{18} = a_1 + 17d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{13} = a_1 + 12d$

$$\begin{cases} a_5 \cdot a_{18} > S - 4 \\ a_{10} a_{13} < S + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > 9a_1 + 36d - 4 \\ (a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 =$

$= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d + a_1 + 7d +$

$+ a_1 + 8d = 9a_1 + 36d$ $\quad 17 \cdot 4 = 68$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21da_1 + 4 \cdot 17d^2 > 9a_1 + 36d - 4 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 9 \cdot 12d^2 < 9a_1 + 36d + 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$12 \cdot 9$ $\quad 42 - 108 = -96$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21da_1 + 4 \cdot 17d^2 - 9a_1 - 36d + 4 > 0 \\ 9a_1 + 36d + 60 - a_1^2 - 21a_1 d - 9 \cdot 12d^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$21 \cdot 21 = 441 \quad 42 \cdot 9 = 378$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot 17d^2 + 4 + 60 - 9 \cdot 12d^2 > 0 \\ a_1^2 + 21da_1 + 4 \cdot 17d^2 - 9a_1 - 36d + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$68 \cdot 4 = 272 \quad 36 \cdot 4 = 144$

$17 - 27$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{68d^2 + 64} \; 17d^2 + 1 + 15 - 9 \cdot 3d^2 > 0 \\ a_1^2 + (21d - 9)a_1 + 4 \cdot 17d^2 - 36d + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10d^2 + 16 > 0 \\ a_1^2 + (21d - 9)a_1 + \\ + 4 \cdot 17d^2 - 36d + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d^2 < \frac{16}{10} \Leftrightarrow |d| < 1{,}6 \\ a_1^2 + (21d - 9)a_1 + 68d^2 - 36d + 4 > 0 \end{cases}$$

$D = (21d - 9)^2 - 4(68d^2 - 36d + 4) =$

$= (21d)^2 - 2 \cdot 21 \cdot 9d + 81 - 4 \cdot 68d^2 + 36 \cdot 4d - 16 =$

$\boxed{07}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100039**

ID профиля: **308587**

Вариант 24

Чистовик

№4

НОД(a; b; c) = 33

НОК(a; b; c) = $3^{19} \cdot 11^{15} = 33^{15} \cdot 3^4$

$a = 33 \cdot x$

$b = 33 \cdot y$, т.к. НОД(a; b; c) = 33

$c = 33 \cdot z$

НОК(a; b; c) = $3^{19} \cdot 11^{15} = 33^{15} \cdot 3^4$ = НОК(33x, 33y, 33z) =>

=> НОК(x, y, z) = $33^{14} \cdot 3^4$

НОД(x, y, z) = 1, т.к. НОД(33x, 33y, 33z) = 33

x, y и z это комбинации $11^n \cdot 3^m$, где n и m ∈ N_0

причем $n \le 14$, $m \le 18$

1) т.к. НОД(x, y, z) = 1, если рассматривать отдельно 11 в какой-то степени то хотя бы у одного числа степень в кот. нужно возвести 11 равна нулю.

А у остальных двух чисел степени могут быть

14 и от 0 до 14 т.е. вар. ~~15·15~~

от 0 до 14 и 14 15 + 15 = 30

Но есть повт. (0)(14)(14), кот идёт в обоих =>

=> вар. 30 − 1 = 29

Но 0 могут быть все три числа =>

=> 29 · 3 = 60 + 27 = 87

Но будут повт. (0; 14; 0); (0; 0; 14); (14; 0; 0)

т.е. от этого числа 87 нужно отнять 3 вар (повт)

87 − 3 = $\boxed{84}$

2) аналогично со степенью ~~числа~~ цифры 3

(19 + 19 − 1) · 3 − 3 = (19 + 18) · 3 − 3 = 37 · 3 − 3 = 90 + 21 − 3 = 108

$\boxed{108 \cdot 84 = 9072}$

~~Насмотрите вопр~~:

Ответ: 9072

$\boxed{01}$

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

Их произв.:

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=$

$=\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2\cdot\log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)^2=$

$=\dfrac{\log_{(x+1)^2}\left(\frac{x}{7}+7\right)^2}{\log_{(x+1)^2}(29-x)}\cdot\cancel{\log_{(x+1)^2}(29-x)}\,\log_{\frac{x}{7}+7}(+x+1)^2=$

$= 2$

Тогда пусть иск число x'

