Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21105015**

ID профиля: **873884**

Вариант 23

Чистовик | Вариант 23

№1

S - сумма $(a_1, a_2, a_3 \dots a_6)$ $a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S+30 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+55 \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = \cancel{a_1 + a_1 + d \dots + a_6} \frac{(a_1+a_6)\cdot n}{2} = (a_1 + a_1 + d(n-1))\cdot 3 =$$

$$= (2a_1 + 5d)3 = 6a_1 + 15d$$

$a_{10} = a_1 + d(9) = a_1 + 9d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$$\begin{cases} (a_1+9d)(a_1+15d) > S+30 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55 \end{cases} \quad \cancel{(a_1+9d)(a_1+15d) - (a_1+10d)(a_1+14d)}$$

$$\begin{cases} (a_1+9d)(a_1+15d) > S+30 \\ -(a_1+10d)(a_1+14d) > -S-55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+9d)(a_1+15d) - (a_1+10d)(a_1+14d) > -25 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55 \end{cases}$$

решим 1ое нерав-во

$$a_1^2 + 9da_1 + 15da_1 + 135d^2 - (a_1^2 + 10da_1 + 14a_1d + 140d^2) > -25$$

$$9da_1 - 10da_1 + 15da_1 - 14da_1 - 5d^2 > -25 \Leftrightarrow -5d^2 > -25$$

$$5d^2 < 25 \Leftrightarrow d^2 < 5 \Leftrightarrow d^2 - 5 < 0 \Leftrightarrow (d-\sqrt{5})(d+\sqrt{5}) < 0$$

$$d \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$$

Т.к. сумма чисел прогрессии состоит из целых чисел, то d тоже явл. целым числом. Т.к. $d \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$, то $d \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

~~Рассм. 2ое нерав-во~~ $\cancel{S = 6a_1 + 15d}$

$\cancel{(a_1+10d)(a_1+14d) < S+55}$

~~1) d = 2 =>~~ Т.к. прогрессия по усл. явл. возрастающей, то

$$\left[\begin{array}{l} d = 1 \\ d = 2 \end{array}\right.$$

Пусть $d = 1 \Rightarrow (a_1+10)(a_1+14) < 6a_1 + 15 + 55$

$$a_1^2 + 10a_1 + 14a_1 + 140 < 6a_1 + 70$$

21105015 (U873884 M1305182)

$$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \Leftrightarrow a \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$$

$-9-\sqrt{11} < -12$

$-9+\sqrt{11} < -5$

$a_1 \in \{-12; -11; -9; -8; -7; -6\}$

Чистовик

Продолжение № 1

$d=2 \Rightarrow (a_1+20)(a_1+28) < 6a_1 + 30+55$

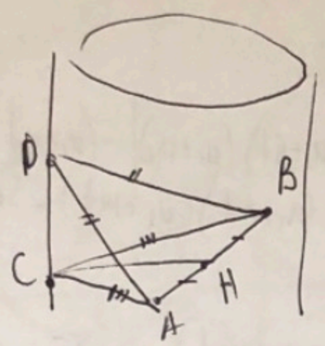
$a_1^2+20a_1+28a_1+280-6a_1-85<0 \Leftrightarrow a_1^2+42a_1+195<0$

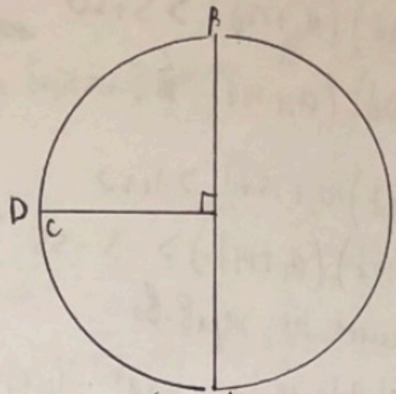
$a_1\in(-21-\sqrt{246};-21+\sqrt{246})$; $15<\sqrt{246}<16$;

