Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104641**

ID профиля: **350779**

Вариант 23

Чистовик

1. $\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S+39 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+55 \end{cases}$

d – шаг прогрессии, $d>0$, $d \in \mathbb{Z}$, т.к. все члены прогрессии целые

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 15d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$a_{10} \cdot a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) = a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2$

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55 \end{cases}$

$5d^2 + 6a_1 + 15d + 39 < a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55$

$5d^2 + 6a_1 + 15d + 39 < 6a_1 + 15d + 55$

$5d^2 < 16$

$d^2 < 3{,}2$

т.к. $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z}$, то $d = 1$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \quad (\text{I})$

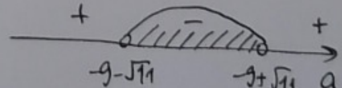
$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \quad (\text{II})$

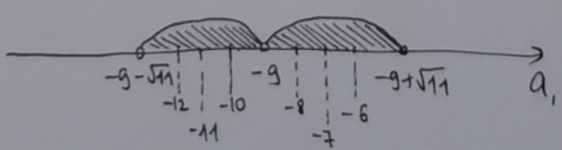
I $(a_1 + 9)^2 > 0$

$\Rightarrow a_1 \neq -9$

II $(a_1 + 9 + \sqrt{11})(a_1 + 9 - \sqrt{11}) < 0$



на числовой прямой:



$-9-\sqrt{11} < a_1 < -9+\sqrt{11}$ и $a_1 \neq -9$

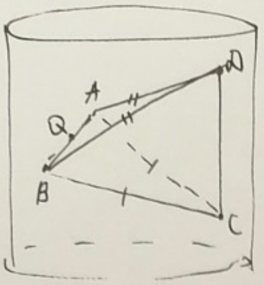
$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

1

Ответ: $-12; -11; -10; -8; -7; -6$

Чистовик

2.



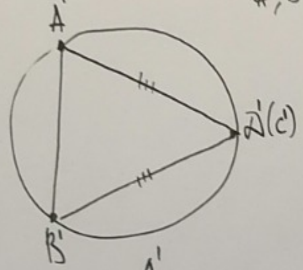
$AD = BD = 7$

$CB = CA = 6$

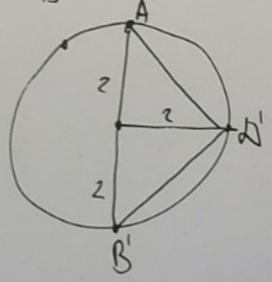
$AB = 4$

Т.к. A и B равноудалены от D, и от C то AB параллельно плоскости основания цилиндра, т.к. CD перпендикулярно ему.

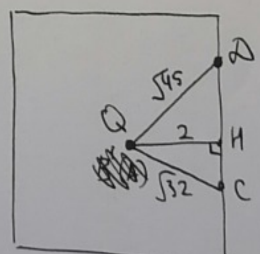
Нарисуем проекцию тетраэдра на нижнее основание цилиндра: A', B', D', C' - проекции соответственно A, B, D и C



тк. хорда $AB=4$ $\Rightarrow$ диаметр цилиндра хотя бы 4 $\Rightarrow$ минимальный радиус равен 2, тогда расстояние от AB до CD также равно 2.

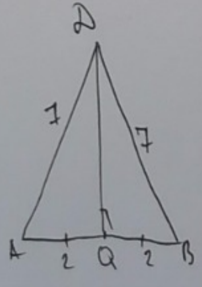


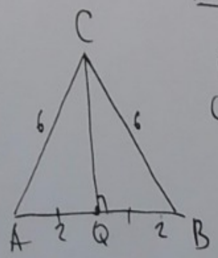
Изобразим проекцию тетраэдра на осевое сечение цилиндра, проходящее через CD



(Q - проекция A и B)

$QH = 2$ - расстояние от AB до CD





$$DQ = \sqrt{BD^2 - QB^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$$

$$CQ = \sqrt{CB^2 - QB^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$$

$$CD = CH + HD = \sqrt{QD^2 - QH^2} + \sqrt{CQ^2 - QH^2} =$$

$$= \sqrt{45-4} + \sqrt{32-4} = \sqrt{41} + 2\sqrt{7}$$

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

2

Чистовик

3. $\begin{cases} \text{I} & (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ \text{II} & a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8) \end{cases}$

