Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100025**

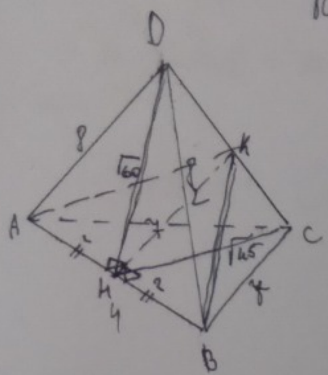
ID профиля: **818775**

Вариант 24

№2.

Чистовик
В-24
ч-1

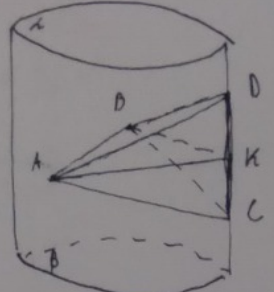
1



По т. Пифагора:

$DH = \sqrt{64-4} = \sqrt{60}$

$CH = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$



α — верх. осн. цилиндра

β — нижнее осн. цилиндра

$K \in DC$;

$(ABK) \parallel \alpha$

$(ABK) \parallel \beta$

• $CD \parallel$ оси цилиндра и все вершины тетраэдра принадлеж. б.п. $\Rightarrow$ $CD \in$ б.п.

• $\left.\begin{matrix} DH \perp AB \\ CH \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (DCH)$

$CD \in (DCH) \Rightarrow AB \perp CD$

перпендикуляры из т. D и из т. C падают в т. H т.к. $\triangle ADB$ — р.б. и $\triangle ACB$ — р.б.; т. H явл. серединой стороны AB

$\left.\begin{matrix} CD \parallel \text{оси} \\ AB \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $AB \parallel \alpha$, $AB \parallel \beta$

Следовательно $DC \perp (ABK)$;
т.к. $DC \perp \alpha$, $\alpha \parallel (ABK)$

$\Downarrow$

$BK \perp DC$

$AK \perp DC$

$\triangle ADC = \triangle BDC$

$\left(\begin{matrix} AD = DB \\ BC = AC \\ DC - \text{общ.} \end{matrix}\right)$

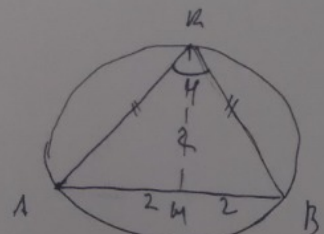
$\Downarrow$

$AK = BK$ соот. эл.

т.к. $\triangle AKB$ — р.б. $\Rightarrow$ его высота KH явл. и биссектр. и высотой

• Рассм. (ABK):

$\angle AKB = \varphi$



$2r = \dfrac{AB}{\sin\angle AKB}$

$r = \dfrac{4}{2\sin\varphi} = \dfrac{2}{\sin\varphi}$

r есть радиус окр. опис. около $\triangle ABK$, а соответственно и радиус цилиндра

$r_{мин} = \dfrac{2}{\sin\varphi_{=1}} = 2 \Rightarrow \triangle AKB$ — прямоуг. $\Rightarrow$ $AH = HB = KH = 2$

$\varphi = 90°$

$\Rightarrow KD = \sqrt{60-4} = \sqrt{56}$

$KC = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

№2 продолж.

Чистовик
В – 24
ч-1

2

$CD = KD + KC = \sqrt{56} + \sqrt{41}$

Ответ: $CD = \sqrt{56} + \sqrt{41}$.

Чистовик
В – 24
ч-1

3

№1.