т.к. $a_1\in\mathbb{Z}$, то $a_1\in\{-36;-35;-34;-33;-32;-31;-30;\dots;-6\}$

Ответ: $a_1\in\{-36;-35;-34;\dots;-10;-9;-8;-7;-6\}$

$\boxed{№2}$





проекция на осн. цилиндра

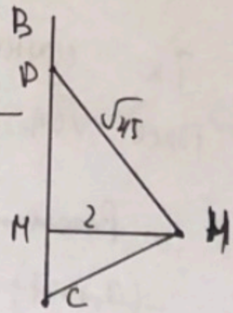
~~по усл.~~ $\triangle DAB$ и $\triangle CAB$ – р/б (по опр) $\Rightarrow$ $DH\perp AB$ и $CH\perp AB \Rightarrow$
$\Rightarrow AB\perp(CDH) \Rightarrow AB\perp CD \Rightarrow AB \parallel$ плоскости осн. цилиндра, т.к. $CD\perp$ пл. осн. цилиндра (по усл.)

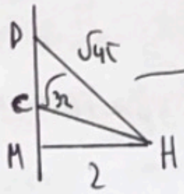
R осн. цилиндра min, когда AB – диамет осн. цилиндра, т.к. $R=1$

В ~~...~~ (CDH) возм. след. варианты:

1) $DH=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}$
$CH=\sqrt{32}$
$DC=DM+CM=\sqrt{41}+\sqrt{28}=\sqrt{41}+2\sqrt{7}$

1





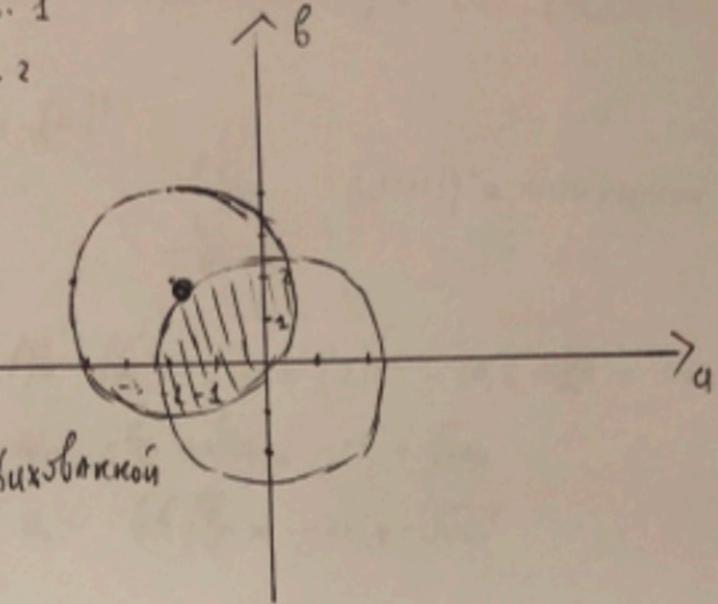
2) $DC=DM-CM=\sqrt{41}-2\sqrt{7}$

Ответ: $\sqrt{41}\pm2\sqrt{7}$

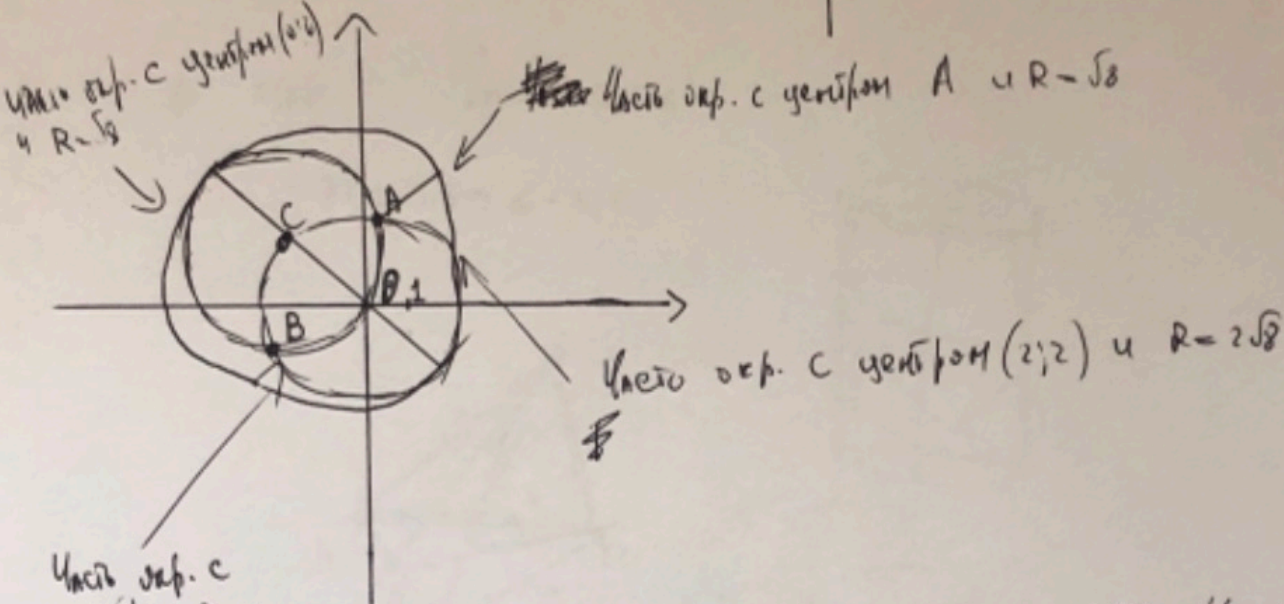
$\boxed{№3}$ Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le -4a+4b\\ a^2+b^2\le 8\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8 & \leftarrow \text{окр. 1}\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8 & \leftarrow \text{окр. 2}\\ a^2+b^2\le 8 & \leftarrow \text{окр. 3}\end{cases}$$