I $\quad (a-x)^2+(b-y)^2 \le 8$

уравнение круга с центром в $(x;y)$ и радиусом $2\sqrt{2}$

II $\quad a^2+b^2 \le 8 \le -4a+4b$

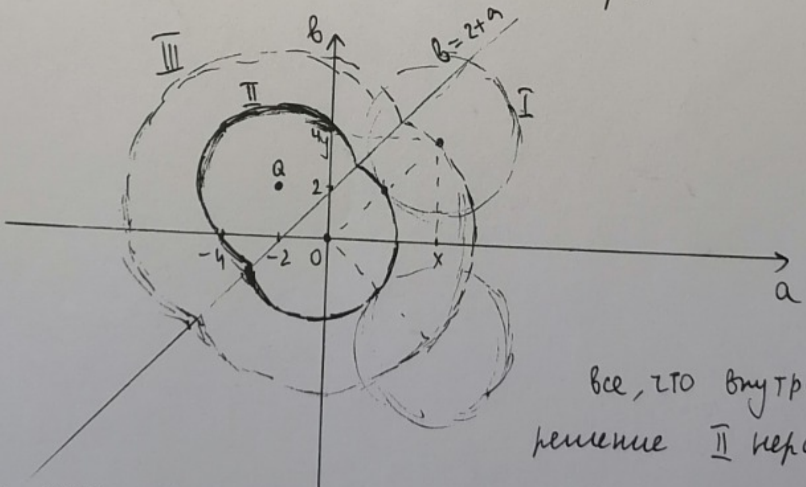
$2+a \le b$ и $a^2+b^2 \le 8$

полуплоскость ниже прямой $b=2+a$ — круг с центром $(0;0)$ и радиусом $2\sqrt{2}$

или $a^2+b^2 \le -4a+4b$ и $\cancel{a^2+b}$ $-4a+4b \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$ — $2+a \ge b$

круг с центром $(-2;2)$ и радиусом $2\sqrt{2}$ — полуплоскость ~~выше~~ прямой $b=2+a$



все, что внутри фигуры II решение II неравенства

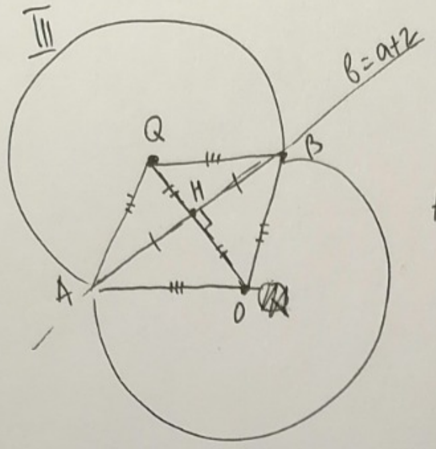
Чтобы система имела решение нужно, чтобы все пары $(x;y)$ лежали внутри фигуры III, такой что окружность $(a-x)^2+(b-y)^2=8$ касалась либо окружности $a^2+b^2=8$ либо $(a+2)^2+(b-2)^2=8$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ фигура III – 2 пересекающихся круга с радиусами $4\sqrt{2}$ и центрами в $(0;0)$ и $(-2;2)$, тогда площадь фигуры M такая же, как и у фигуры III

3

Чистовик

3.



$Q(-2;2)$
$O(0;0)$

$OQ = 2\sqrt{2} \Rightarrow OH = \sqrt{2}$

$OB = OA = QA = QB = 4\sqrt{2}$ как радиусы

$AB = 2HB = 2\sqrt{OB^2 - OH^2} = 2\sqrt{30}$

~~по теореме синусов~~

$\cancel{\frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = 2\cdot 4\sqrt{2}}$

$\cancel{\frac{2\sqrt{30}}{\sin(\angle AOB)} = 2\cdot 4\sqrt{2}}$

$\cancel{\frac{\sqrt{15}}{8} = \sin(\angle AOB)}$, ~~т.к. $\angle AOB$ тупой, то~~

$\cancel{\angle AOB = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}}$

$S_{AOB} = \frac{OH \cdot AB}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{30}}{2} = 2\sqrt{15}$

По теореме косинусов для $\triangle AOB$:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO\cdot OB \cdot \cos(\angle AOB)$

$120 = 64 - 64\cos(\angle AOB)$

$\cos\angle AOB = -\frac{7}{8} \Rightarrow \angle AOB = \pi - \arccos\frac{7}{8}$

Площадь части круга ниже прямой AB:

$S = \frac{\angle AOB}{2\pi}\cdot \pi \cdot AO^2 + S_{AOB} = \frac{(\pi - \arccos\frac{7}{8})\cdot 16\pi}{\pi} + 2\sqrt{15} =$

$= 16\pi - 16\arccos\frac{7}{8} + 2\sqrt{15}$

Т.к. площадь части круга выше AB, такая же как и у нижнего, то вся площадь фигуры Ⅲ

$S_{полн.} = 2S = 32\pi - 32\arccos\frac{7}{8} + 4\sqrt{15}$

Ответ: $32\pi - 32\arccos\frac{7}{8} + 4\sqrt{15}$

4

Черновик

$5d^2 + (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > S + 39 + 5d^2$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 55$

135
−15

11
120
− 39
81

$\cancel{S} + 39 + 5d^2 < \cancel{S} + 55$

$5d^2 < 16$

$d^2 < 3{,}2$

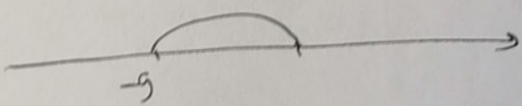
$d = 1$

$(a_1 + 9)^2$

81 − 70 = 11

$-9 \pm \sqrt{11}$

81 − 70



$S_{139} = 6a + 15 + 39$

$6a + 54$

$S_{55} = 6a + 70$

$a^2 + 24a + 135 > 6a + 54$

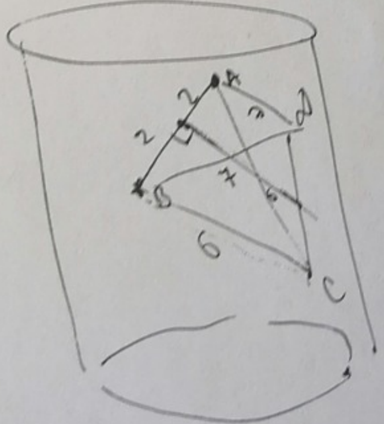
$a^2 + 18a + 81 > 0$

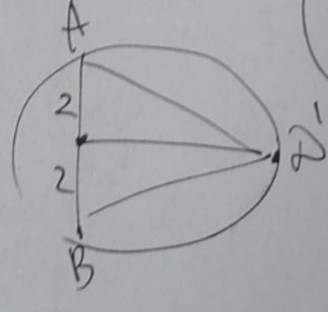
$(a+9)^2 > 0$ $a \neq -9$

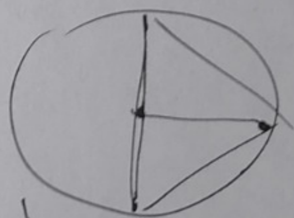
140 − 70

49 − 4

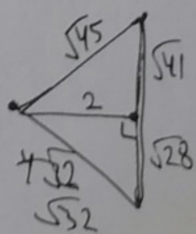
$a^2 + 18a + 70 < 0$







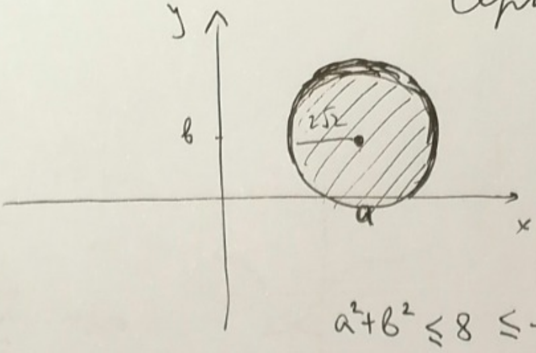
36 − 4



$\sqrt{41} + 2\sqrt{7}$

21104641 (U350779 M1303968)

