Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104907**

ID профиля: **853774**

Вариант 23

Чистовик

№1 S - сумма первых 6 ↗ ар. пр.;

$a_{10} a_{16} > S + 39$; $a_{11} \cdot a_{15} < S + 55$; a_1 - ?

$a_{10} = a_1 + d \cdot 9$, где $d > 0$ по усл.

$a_{16} = a_1 + 15d$,

$(a_1 + d9)(a_1 + 15d) > \frac{2a_1 + 5d_1}{2} 6 + 39$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < \frac{2a_1 + 5d_1}{2} 6 + 55$

(2) $a_1^2 + 24da_1 + 9 \cdot 15 d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

(1) $a_1^2 + 24da_1 + 10 \cdot 14 d^2 < 6a_1 + 15d + 55$

(1)-(2) $\Rightarrow$ $(10 \cdot 14 - 9 \cdot 15) d^2 < 55 - 39 = 16$

$5(28 - 27) d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5} = 3,2$

(*) $d < \frac{4}{\sqrt5}$, т.к. посл. сост. из целых чисел $\Rightarrow$ $d = 1$
и $d > 0$

(т.к. $d^2 = 1, 2, 3$; из которых лишь 1 п. кв.)

($d^2 = 1, 2, 3$ т.к. $a_i; a_j$ тоже целое)

(1) $\xRightarrow{(*)}$ $a_1^2 + 24da_1 + 10 \cdot 14 d^2 = a_1^2 + 24a_1 + 10 \cdot 14 < 6a_1 + \overbrace{15 + 55}^{70}$ (3)

(2) $\xRightarrow{(*)}$ $a_1^2 + 24a_1 + 9 \cdot 15 > 6a_1 + \overbrace{15 + 39}^{54}$ (4)

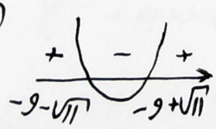
$15 \cdot 9 = 135$; $135 - 54 = 84$

(3): $a_1^2 + 18a_1 + 10 \cdot 14 - 70 < 0$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$D/4 = 81 - 70 = 11$

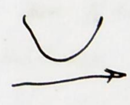
$a_{1_0} = -9 \pm \sqrt{11}$



(4): $a_1^2 + 18a_1 + 9 \cdot 15 - 54 > 0$

$a_1^2 + 18a_1 + 84 > 0$

$D/4 = 81 - 84 < 0$



a любое

$a_1 \in (-9 - \sqrt{11}; -9 + \sqrt{11})$

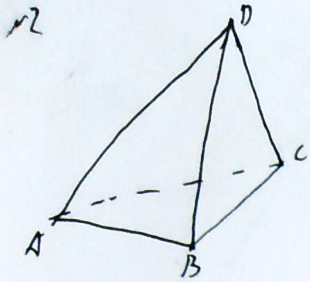
$3 < \sqrt{11} < 4$ $\quad -9 - \sqrt{11} < -9 - \sqrt9 = -9 - 3 = -12$

$-9 + \sqrt{11} > -9 + \sqrt9 = -6$

Ответ: $a_1: \{-12; -11; -10; -9; -8; -7; -6\}$

все (x, y) ц. кр.

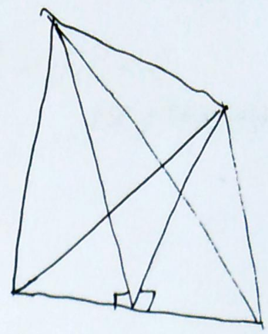
№2

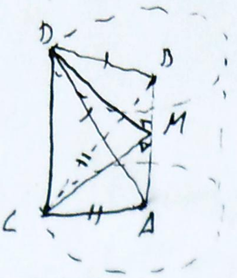


$AB = 4$; $AC = CB = 6$; $AD = DB = 7$;

$CD \parallel$ оси цилиндра;

Чистовик





- Заметим, радиус цилиндра определяется положением AB.

- ~~…~~ $M \in AB$, $BM = MA$.
  т.к. $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ равнобед, то DM и CM – высоты.

(1) т.к. $DM \perp AB$ и $CM \perp AB \Rightarrow CDM \perp AB$

т.к. $CD \in CDM$ и $CD \parallel$ оси цилиндра $\overset{(1)}{\Rightarrow} AB \perp$ оси цил; $\Rightarrow AB \parallel$ основ. цил.