$S = \frac{a_1 + a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d) \cdot 9$

$d > 0$ (т.к. прогр. возр.)
$d \in \mathbb{Z}$
$a_1 \in \mathbb{Z}$

1) $a_5 a_{18} > S - 4$: $(a_1 + 4d)(a_1 + 17d) > (a_1 + 4d) \cdot 9 - 4$

$a_1^2 + 21a_1 d + 68d^2 > 9a_1 + 36d - 4$

$a_1^2 + 21a_1 d - 9a_1 - 36d > -68d^2 - 4$

2) $a_{10} a_{13} < S + 60$: $(a_1 + 9d)(a_1 + 12d) < (a_1 + 4d) \cdot 9 + 60$

$a_1^2 + 21a_1 d + 108d^2 < 9a_1 + 36d + 60$

$a_1^2 + 21a_1 d - 9a_1 + 36d < 60 - 108d^2$

Из 1) и 2) следует:

$60 - 108d^2 > -68d^2 - 4$

$\overset{8}{\cancel{64}} > \overset{5}{\cancel{40}}d^2$

$d^2 < \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$, а т.к. $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z}$, то

$d = 1$

Подставим $d = 1$:

2) $a_1^2 + 21a_1 + 108 < 9a_1 + \overset{96}{36 + 60}$

$a_1^2 + 12a_1 + 12 < 0$

$D_1 = 36 - 12 = 24$

$\left[\begin{array}{l} a_1 = -6 + 2\sqrt{6} \quad -2 < -6 + 2\sqrt{6} < -1 \\ a_1 = -6 - 2\sqrt{6} \quad -11 < -6 - 2\sqrt{6} < -10 \end{array}\right.$

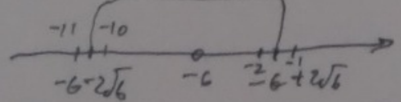
1) $a_1^2 + 21a_1 + 68 > 9a_1 + \overset{32}{36 - 4}$

$a_1^2 + 12a_1 + 36 > 0$

$(a_1 + 6)^2 > 0$

$a_1 \neq -6$

Объединим 1) и 2):



$a_1 = -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2$

Ответ: $a_1 = -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2$.

№3. $\begin{cases} ① \ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 10 \\ ② \ a^2+b^2 \le \min(-6a-2b, 10) \end{cases}$

чистовик
В-24
ч-1

~~[illegible]~~ есть т. $A(a; b)$; эта т. явл. центром окр., заданной ур-ем ① ~~[illegible]~~