Черновик



$a^2+b^2 \le 8 \le -4a+4b$

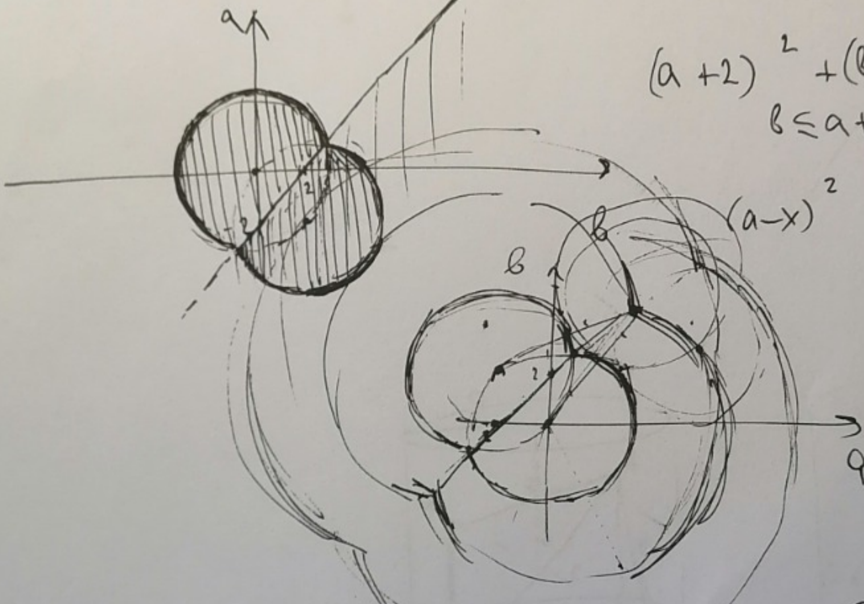
$a^2+b^2 \le -4a+4b \le 8$

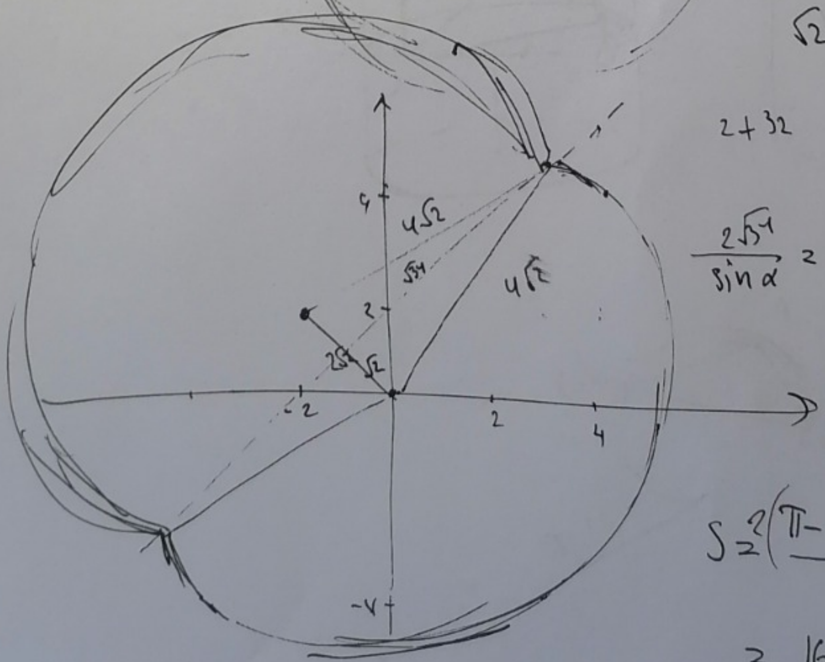
$b-a \le 2 \qquad b-2 \le a$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

$b \le a+2$

$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 8$





$\frac{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{34}}{2} = 2\sqrt{17}$

$2+32$

$\frac{2\sqrt{34}}{\sin\alpha} = 8\sqrt{2}$

$\frac{2\sqrt{17}}{8} = \sin\alpha$

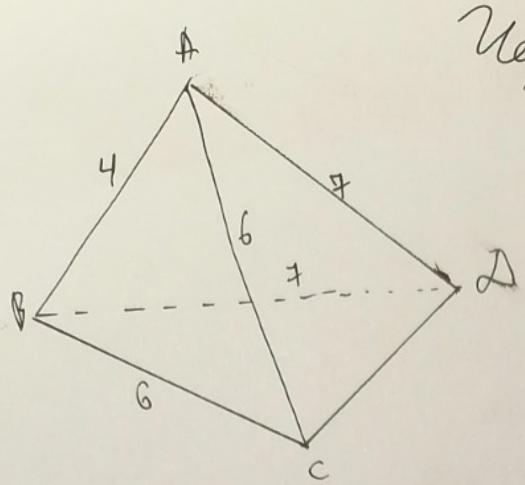
$\alpha = \cancel{\pi-}\arcsin\frac{\sqrt{17}}{8}$

$S = 2\left(\frac{\pi - \arcsin\frac{\sqrt{17}}{8}}{2\pi}\cdot\pi\cdot 32 + 2\sqrt{17}\right) =$