- рассмотрим п-ть $\alpha \parallel$ основанию цилиндра и $AB \in \alpha \Rightarrow$

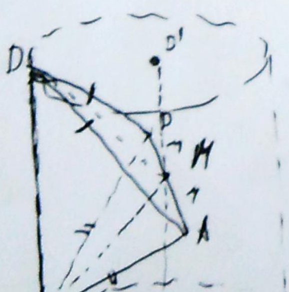
α сечет цилиндр по окружности радиуса цилиндра

O – центр цилиндра; $AB = 4$;

$r_{мин} = 2$, т.к. $D \geqslant$ любой хорды $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2r \geqslant$ любой хорды, $\Rightarrow 2r \geqslant 4 \Rightarrow r \geqslant 2$

$r_{мин} = 2$. AB – диаметр.



$D'C'$ – прямая $\parallel DC$; $D', D \in$ одной пл-ти $\parallel$ оси;

$C', C \in$ одной пл-ти $\parallel$ оси; $\Biggr\} \Rightarrow |DC| = |D'C'|$

$M \in D'C' \Rightarrow D'C'$ – ось цилиндра.

$CM = \sqrt{CA^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32}$

$CC' = r$, т.к. $D'C'$ – ось цилиндра;

$MC' = \sqrt{CM^2 - CC'^2} = \sqrt{32 - 4} = \sqrt{28}$

$DM = \sqrt{DA^2 - r^2} = \sqrt{49 - 4} = \sqrt{45}$

$D'M = \sqrt{DM^2 - r^2} = \sqrt{45 - 4} = \sqrt{41}$ (т.к. $DD' = r$)

$D'M + MC' = D'C' = DC = \sqrt{28} + \sqrt{41}$

~~$DC = \sqrt{28} + \sqrt{41}$~~

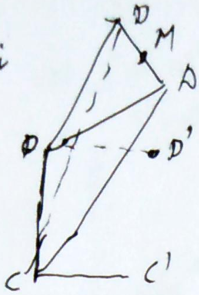
для случая, когда $AD \cap D'C'$,

рассмотрим случаи II и III

2

Чистовик

II случай



D' между C' и M

$DC = D'C' = MC' - MD' = \sqrt{28} - \sqrt{41} < 0$

не реализовывается

III случай

C' между D' и M

$DC = D'C' = MD' - MC' = \sqrt{41} - \sqrt{28}$

Ответ: DC может быть равен: $\sqrt{28} + \sqrt{41}$; $\sqrt{41} - \sqrt{28}$;

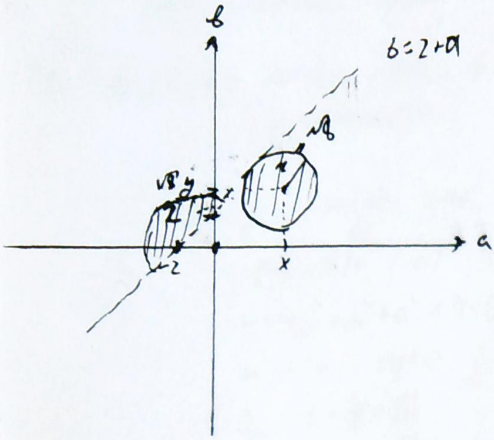
Чистовик

... все (x, y) у. ур.

Чистовик

№3 $M = \{(x,y) \mid \exists\, a, b \quad (*) - \text{вып.}\}$

$$(*)\ \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 8 & (1) \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a + 4b,\ 8) & (2) \end{cases}$$