② Т.ч.: Если $10 > -6a-2b$, то

$2b > -6a-10$ $\quad a^2+b^2 \le -6a-2b$; $\quad a^2+6a+9+b^2+2b+1 \le 10$

$b > -3a-5$ $\quad\quad (a+3)^2+(b+1)^2 \le 10$

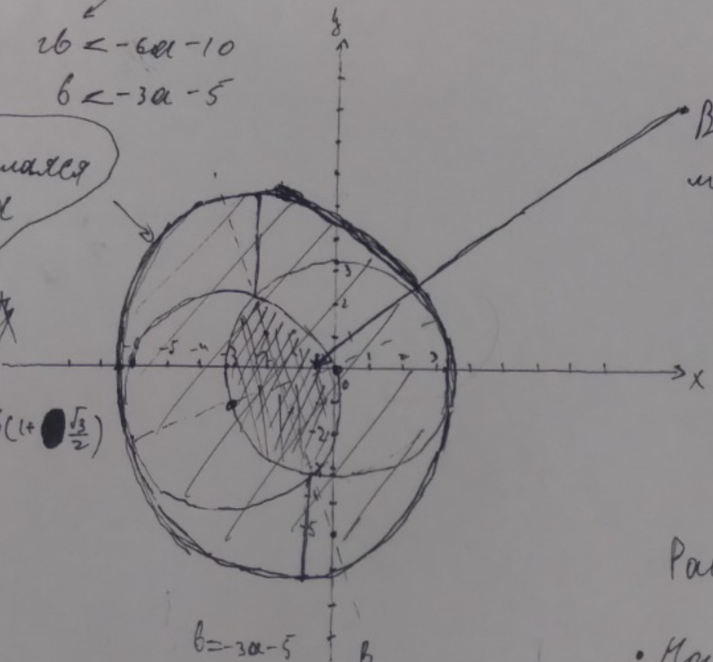
Если $10 < -6a-2b$, то $a^2+b^2 \le 10$

$r^2=10$

$r=\sqrt{10}$ ← чуть больше 3

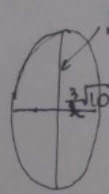
$2b < -6a-10$

$b < -3a-5$



получившаяся фигура эллипс

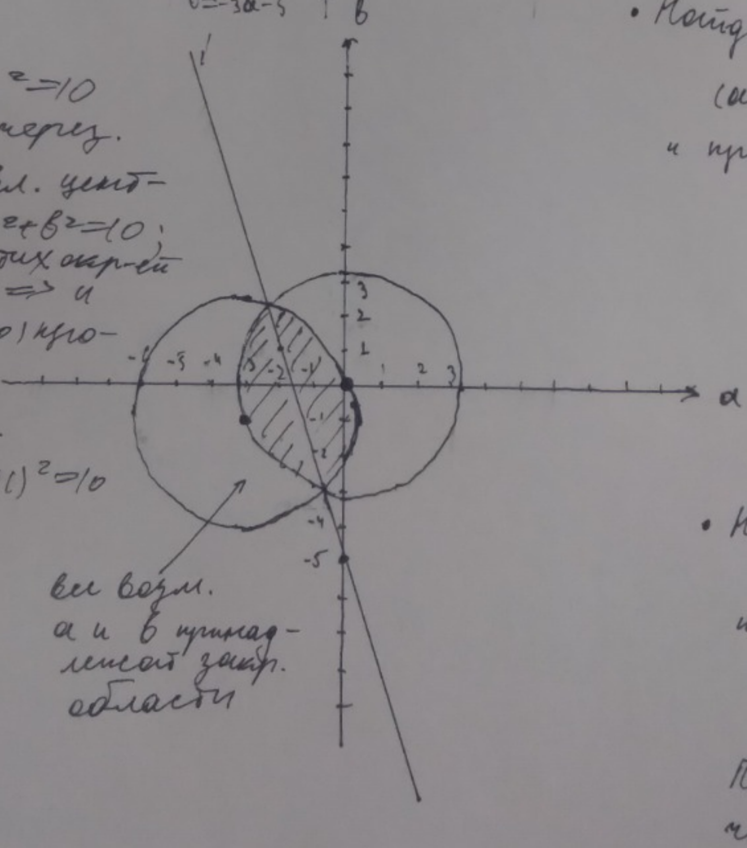
~~Чтобы находить площадь~~ эллипса



$\sqrt{10}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$

$3\sqrt{10}$

Внутри закр. области может двигаться центр. окр-ти $(x-a)^2+(y-b)^2=10$



$b=-3a-5$

Окр. $(a+3)^2+(b+1)^2=10$ проходит через т. $(0;0)$, явл. центром окр. $a^2+b^2=10$; радиусы этих окр-ей одинаковы $\Rightarrow$ и окр. $(a^2+b^2=10)$ проходит через центр. окр. $(a+3)^2+(b+1)^2=10$

все возм. a и b принадлежат закр. области

Рассм. как меняются a и b:

- Найдём т. пересеч. окр. $(a+3)^2+(b+1)^2=10$ и прямой $b=-3a-5$!