$= 16\pi - 16\arcsin$

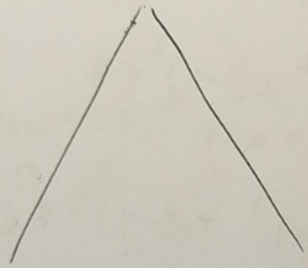
$32\pi - 32\arcsin\frac{\sqrt{17}}{8} + 4\sqrt{17}$

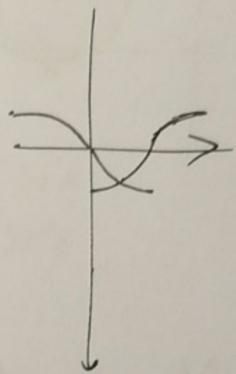
Черновик

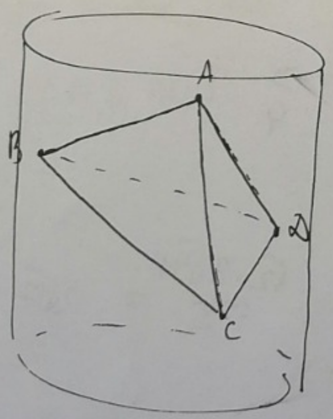


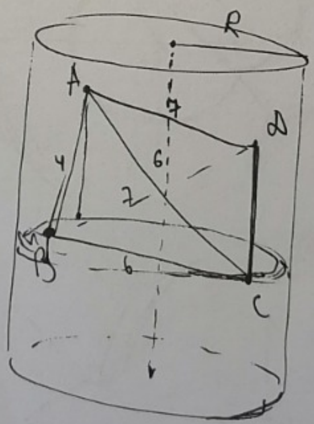
$$120 = 64 - \cancel{64}\cos\alpha$$

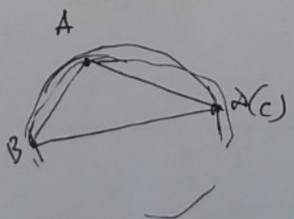
$$-\frac{56}{64} = \frac{7}{8}$$











Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104641**

ID профиля: **350779**

Вариант 23

4 $(x{+}24)^9 = 2x+23$

Чистовик

1. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 \\ НОК(a;b;c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$

во все a, b и c входят 2^1 и 11^1, и в не более 1 числа входит 2^i или 11^k (где $i>1$ и $k>1$)
хотя бы в 1 число входит ровно 2^1 или 11^1
и 2^{16} или 11^{19}

Тогда в числа могут входить такие степени:

2: 1, 1, 16 ← 3 способа распределить между a, b и c
1, 16, 16 ← 3 способа
1, 16 и любая от 2 до 15 ← $6 \cdot 14$ ← перестановки; т.к. от 2 до 15 включ. 14 чисел

всего способов распределить степени 2 : $3+3+6\cdot14 = 90$

11: 1, 1, 19 ← 3 способа
1, 19, 19 ← 3 способа
1, 19 и любая из [2;18] ← аналогично $6 \cdot 17$

способов : $3+3+6\cdot17 = 108$

для каждого случая распределения степеней 2 есть 108 способов распределить степени 11. ⇒
⇒ троек (a, b, c) всего $90 \cdot 108 = 9720$

Ответ: 9720.

1

21104641 (U350779 M1303969)

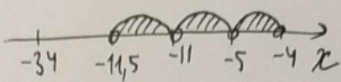
Чистовик

2. $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2\log_{x+34}(2x+23)$ пусть $(x+34)^a = 2x+23$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = 0{,}5\log_{-x-4}(x+34)$ $\cancel{(-x-4)^b = x+34}$ $(2x+23)^b = -x-4$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-4-x) = 2\log_{2x+23}(-4-x)$ тогда $(-x-4)^{\frac{1}{ab}} = x+34$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+23>0 \\ x+34>0 \\ -4-x>0 \\ 2x+23\neq 1 \\ x+34\neq 1 \\ -4-x\neq 1 \end{cases}$



Тогда у нас есть числа $2a$, $\frac{1}{2ab}$, $2b$ и 3 случая

I $\begin{cases} 2a=2b \\ 2a+1=\frac{1}{2ab} \end{cases}$

$a=b$

$2a+1=\frac{1}{2a^2}$

$4a^3+2a^2=1$

$(2a-1)(2a^2+2a+1)=0$

$a=0{,}5=b$

$\begin{cases} x+34=(2x+23)^2 \\ 2x+23=(x+4)^2 \\ (x+4)^4=x+34 \end{cases}$

$2x+23=x^2+8x+16$

$x^2+6x-7=0$

$x_1=-7$

$x_2=1\notin$ ОДЗ

$-7+34=(-14+23)^2$ (ложь)