$x'\cdot x'\cdot(x'+1)=2$

$x'^3+x'^2-2=0$ $\qquad x'^3-1+x'^2-1=0$

$(x'-1)(x'^2+x'+1)+(x'-1)(x'+1)=0$

$(x'-1)(x'^2+2x'+2)=0$

$x'=1$ $\qquad D=4-4\cdot2<0$

$x'\in\varnothing$

1) $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$

$29-x=\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

$29-x=\frac{x^2}{49}+2\cdot x+49$

$x^2+2\cdot49\cdot x+49^2+49x-29\cdot49=0$

$x^2+49\cdot3\cdot x+49(\underbrace{49-29}_{20})=0$

$x^2+147x+980=0$

$D=147^2-4\cdot980=17689=133^2$

$x=\dfrac{-147\pm133}{2}$

$x_1=-140$ $\qquad x_2=-7$

$x_1=-140$ – не подх, т.к. $-\frac{140}{7}+7<0$

$\log_{\sqrt{29+7}}(6)=1$

$\log_{\sqrt{36}}6=1$ – верно $\boxed{02}$

$\Downarrow$

$x=-7$ – подходит

Чистовик

~~$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}$~~

$\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)=2$

$29-x=\frac{x}{7}+7$

$(29-x)\cdot 7=x+49$

$29\cdot 7-7x=x+49$

$8x=49-29\cdot 7$

$x=19,25$

— не подх

$\log_{(20,25)^2}(29-19,25)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)=\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-19,25-1)$

Ответ: $x=-7$

$\boxed{03}$

Чистовик

№6

1)

$S_{\triangle APK}=16$

$S_{\triangle CPK}=14$

Назовём [illegible] окр γ

$O\in\gamma$

$C\in\gamma$

$\angle OCT=90^\circ$

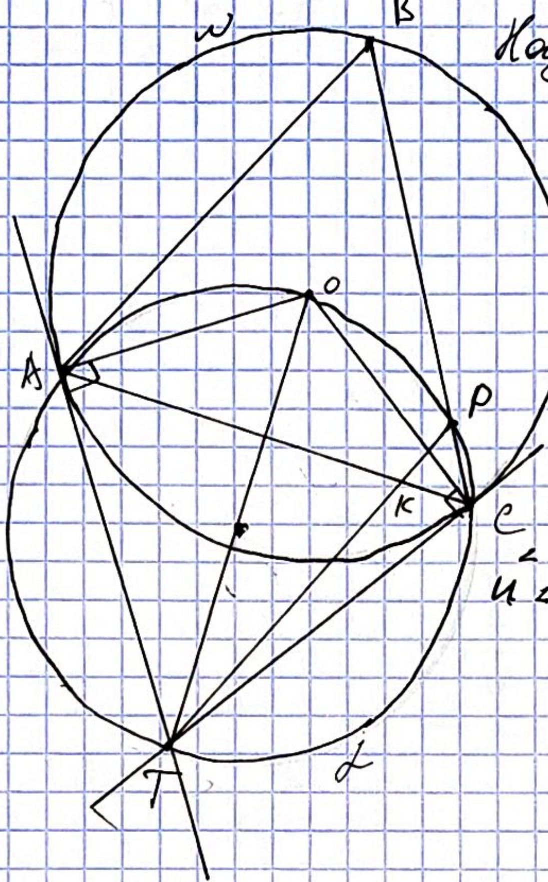
$A\in\alpha$

$\angle OAT=90^\circ$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow T\in\alpha$ и OT – диам.

(т.к. 4х-уг. $OCTA$ – впис., $\angle ATC+\angle AOC=\angle OAT+\angle OCT=180^\circ$ и $\angle OCT=\angle OAT=90^\circ$)

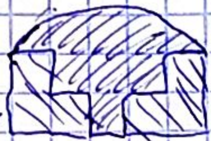


Черновик

№4

НОД$(a; b; c) = 33$

НОК$(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15} = 33^{15} \cdot 3^4$

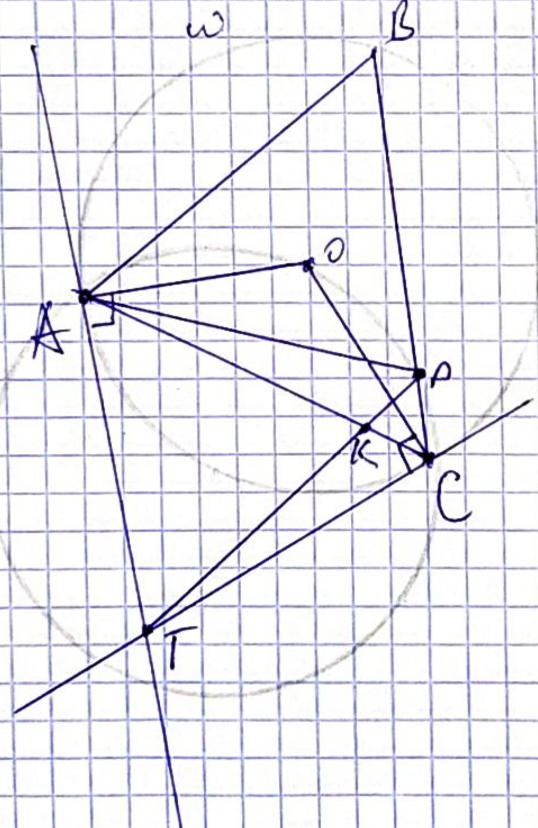


$a = 33 \cdot x$

$b = 33 \cdot y$

$c = 33 \cdot z$

$$\begin{array}{r} \times\, 108 \\ 84 \\ \hline 432 \\ 864 \\ \hline 9072 \end{array}$$



$S_{APK} = 16$

$S_{CPK} = 14$

S_{ABC} – ?

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$

AC – ?