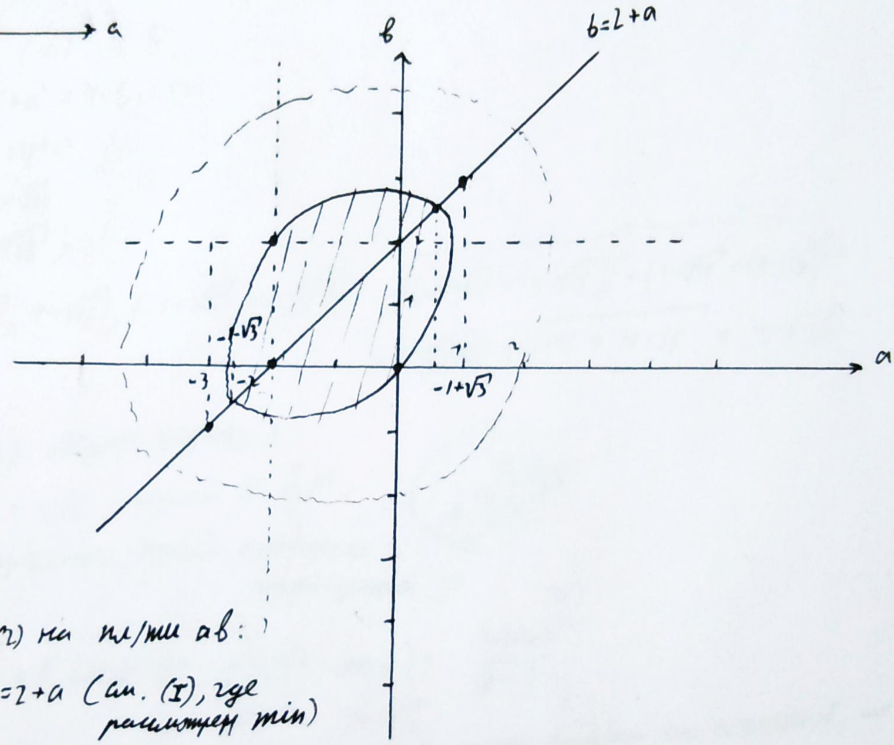
$-4a + 4b \le 8$

(I) $b \le 2 + a$

$a^2 + b^2 \le -4a + 4b$

$(a+2)^2 - 4 + (b-2)^2 - 4 = 0$ (II)

$(a+2)^2 + (b-2)^2 = 8$



Рассмотрим решение (2) на пл/же ab:

для точек выше $b = 2 + a$ (см. (I), где рассмотрен min)

(2) - есть окр. с центр. в т. $(0;0)$ и $R = \sqrt{8}$;

для точек ниже $b = 2 + a$

(2) - есть окр. с центр. в т. $(-2;2)$ и $R = \sqrt{8}$ (см (II))

• найдем, в каких точках окр. пересекаются и пересекают $b = 2 + a$;

$a^2 + b^2 = 8$

$a^2 + 4 + 4a + a^2 = 8$

$a^2 + 2a - 2 = 0$ $\qquad D_1 = 1 + 2 = 3$ $\qquad -3 < -1 - \sqrt{3} < -2$

$a = -1 \pm \sqrt{3}$ $\qquad 0 < -1 + \sqrt{3} < 1$

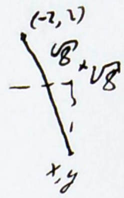
(1) $\Rightarrow (a-x)^2 + (b-y)^2 \le 8$ - круг с ц. в x, y. Заметим, что множество координат центров окружностей обр. искомую M.

4

Чистовик

когда x, y лежат ниже $b = 2+a$, то подходят все (x, y) ч. пр. такие, что $(-2-x)^2 + (2-y)^2 \leq (\sqrt{8}+\sqrt{8})^2 = 4\cdot 8 = 32$ (3)

(усл. кас. кругов, опр. $\Leftrightarrow$ расст. меж центрами $= r_1 + r_1$)



(3) – уравнение круга с ц. $(-2; 2)$ и $R = 2\sqrt{8}$

когда x, y лежат выше $b = 2+a$, рассуждение аналогичны, а картина симметрична. ($(0,0)$ и $(-2,2)$ симметр. отн $b = 2+a$)

Найдём, когда опр $(-2-a)^2 + (2-b)^2 = 4\cdot 8$ пересекают $b = 2+a$;

$(-2-a)^2 + (-a)^2 = 4\cdot 8$

$4 + 4a + a^2 + a^2 = 4\cdot 8 = 32$

$a^2 + 2a - 14 = 0$

$D_{/4} = 1 + \cancel{14} = 15$

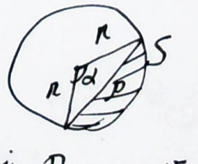
$a = -1 \pm \sqrt{15}$;

$p((-1-\sqrt{15}, 1-\sqrt{15}), (-1+\sqrt{15}, 1+\sqrt{15})) = \sqrt{(-1-\sqrt{15}-(-1-\sqrt{15}))^2 + (1-\sqrt{15}-(1+\sqrt{15}))^2} =$

$= \sqrt{4\cdot 15 + 4\cdot 15} = 2\cdot\sqrt{30}$

учитывая (3) сводим задачу к:

в опр с $R = 2\sqrt{8}$, найти $S = \frac{1}{2}M$, полученное путём проведение хорды длиной p



$p^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha \Rightarrow \frac{p^2}{2R^2} = (1-\cos\alpha) = \frac{\cancel{4}\cdot \cancel{30}^{15}}{\cancel{2}\cdot \cancel{32}_{8}}$

$\cos\alpha = -\frac{7}{8}$ (т.к. центры опр. по разные стороны от сегментов, то $\alpha < \pi$)

$\alpha = \pi - \arccos\frac{7}{8}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$S = \frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot\alpha - \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$

$M = 2S = R^2(\alpha - \sin\alpha) = R^2\left(\left(\pi - \arccos\frac{7}{8}\right) - \frac{\sqrt{15}}{8}\right) = 32\left(\pi - \arccos\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{15}}{8}\right)$

5

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104907**

ID профиля: **853774**

Вариант 23

№4 найти кол-во (a, b, c) удовл.: Чистовик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22; & (2) \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} & (1) \end{cases}$$

НОК - наименьшее общее кратное, ~~кратно~~ есть число делящееся и на a, и на b, и на c. и минимальное из таких.

(I) $(1) \Rightarrow$ a, b, c при разложении на простые дают $1\cdot 2^{\alpha}\cdot 11^{\beta}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\alpha \le 16$; $\beta \le 19$

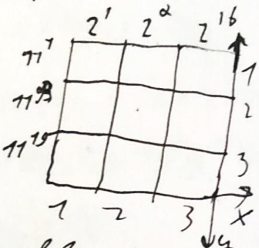
также, из $(1) \Rightarrow$ в одном из чисел 2^{16} при разложении,
и в одном из a, b, c 11^{19} при разложении на простые

(II) $(2) \Rightarrow$ при разложении и получении $2^{\alpha}\cdot 11^{\beta}$, $\alpha \ge 1$; $\beta \ge 1$; , т.к. все делятся на 22

. также НОД, есть ~~наиболь~~ $2^{\alpha'}\cdot 11^{\beta'}$, где α' и β' наименьшие степени двойки и одиннадцати в ~~разложениях~~ a, b, c

(II), (I) $\Rightarrow$ есть число с 2^{16}, и с 2^{1}; есть число с 11^{19} и 11^{1}, степени $2^{\alpha}, 11^{\beta}$
$\alpha \in [1;16]$
$\beta \in [1;19]$

Заметим система симметрична относительно a, b, c;

Нарисуем таблицу: 

каждая клетка есть разложение числа на простые
чтобы варианты не повторялись, a, b, c не должны быть на одной в-ли и г-ли (таким образом, гарантируем $2^1, 2^{16}, 11^1, 11^{19}$)

a в 1-й столбец, b во 2-й, c в 3-й.

$N(a(1,1), b(2,2), c(3,3)) = 14\cdot 17$ (x, y коорд. столбца и строки
$N(a(1,1), b(2,3), c(3,2)) = 14\cdot 17$ N - кол-во способов набрать тройку)
$N(a(1,2), b(2,2), c(3,3)) = 14\cdot 17$

< легко, заметить, α мы выбираем 14-ю способами, β 17-ю способами) >
т.к. $\alpha=1$; $\alpha=16$; $\beta=1$; $\beta=19$ рассматриваются отдельно

$N(a(1,y), b, c) = 3\cdot 2(14\cdot 17)$ - повторений т.к. тройки упорядочены, нет.

т.к. система симметрична от a, b, c $N = 3\cdot(3\cdot 2(14\cdot 17)) = 18\cdot 14\cdot 17 =$

$= 4284$

1 (заметим, a, b, c побывали в каждой клетке $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ рассмотрено все)
(в табл. $\alpha \in [2;15]$ $\beta [2;18]$, чтобы не было повторений)

Ответ: 4284

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 14 \\ \hline 72 \\ 18 \\ \hline 252 \\ \times\ 17 \\ \hline 1764 \\ 252 \\ \hline \end{array}$$

№6

Чистовик

№5 $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$Df: \begin{cases} x > -11,5 \\ x < -4 \\ x \neq 5 \\ x \neq 11 \end{cases}$ Замена $X = \sqrt{x+34}$