$\Rightarrow$ реш. нет

II $\begin{cases} 2a=\frac{1}{2ab} \\ 2a+1=2b \end{cases}$

$4a^2b=1$

$b=a+0{,}5$

$4a^3+2a^2=1$

$a=0{,}5$

$b=1$

$\begin{cases} x+34=(2x+23)^2 \\ (x+4)^2=x+34 \\ 2x+23=-x-4 \end{cases}$ 3

$3x=-27$

$x=-9$

$-9+34=(-18+23)^2$ (истин.)

$(-9+4)^2=-9+34$ (истин.)

Решение -9. 8

2

Чистовик

$KC = \frac{0,8 \times \sqrt{65} \cdot 0,5}{2}$

Чистовик.

2. III

$$\begin{cases} \frac{1}{2ab} = 2b \\ 2b+1 = 2a \end{cases}$$

$4ab^2 = 1$

$a = b + 0,5$

$4b^3 + 2b^2 - 1 = 0$

$b = 0,5$

$a = 1$

$$\begin{cases} 2x+23 = x+34 \\ x+34 = (x+4)^2 \\ (x+4)^2 = 2x+23 \end{cases}$$

$x = 11 \notin ОДЗ$

~~$11+34 = (11+4)^2$ (ложь)~~

решений нет.

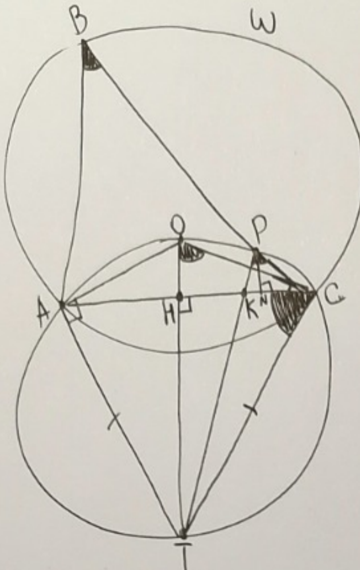
Ответ: при $x = -9$.

3

2 $S_{PKC} =$

Чистовик

3.



T находится на окружности, проходящей через A, O и C, т.к. если взять диаметр OD, то AT и CT пересекаются с окружностью в точке D $\Rightarrow T = D$

$\triangle AOT = \triangle COT$ по катету и гипотенузе: $AO = OC$ как радиусы ω, OT – общая гипотенуза

$\Rightarrow AT = CD \Rightarrow \angle AOT = \angle TOC$

$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC$, т.к. $\angle ABC$ – вписанный, $\angle AOC$ – центральный

$\Rightarrow \angle TOC = \frac{1}{2} \angle ADC = \angle ABC$

$\angle TPC = \angle TOC = \angle ABC$

т.к. опираются на $\overset{\frown}{TC}$

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по 2 углам: $\angle ABC = \angle KPC$, $\angle BCA$ – общий

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{AK+KC}{KC}\right)^2 = \left(1 + \frac{S_{APK}}{S_{KPC}}\right)^2$$

$$S_{ABC} = S_{KPC} \cdot \left(\frac{S_{KPC} + S_{APK}}{S_{KPC}}\right)^2 = \frac{13 \cdot (13+15)^2}{13^2} = \frac{784}{13} \quad (a)$$

Пусть $CH = 7x$; $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{4}{7} \Rightarrow \operatorname{tg}(\angle ABC) = \frac{4}{7}$

$\angle ACT = \angle AOT = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle ABC \Rightarrow \operatorname{tg}(\angle ACT) = \frac{4}{7}$

$OT \perp AC$, т.к. высоты равнобедренных $\triangle AOC$ и $\triangle ATC$ падают на середину AC в точку H

$\operatorname{tg}(\angle ABC) = \frac{TH}{HC} \Rightarrow TH = 4x$

$\operatorname{tg}(\angle ABC) = \frac{CH}{OH} \Rightarrow OH = \frac{49x}{4}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{15}{13} \Rightarrow AK = 7{,}5x$; $KC = 6{,}5x \Rightarrow HK = 0{,}5x$