центр $(x;y)$ 1ой окр. должен находится на расстоянии $\le\sqrt{8}$ от заштрихованной области



Найдем S фигуры. $\triangle BCO$ и $\triangle ACO$ – р/с. Сторона равна $\sqrt{8}$.

Площадь маленьких секторов с центрами A и B – это вместе $\frac{1}{3}$ S круга с $R=\sqrt{8}$ $\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

Площадь остальн. части – это S 2х секторов с углами по 120° окр. с $R=2\sqrt{8}$ минус площадь ромба ACBO.

$$\frac{2}{3}(2\sqrt{8})^2\cdot\pi-(\sqrt{8})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{64\pi}{3}-4\sqrt{3}$$

$$\frac{8\pi}{3}+\frac{64\pi}{3}-4\sqrt{3}=24\pi-4\sqrt{3}$$

Ответ: $24\pi-4\sqrt{3}$

Черновик

$x_1+x_2=-18$

$x_1\cdot x_2=70$

$\sqrt{246}$

246	2
123	3
41	1

$441-(200-5)=441-800+5=241+5=246$

$-21-15{,}5 < 36{,}5$

$70=7\cdot10=7\cdot2\cdot5$

$D/4=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=9^2-70=11=(\sqrt{11})^2$

$x_1=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{D/4}}{a}=\frac{-9+\sqrt{11}}{}$

$x_2=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{D/4}}{a}=\frac{-9-\sqrt{11}}{}$

21×21: 21, 42, 441

$(20+1)^2=400+40+4$

$D/4=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(21)^2-195=441-195$

$a_1=-\frac{b}{2}+\sqrt{D/4}=-21+\sqrt{246}$

$a_2=-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{D}{4}}=-21-\sqrt{246}$