$(a+3)^2+(3a+4)^2=10$

$a^2+6a+9+9a^2+24a+16=10$

$10a^2+30a+15=0$

В этом квадр. ур-ии $D>0 \Rightarrow$ 2 т. пересеч. a_1, a_2

- Найдём т. пересеч. окр. $a^2+b^2=10$ и прямой $b=-3a-5$:

$a^2+9a^2+30a+25-10=0$

$10a^2+30a+15=0$

Получили то же ур-е, что и в предыд. случае $\Rightarrow$ точки пересечения совпадают

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100025**

ID профиля: **818775**

Вариант 24

№6. $\log_{\sqrt{20-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$

ОДЗ нах:

- $29-x>0$
  $x<29$

- $\frac{x}{7}+7>0$
  $x>-49$

- $-x-1>0$
  $x<-1$

- $(x+1)^2\neq 1$
  $x+1\neq -1$
  $x\neq -2$

- $\frac{x}{7}+7\neq 1$
  $x+49\neq 7$
  $x\neq -42$

(1) $2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)$

(2) $\frac{1}{2}\log_{-(x+1)}(29-x)$

(3) $2\log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)$

Итого: $x\in(-49;-1)$
$x\neq-2;\ x\neq-42.$

(1)·(2)·(3): $2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot\log_{-x-1}(29-x)\cdot$

$\cdot\ \log_{\frac{x}{7}+7}(-x-1)=2\log_{(29-x)}(-x-1)\cdot\log_{(-x-1)}(29-x)=2$

$\exists$ какие то 2 числа равны a, а третье равно $a+1$:

$a^2(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0$

$a=1$

$$\begin{array}{l|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ \hline a^3-a^2 & a^2+2a+2=0;\ D_1=1-2<0 \\ \quad 2a^2-2 & \\ \quad 2a^2-2a & \\ \quad\quad 2a-2 & \\ \quad\quad 2a-2 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Значит какие-то 2 числа равны 1, а третье число равно 2.

№5 продолж.

1сл. (1) = (2) = 1, (3) = 2:

$$2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=1$$

$\cancel{\frac{x}{7}+7=29-x}$

$\cancel{x+49=203-7x}$

$\cancel{8x=203-49}$

$\cancel{x=0}$ ~~← не удовл. огр.~~

$$\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{7}+7=\sqrt{29-x}$$

$$x+49=7\sqrt{29-x}$$

$$x^2+98x+49^2=49(29-x)$$

$$x^2+49\cdot 3x+49(\overset{20}{49-29})=0$$

$$\left[\begin{aligned} &x_1+x_2=-49\cdot 3=-147\\ &x_1\cdot x_2=49\cdot 20=7\cdot\underbrace{7\cdot 2\cdot 5\cdot 2}_{140}\end{aligned}\right.$$

$x=-140$ ← не удовл. огр.

$x=-7$ ← удовл. огр.

Подст. $x=-7$:

(2) $\frac{1}{2}\log_6 36=1$ верно

(3) $2\log_6 6=2$ верно

2сл. (2) = (3) = 1, (1) = 2:

$$\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)=1$$

$$\log_{-x-1}(29-x)=2$$

$$(29-x)=(x+1)^2$$

$$29-x=x^2+2x+1$$

$$x^2+3x-28=0$$

$\left[\begin{aligned} &x=-7\\ &x=4\end{aligned}\right.$

$x=-7$ ← этот был в 1сл.

$x=4$ ← этот не удовл. огр.

3сл. (3) = (1) = 1, (2) = 2:

в этом сл. у (1) есть только корень $x=-7$, который был рассм. в 1сл.

$x=-7$

Ответ: $x=-7$.

1. НОД $(a; b; c) = 33 = 3 \cdot 11$
НОК $(a; b; c) = 3^{19} \cdot 11^{15}$ $\Rightarrow$ a, b, c составляются из степеней троек и 11-ти, причём, в силу НОД-а, одно из чисел обязано быть 33, а другие 2 числа вкл. в себя степени 3-ки и 11-ти ≥ 1, в силу НОК-а.