$KT = \sqrt{HK^2 + HT^2} = \sqrt{0{,}25x^2 + 16x^2} = 0{,}5x\sqrt{65}$

$PN \perp AC$

$\triangle PKC \sim \triangle AKT$: по 2 углам $\angle CAT = \angle TPC$, $\angle AKT = \angle CKP$

$\frac{PN}{TH} = \frac{KC}{KT} = \frac{6{,}5x}{0{,}5x\sqrt{65}} = \frac{13}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{65}}{5} = 0{,}2\sqrt{65}$

$PN = 4x \cdot 0{,}2\sqrt{65} = 0{,}8x\sqrt{65}$

4

21104641 (U350779 M1303969)

Чистовик

3. $S_{PKC} = \frac{PN \cdot KC}{2} = \frac{0{,}8x\sqrt{65} \cdot 6{,}5x}{2} = 13$

$0{,}2x^2\sqrt{65} = 1$

$x = \sqrt{\frac{5}{\sqrt{65}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{65}}{13}}$

$AC = 14x = \frac{14\sqrt[4]{65}}{\sqrt{13}}$

Ответ: б) $\frac{14\sqrt[4]{65}}{\sqrt{13}}$

а) $\frac{784}{13}$

5

Черновик

22A 22B 22C

22 ABC

a	2	11
b	2^{16}	11
c	2	11

a
b
c

1 16 12…16

1 19 1 2…19

1
16

1 1
16 люб
люб 16

1
16
16

a b c

1 16 16 · 3

1 1

1 16 16 3
1 1 16 3
1 люб 16 6·14
2…15
} 90

1 1 19 3
1 19 19 3
1 2…18 19 6·17
} 108

90 · 108 = 9720

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\quad 2\log_{x+34}(2x+23)$ Черновик

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\quad 0{,}5\log_{-x-4}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$ $\quad 2\log_{2x+23}(-x-4)$

$4\log_{x+34}(2x+23) = \log_{-x-4}(x+34)$

$x+34>0$ $\quad x\neq -33$

$2x+23>0$ $\quad x\neq -11$

$-x-4>0$ $\quad x\neq -5$

$4\log_{x+34}(2x+23) = \dfrac{1}{\log_{x+34}(-x-4)}$

$-34 \quad -11{,}5 \quad -11 \quad -5 \quad -4$

$(x+34)^a = (2x+23)$

$\sqrt[b]{(2x+23)^b} = \sqrt[b]{-x-4}$

$-11{,}5 \quad -11 \quad -5 \quad -4 \quad x$

$\sqrt[a]{\sqrt[b]{-x-4}} = x+34$

$(-x-4) = x+34^{ab}$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 2a \\ \dfrac{1}{2ab} \\ 2b \end{cases}$$

$a=b$

$2a+1 = \dfrac{1}{2a^2}$

$4a^3+2a^2-1=0$

	4	2	0	-1
0,5	2	3	1,5	-0,25
-0,5	2	1	-0,5	-0,75
0,5	4	4	2	0

$2a = \dfrac{1}{2ab}$

$4a^2b=1$

$2b+1=2a+1$

$b=a+0{,}5$

$4a^3+2a^2-1=0$

$a=0{,}5$

$(x-0{,}5)(4x^2+4x+2)$

$(2x-1)(2x^2+2x+1)$

$x+34=4x^2$

$$\begin{cases} x+34 = (2x+23)^2 \\ (x+4)^2 = x+34 \\ (2x+34)^2 = (x+4)^2 \end{cases}$$