$-9+\sqrt{11}$

$-9+\sqrt{11}$ V

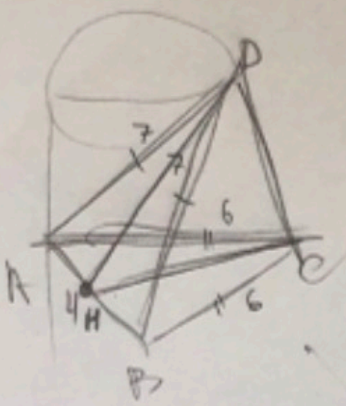
15×15: 75, 15, 225

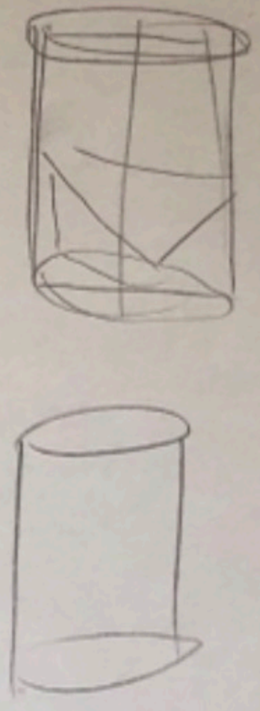
~~246~~

$15^2 < 246 < 16^2$

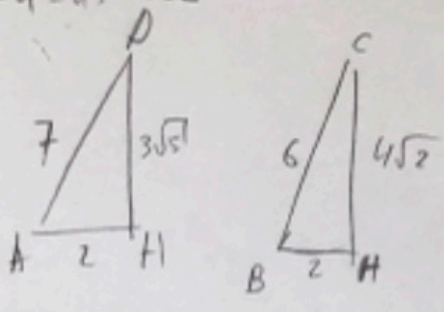
$-21+15{,}5 < -5{,}5$

16×16: 96, 16, 256





$49-4=45=3\sqrt5$



$36-4=32=16\cdot2=$

$\cancel{(3\sqrt5)^2}-\sqrt{45-32}=\sqrt{13}$

21105015 (U873884 M1305182)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21105015**

ID профиля: **873884**

Вариант 23

Чистовик

Вариант 23

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 22 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$$

$a; b; c \in \mathbb{N}$

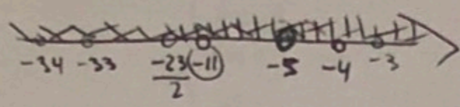
$2^{16} \cdot 11^{19} = (2 \cdot 11)^{16} \cdot 11^3 = (22)^{16} \cdot 11^3$

21105015 (U873884 M1305183)

№5 Чистовик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$; $\log_{(x+4)^2}(x+34)$; $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

1) ОДЗ:
$$\begin{cases} x+34>0 \\ x+34\neq 1 \\ 2x+23>0 \\ (x+4)^2\neq 1 \\ x\neq -4 \\ 2x+23\neq 1 \\ -x-4>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-34 \\ x\neq -33 \\ x>\frac{-23}{2} \\ x\neq -3 \\ x\neq -5 \\ x\neq -11 \\ x<-4 \end{cases}$$



$x\in\left(\frac{-23}{2};-4\right)$

2) Пусть $\sqrt{x+34}=a$; $\sqrt{2x+23}=b$; $x+4=c$

Сл-но, ~~$\log_{\sqrt{a}} b$; $\log_{c^2} a$; $\log_{\sqrt{b}} -c$~~

$\log_{a^2}(b^2)$; $\log_{c^2} a^2$; $\log_b(-c)$

$\log_{c^2} a^2 = \log_c a$

$\log_a b^2 = 2\log_a b$

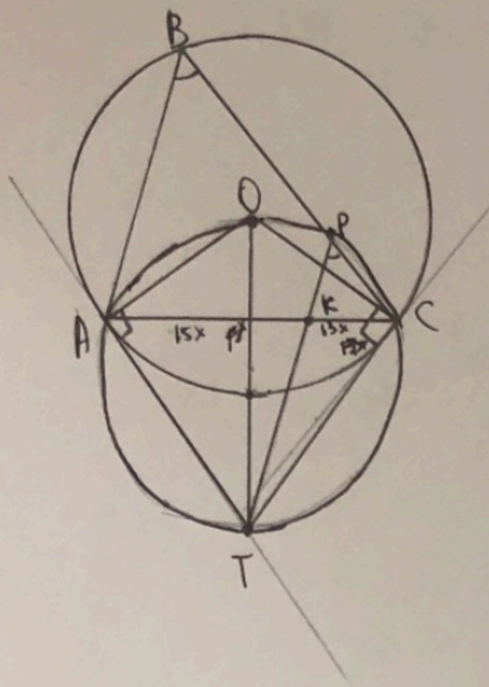
$\log_b(-c) = \log_b(-c)$

~~Ответ~~ $\log_b(-c)$ должен быть на 1 больше остальных.

21105015 (U873884 M1305183)

~~черн~~ №6

Чистовик



а) OT – сер. перп. к AC. $\angle OAT = \angle OCT = 90°$

Сл-но, OT – диаметр окр.

• $\breve{AT}$ и $\breve{CT}$ равны => $\angle AOT = \angle TOC = \angle APT = \angle TPC$ (опираются на равн. дуг).