Э $a = 33$, тогда ст 3-ки и 11-ти в b и c ≥ 1. Давайте сразу положим в b и в c по степени 3-ки и 11-ти, останется ст. 3-ки: $19 - 3 = 16$, ст. 11-ти: $15 - 3 = 12$

Кол-во спос. распределить 12 ст. 11-ти и 16 ст. 3-ки м/у 2-мя числами: 17 спос. для 3-ки $(0, 1, 2, 3, \ldots, 16)$ и 13 спос. для 11-ти $(0, 1, 2, 3, \ldots, 12)$; $17 \cdot 13$

Т.к. мы могли взять b или c равным 33, то всего троек $17 \cdot 13 \cdot 3$, но случаи, когда 2 числа $= 33$, а третье вкл. в себя оставшиеся степени 3-ки и 11-ти мы посчитали дважды:

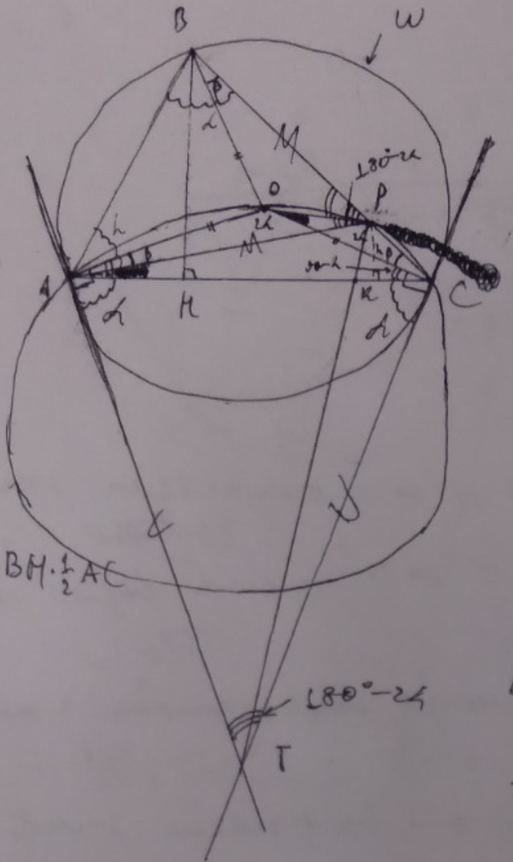
$$\boxed{17 \cdot 13 \cdot 3 - \underset{a=b=33 \text{ лишний}}{1} - \underset{a=c=33 \text{ лишний}}{1} - \underset{b=c=33 \text{ лишний}}{1}} = 17 \cdot 13 \cdot 3 - 3 =$$

$= 221 \cdot 3 - 3 = 220 \cdot 3 =$
$= 660$

Ответ: 660.

21100025 (U818775 M1298236)

№6.



$S_{\triangle ABC} = BH \cdot \frac{1}{2} AC$

$S_{\triangle APK} = 16$

$S_{\triangle CPK} = 14$

$S_{\triangle ABC}$ − ?

• $S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot h = 16$

• $S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2} CK \cdot h = 14$

• $AK \cdot h = 32$ • $CK \cdot h = 28$

$\frac{h}{BH} = \frac{PC}{BC}$ ← в силу подобия △-ков CBH и CPK

$BH = h \cdot \frac{BC}{PC} =$

$= \frac{PC + BP}{PC} \cdot h = \left(1 + \frac{BP}{PC}\right) \cdot h$

Пусть $\angle ABC = \alpha$ => центр. угол $\angle AOC$ опир. на ту же дугу $= 2\alpha$ => $\angle OAC = \angle OCA$ по свойству в р.б. △ $= \frac{180° - 2\alpha}{2} =$
$= 90° - \alpha$

$\frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} =$

$BP = AP$, т.к. △ ABP − р.б., т.к. $\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$ (опир. на одну дугу) => $BPA = 180° - 2\alpha$ => $\angle BAP = 2\alpha$

21100025 (U818775 M1298236)

Черновик

$$\begin{array}{r} \overset{6}{29} \\ \times\ 7 \\ \hline 203 \end{array}$$

~~$2\log_{20-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)=\frac{1}{2}\log_{-x-1}(29-x)$~~