25 $\quad$ 25

-9

$x^2+8x+16 = x+34$

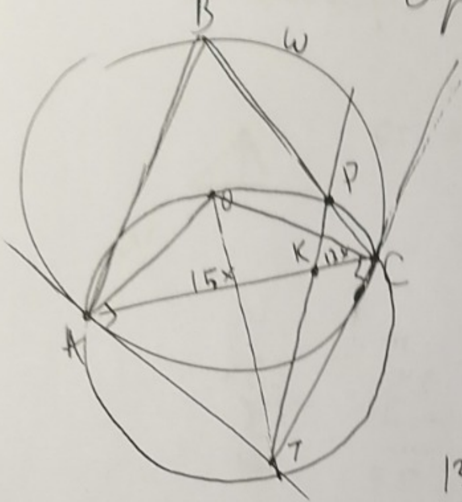
$x^2+7x-18=0$

$(x+9)(x-2)=0$

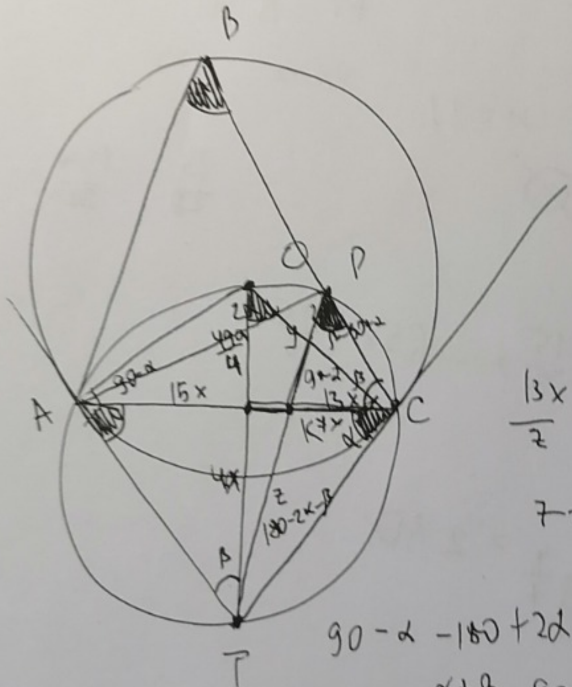
$(x+4)^4 = x+34$

$(x+34)^2$

Черновик



$\frac{13x}{28x} = \frac{13}{28}$ $\frac{28}{13}$ $6\frac{4}{13}$



$13 \cdot \left(\frac{28}{13}\right)^2 =$

$\frac{28^2}{13} =$

$\frac{7x}{\frac{49x}{4}} = \frac{4}{7}$

$\frac{13x}{z} = \frac{4}{15x}$ 15×13

$7 = \frac{195x^2}{4}$

$28 \times 28 = 784$

$784 / 13 = 6\frac{4}{13}$

$90 - \alpha - 180 + 2\alpha + \beta$

$\alpha + \beta - 90$

$\beta - 90 + \alpha$

$\frac{7a}{b} = \frac{4}{7}$

$\frac{49a}{4} = b$

$tg\,\alpha = \frac{4}{7}$

$tg\,2\alpha = \frac{2tg}{1-tg^2} = \frac{\frac{8}{14}}{1-\frac{16}{49}} = \frac{28}{33} = \frac{28}{33}$

$14a$

$14a = 8$

28

$\frac{49a}{4} \cdot 14a$

$a^2 = \frac{16}{49} = \left(\frac{4}{7}\right)^2$

$\frac{49a}{4} \cdot 7a = 28$

21104641 (U350779 M1303969)

Черновик

1 $x+34 = (2x+23)^2$

1 $(x+4)^2 = x+34$ -9

2 $2x+23 = -x-4$ $3x = -27$

u_1

1 $x+34 = (2x+23)^2$

2 $(x+4)^4 = x+34$ $\varnothing$

1 $2x+23 = (x+4)^2$

$\begin{array}{r} \overset{14}{34} \\ -7 \\ \hline 27 \end{array}$ $\begin{array}{r} 234 \\ -14 \\ \hline 89 \end{array}$

$2x+23 = x^2+8x+16$

$x^2+6x-7=0$

$(x-1)(x+7)=0$

AP 159

PC = 139

2 $2x+23 = x+34$ $x=11$

1 $x+34 = (x+4)^2$ $\varnothing$

1 $(x+4)^2 = 2x+23$

$\frac{13}{28}$ $\frac{139}{289}$

$7x \cdot 4x$ $\frac{15}{28} \cdot 14x = \frac{15}{2}x$ $6{,}5x \cdot 7{,}5x$

$7{,}5x$

$\frac{15}{4}x \cdot 4x = 15x^2$ $\frac{AC}{\operatorname{arctg}\frac{4}{7}} = 2AO$

$\frac{14x}{\operatorname{arctg}\frac{4}{7}} =$

$2\sqrt{\left(\frac{49x}{4}\right)^2 + (7x)^2}$ $3x$ $\frac{\cancel{7x}1}{\sin \operatorname{arctg}\frac{4}{7}} =$ $\sqrt{65}$

$\frac{49}{16}+1$ $\frac{\sqrt{65}}{4}$

$1 = \frac{\sin(\operatorname{arctg}\frac{4}{7}) \cdot \sqrt{65}}{4}$

21104641 (U350779 M1303969)