Они равны углу B т.к. $\angle AOC$ – центральный, а $\angle B$ – соотв. вписанный.

$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{\Delta APK}}{S_{\Delta KPC}} = \frac{15}{13}$$

$\Delta KPC \sim \Delta ABC$ по 2м углам ($\angle P = \angle B$; $\angle C$ – общий)

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KPC}} = k^2 = \left(\frac{28x}{13x}\right)^2 = \frac{28^2}{13^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{28^2}{13^2} \cdot P_{KPC} = \frac{28^2}{13^2} \cdot 13 = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$$

$S_{ABC} = \frac{784}{13}$

б) ~~Т.К.~~ ~~AB~~ $AB \parallel TP$ т.к. $\angle B = \angle P$ (по пункту а)

$\angle TPC = \angle TAC$ (~~вписан~~ опир. на одну дугу)

$\angle TAC = \angle ACB$ (как внутр. нак. леж. при $\parallel$ прямых); $\angle ACB = \angle KPC$

сл-но, ΔKPC р/б (по пр-ку); $\angle ACB = \angle ATP$ (как впис. на одну дугу)

сл-но, $\angle PAC = \angle ATP \Rightarrow \Delta AKT$ р/б (по пр-ку)

сл-но, $AK = KT$; $KP = KC$

~~Т.К. Δ KPC~~ сл-но, ABC р/б (т.к. он подобен ΔKPC).

$AB = AC$

Найдем $\sin \angle ABC$: ($\angle ABC = \alpha$)

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{16}{49} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{49+16}{49}$$

$$55\cos^2\alpha = 49 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{49}{55}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{49}{55} =$$

$$= \frac{55-49}{55} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{55}}$$

~~$AB \cdot BC \cdot \sin\alpha$~~ Найдем $\sin\angle BAC$.

$\angle BAC = 180 - 2\alpha \Leftrightarrow \sin\angle BAC = \sin(\Pi - 2\alpha) \Leftrightarrow \sin \Pi - 2\alpha = \sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{55}} \cdot \frac{7}{\sqrt{55}} = \frac{2 \cdot 28}{55}$$

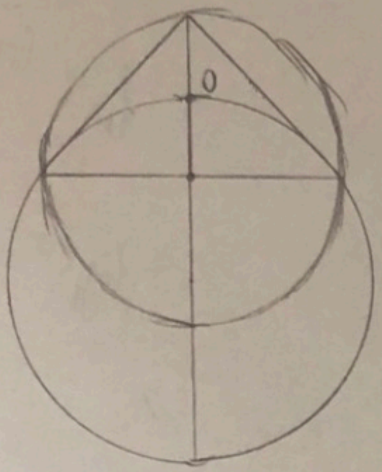
$$S_{ABC} = \frac{AC^2 \sin\angle BAC}{2} \Leftrightarrow \frac{784}{13} = \frac{x^2 \cdot \sin\angle BAC}{2} \Rightarrow \frac{28^2}{13} = \frac{x^2 \cdot 2 \cdot 28}{55}$$

$$\frac{28 \cdot 55}{13 \cdot 2} = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{28 \cdot 55}{13 \cdot 2}}$$

Ответ: ~~$\sqrt{\frac{28 \cdot 55}{13 \cdot 2}}$~~ $\sqrt{\frac{14 \cdot 55}{13}}$