$Y = -x-4$

$Z = \sqrt{2x+23}$

$\frac{4}{2}\log_X Z$; $\log_Y X$; $2\log_Z Y$

$2\log_X Z$; $\log_Y X$; $2\log_Z Y$

$2\log_X Z = 2\frac{\log_Y Z}{\log_Y X} = 2\frac{1}{\log_Z Y \log_Y X}$

$2\log_Z Y = 2\frac{\log_X Y}{\log_X Z} = 2\frac{\log_Z X}{\log_Y X}$

Если $2\log_X Z = 2\log_Z Y$

$\frac{\log_Z X}{\log_Y X} = \frac{\log_Y Z}{\log_Y X} \Rightarrow \log_Z X = \log_Y Z$

тогда: $\log_Y X + 1 = 2\log_Y Z \Rightarrow Z^2 = XY$

$2\log_X Z = 1 + \log_Y X = \log_Y XY \Rightarrow Z^2 = XY$

$2\log_Z Y = \log_Y XY = 2\frac{1}{\log_Y \sqrt{XY}} = 2\frac{1}{\frac{1}{2}\log_Y XY} = 4\frac{1}{\log_Y XY} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_Y^2 XY = 4;$

$\log_Y X + 1 = \log_Y XY = \pm 2; \Rightarrow \log_Y X = 1; -3;$

$\log_Z X = \log_Y Z = \frac{\log_Y X}{\log_Y Z} \Rightarrow \log_Y^2 Z = \log_Y X \Rightarrow \log_Y X = 1;$

$X = Y$

$\sqrt{x+34} = -x-4 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = x + 34$

$x^2 + 7x - 18 = 0$

$D = 49 + 4 \cdot 18 = 49 + 72 = 121$

$x = \frac{-7 \pm 11}{2} = -9; 2$

$-9 \in Df$; $2 \notin Df$

$16 \cdot 4 = 32$; $\cdot 4 = 72$

(2) $\boxed{\text{тогда } \underline{1} = \underline{3},\ x = -9;}$

2й случай

Чистовик

$$2\log_x z = \log_y x \Rightarrow 2\log_x z;$$

$$\log_y x = 2\log_z y + 1$$

$$\log_y \frac{x}{y} = 2\log_z y;$$

$$2\log_x z = 2\log_z y + 1$$

$$\frac{2}{\log_{z^2} x} = \log_x z^2 = \log_z y^2 + 1 = \log_z y^2 z$$

$$2\log_x z = \log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$$

$$\log_y x = 2\log_z y + 1$$

где $\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_x z} + 1 \Rightarrow \log_y x - 1 = \log_z^2 x$

$$\frac{\log_z x}{\log_x z} = \log_z^2 x;$$

$$2\log_x z = \log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$$

$$2\log_x z = 2\log_z y + 1$$

$$2\log_x z = \frac{\log_z x}{\log_x z} + 1 = \log_z^2 x + 1$$

$$\frac{2}{\log_z x} = \log_z^2 x + 1$$

$$\log_z^3 x + \log_z x = 2$$

$\log_z x = 1$ и $y^2 + y + 2 = 0$

$D = 1 - 4 < 0$

нет нет

$$\begin{array}{l|l} y^3 + 0y^2 + y - 2 & y-1 \\ \underline{y^3 - y^2} & \overline{y^2 + y + 2} \\ \quad y^2 + y & \\ \quad \underline{y^2 - y} & \\ \quad\quad 2y - 2 & \end{array}$$

$$x = z$$

$$\sqrt{x+34} = \sqrt{2x+23}$$

$$x + 34 = 2x + 23$$

$x > 0 \notin D_f$

3й случай разб симметрично $y = z$

$$x^2 + 8x + 16 = 2x + 23$$

3

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 + 7 \cdot 4 = 28 + 9 = 37$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{1}$$

$$x = -3 - \sqrt{37}$$

Ответ: $x = -9$; $x = -3 - \sqrt{37}$

.1

№5

$$\overset{A}{\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)},\ \overset{B}{\log_{(x+4)^2}(x+34)},\ \overset{C}{\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)}$$

x-? два равны; третий > на 1

$A, B, C;$ $\quad A = B = C \pm 1;$ (I)