$7\cdot\underline{7\cdot\overset{140}{2\cdot5\cdot2}}$ 147

НОД$(a;b;c)=33=3\cdot11$ => множители этих чисел только 11 и 3

НОК$(a;b;c)=3^{19}\cdot11^{15}$ => наиб. возм. ст. 3: 19, 11: 15

У всех чисел не могут ~~...~~ степени 3-ки и ~~ст.~~ 11-ти превышать 1 $3^2\cdot11$; $3^2\cdot11$; $3^2\cdot11$

Одно из чисел 33 ~~2~~ — выбираем 3-мя спос в других 2-х числах распред. ст. 3 и ~~11~~

~~18~~ Стоит отметить, что 33 в каждом из 2-х чисел обязано быть, т. е. всего остается ст. 3: 19−3=16

ст. 11: 15−3=12.

2 ящика

ст. 3-ки

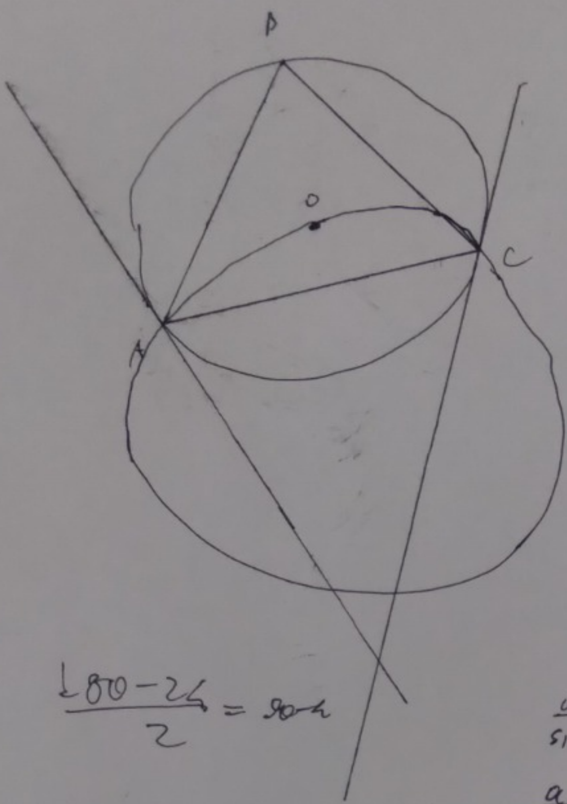
$$\begin{array}{r} \overset{2}{17} \\ \times\ 13 \\ \hline 51 \\ +\ 17 \\ \hline 221 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 170 \\ +\ 51 \\ \hline 221 \end{array}$$

1

перег. + 16 шариков

C^1_{17}

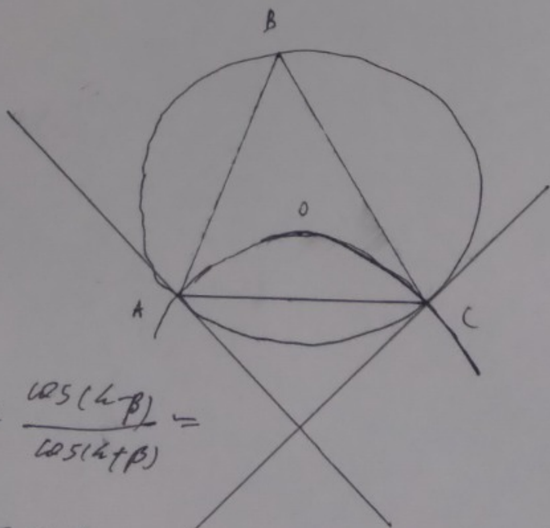


S_A

$$\frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$



$90-(\alpha-\beta)$

$$\frac{\sin(90-\alpha+\beta)}{\sin(90-\alpha-\beta)} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

№6.