3

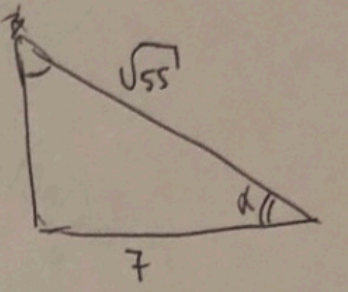
Черновик



$4^2+7^2=$

$16+49=55$

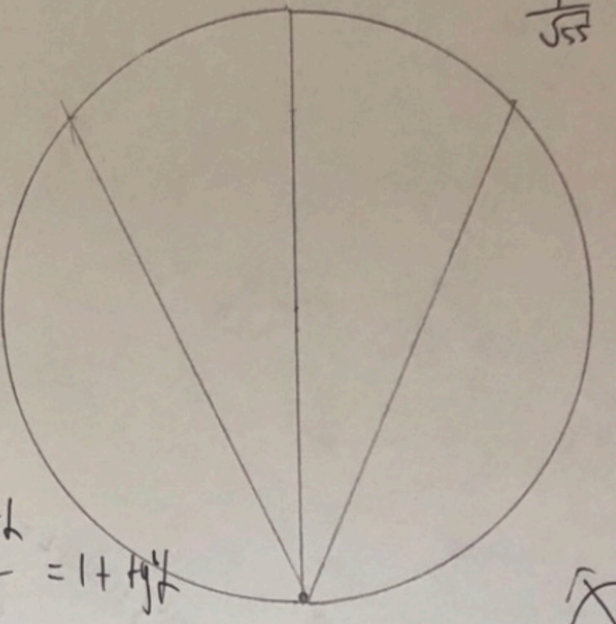
tg



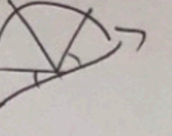
$\frac{4}{\sqrt{55}}=\sin\alpha$

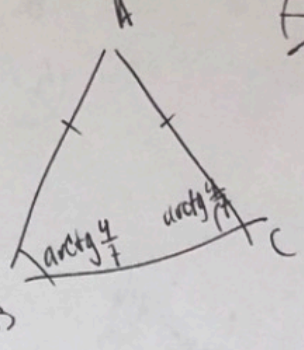
$\cancel{\frac{14\cdot x\cdot 55}{13}}$

$\cancel{28}$



tg $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha$





НОД $\longrightarrow$ $a \vdots b = c$

НОК $= m = 2^{16} \cdot 11^{19} = (22^{16}) \cdot 11^3$

$$\begin{cases} a = 22 \cdot t \\ b = 22 \cdot l \\ c = 22 \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \vdots a \\ m \vdots b \\ m \vdots c \end{cases}$$

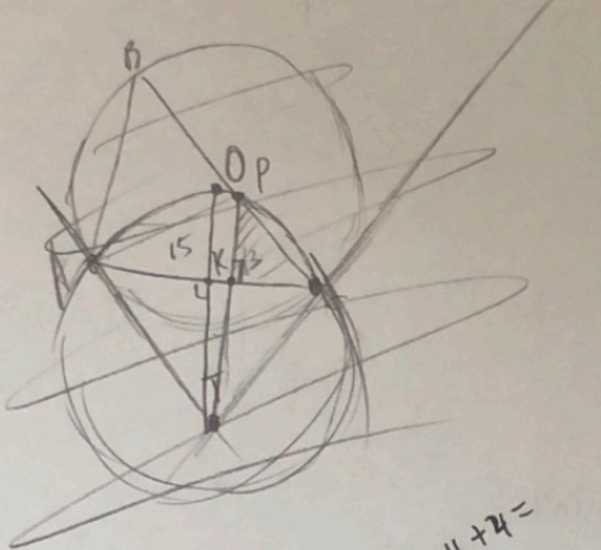
$$\left((x+4)-1\right)\left((x+4)+1\right) \neq 0$$

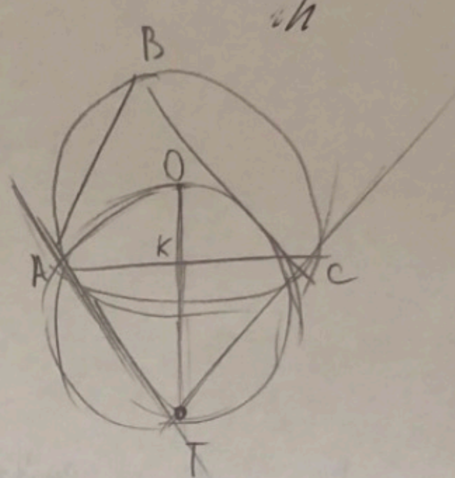
$$\log_a(ab) = \log_a + \log_a b$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

A





$(30-2)^2 = 300^2 - 2 \cdot 30 \cdot 4 + 4 =$
$= 900 - 120 + 4 =$
784

Найди S_{ABC}

$S_{ABC} = \frac{784}{13}$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{4}{7}$

$AC = ?$

$AC = AK + KC$

$\Delta AKT \sim \Delta PKC$

$\frac{AK}{PK} = \frac{KT}{KC} = \frac{AT}{PC}$