$A = B \pm 1 = C;$

$A \pm 1 = B = C$

$$Df \begin{cases} x > -34; \\ x \neq -33; \\ 2x > -23 \Rightarrow x > -11{,}5 \\ x \neq -3; -5; \\ 2x+23 > 0 \\ 2x+23 \neq 1 \Rightarrow x \neq -11 \\ -x-4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -11{,}5; \\ x < -4; \\ x \neq -5; \\ x \neq -11; \end{cases}$$

$$\text{(I)} \begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34) \\ \log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) - 1; \end{cases}$$

Замена: $x = \sqrt{x+34};$
$y = -x-4;$
$z = \sqrt{2x+23};$

$\log_x z^2;\ \log_{y^2} x^2;\ \log_z y$

$\log_{y^2} x^2 = \log_y x$

$x \vee y$

$x+34 \vee 2x+23$

$11 \vee x$

$$\text{(I)} \begin{cases} \log_x z^2 = \log_y x = \dfrac{\log_x x}{\log_x y} \\ \log_x z^2 = \log_z y \pm 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\log_x z = \log_y x = A = \frac{\log_z x}{\log_z y}$$

$A = \log_z y \pm 1;$

№6

$\triangle ABC$ – остроуг., впис в w;

O – ц w.

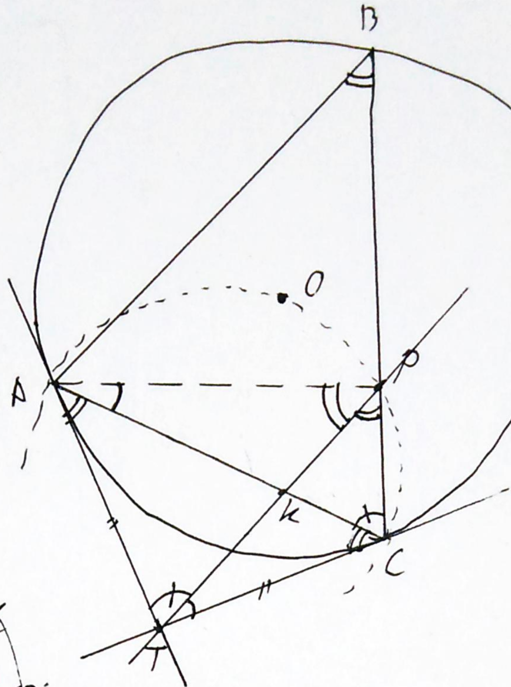
Опр $AOC \cap BC = P$

AT, TC – кас к w;

$TP \cap AC = K$;

$S_{APK} = 15$;

$S_{CPK} = 13$



a) (1) $\angle KAT = \angle KCT$ опир на $\breve{AC}$

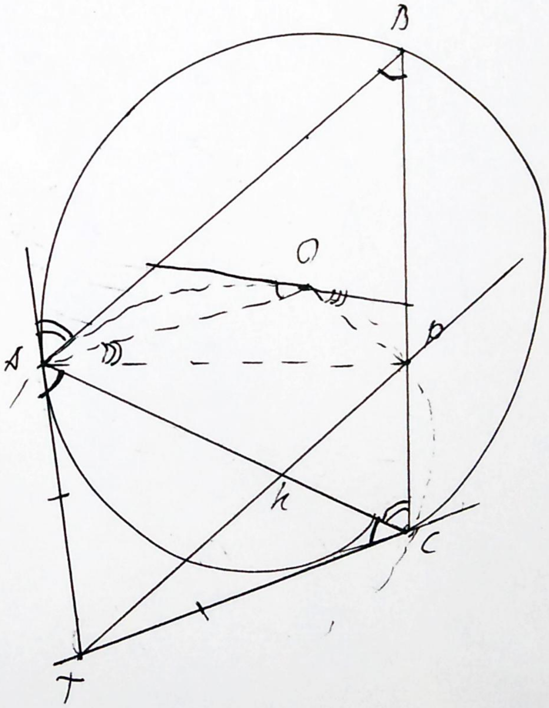
$\angle B = \angle KAT$ опир на $\cup AC$;

(1) $\Rightarrow$ ATC – равнобед $\Rightarrow$ $AT = TC$;

$\angle ATC = \angle PAC$ опир на $\cup PC$

$\angle PCA = \angle PTA$ опир на $\cup AP$;

$\angle APT = \angle ACT$ опир на $\cup A$



2-й случай

~~[illegible]~~

обр замена в

$$\left[\begin{array}{c} x \trianglerighteq y \\ x+34 \trianglerighteq 2x+23 \\ 11 \trianglerighteq x \end{array}\right]$$