Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104426**

ID профиля: **378342**

Вариант 23

Лист 1, №1 Мисович

$a_{10} \cdot a_{16} > S + 39$

$a_{11} \cdot a_{15} < S + 55$

$a_1 - ?$

$$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 3(a_1 + a_6) = 3(2a_1 + 5d)$$

$a_{10} = a_1 + 9d \quad a_{11} = a_1 + 10d \quad a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$$\begin{cases} (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > 6a_1 + 15d + 39 & (1.) \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 6a_1 + 15d + 55 & (2.) \end{cases}$$

(1) Рассмотрим 1-ое нер-во:

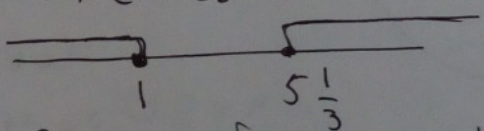
$a_1^2 + 24da + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

$a_1^2 + 6a(4d-1) + 135d^2 - 15d - 39 > 0$

$\frac{D}{4} = 9(4d-1)^2 - 135d^2 + 15d + 39 \geq 0$

чтобы были a, $\frac{D}{4} \geq 0$, т.е. если

$9d^2 - 57d + 48 \geq 0$



d должно быть целым, значит нам подходят $d = 1, 6, 7, 8$ и т.д.

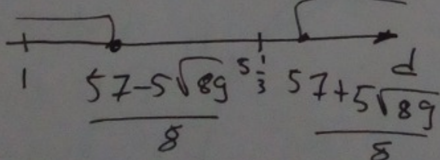
При этом $a_1 = -3(4d-1) \pm \sqrt{9d^2 - 57d + 48}$

(2) Рассмотрим 2-ое нер-во

$a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 - 6a_1 - 15d - 55 < 0$

$a_1^2 + 6a(4d-1) + 140d^2 - 15d - 55 < 0$

$\frac{D}{4} = 9(4d-1)^2 - 140d^2 + 15d + 55 \geq 0 \quad \frac{D}{4} = 4d^2 - 57d + 64$



и при этом $a_1 = -3(4d-1) \pm \sqrt{4d^2 - 57d + 64}$

1 находится левее $\frac{57-5\sqrt{89}}{8}$, а 5 правее $\frac{57+5\sqrt{89}}{8}$, и $d \in N$

Нужно, чтобы и a_1 и d были целыми, из этого d может быть только 1 $\longrightarrow$

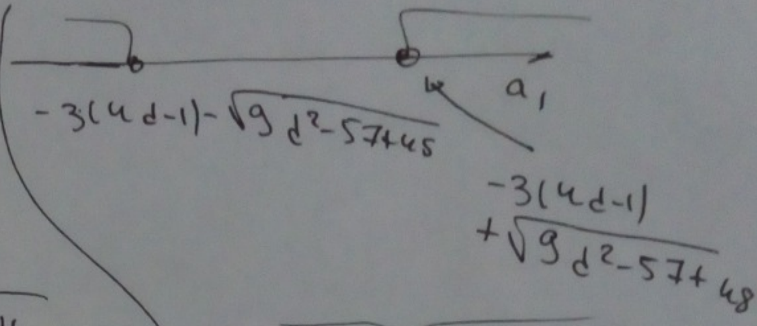
лист 2 Черновик

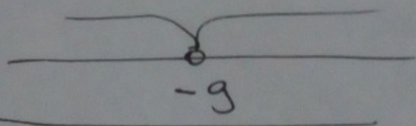
~~при $d=1$~~

~~(1) $a_1 = -3 \cdot 3 = -9$~~

~~(2) $a_1 = -3 \cdot 3$~~

1 нер-во:





2 нер-во:

$d=1$ $\quad a_1 = -3 \cdot 1 \cdot 3 \pm \sqrt{11} = -9 \pm \sqrt{11}$

Сравним:

$-9+\sqrt{11} > -6$

$\sqrt{11} > 3$

$11 > 9$

$-9+\sqrt{11} \vee -5$

$\sqrt{11} \vee 4$

$11 < 16$

$-9-\sqrt{11} < -10$

$1 < \sqrt{11}$

$-9-\sqrt{11} < -11$

$2 < \sqrt{11}$

$4 < 11$

$-9-\sqrt{11} < -12$

$3 < \sqrt{11}$

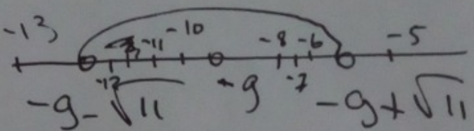
$9 < 11$

$-9-\sqrt{11} \vee -13$

$4 \vee \sqrt{11}$

$16 > 11$

2 нер-во



Итого, подходит:

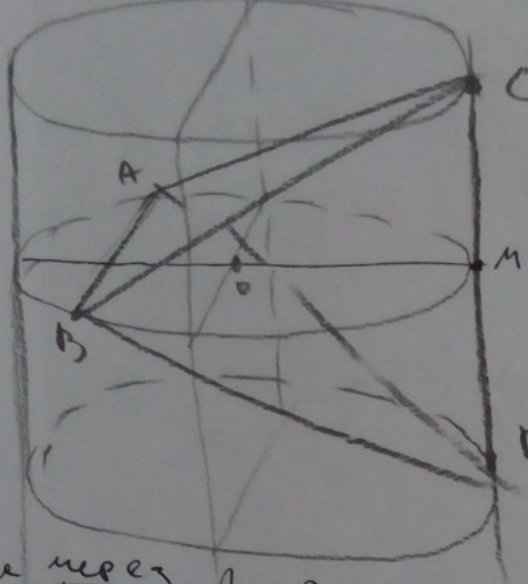
$a_1 = -12, -11, -10, -8, -7, -6$

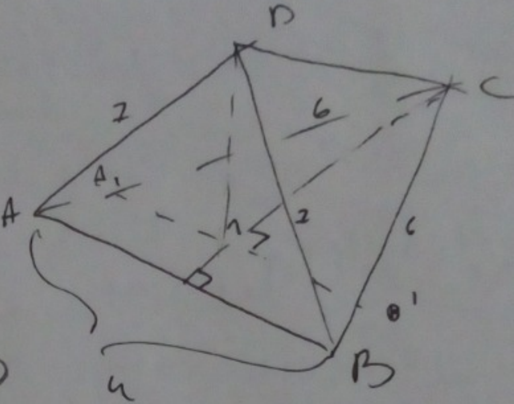
Ответ?

Лист 3 | Задача 2

Листовик

CD || оси цилиндра.



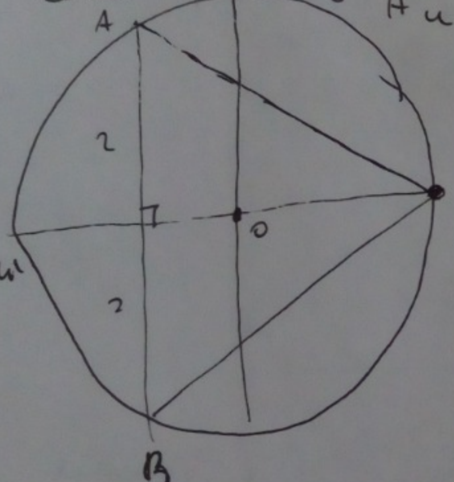


В тетраэдре ребро $CD \perp AB$ (по теореме о 3-ех пер.)

CD || оси цилиндра и C и D на бок поверхности

Значит, вся CD лежит в бок поверхности.

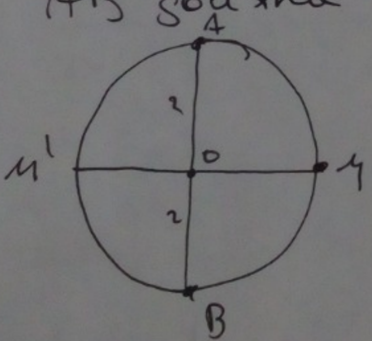
Сечение через A и B:

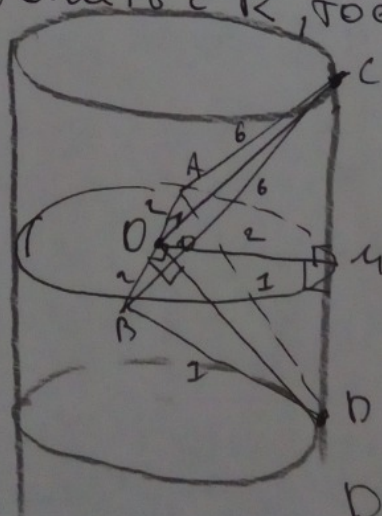


M (проекция C и D)

Раз $AC = BC$ и $BD = AD$, то и $AM = BM$, а значит $AB \perp MM_1$.

Пока AB будет находиться от M' до O что O ∉ ом, радиус цилиндра будет больше AB. Чтобы R был минимальны, AB должна совпать с R, тогда $R=2$





CO - высота в $\triangle ABC$,

$CO=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

из прямоуг. треуг. OMC

$(OM=2=R)$

Найдем CM

$CM=\sqrt{32-4}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

DO - высота в $\triangle BDO$

$DO=\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

из прямоуг. треуг OMD $MD=\sqrt{45-4}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

$CD=CM+MD=2\sqrt{7}+2\sqrt{11}=2(\sqrt{7}+\sqrt{11})$

Ответ: $2(\sqrt{7}+\sqrt{11})$

Лист 4 Задача 3 Листовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) & (2) \end{cases}$$

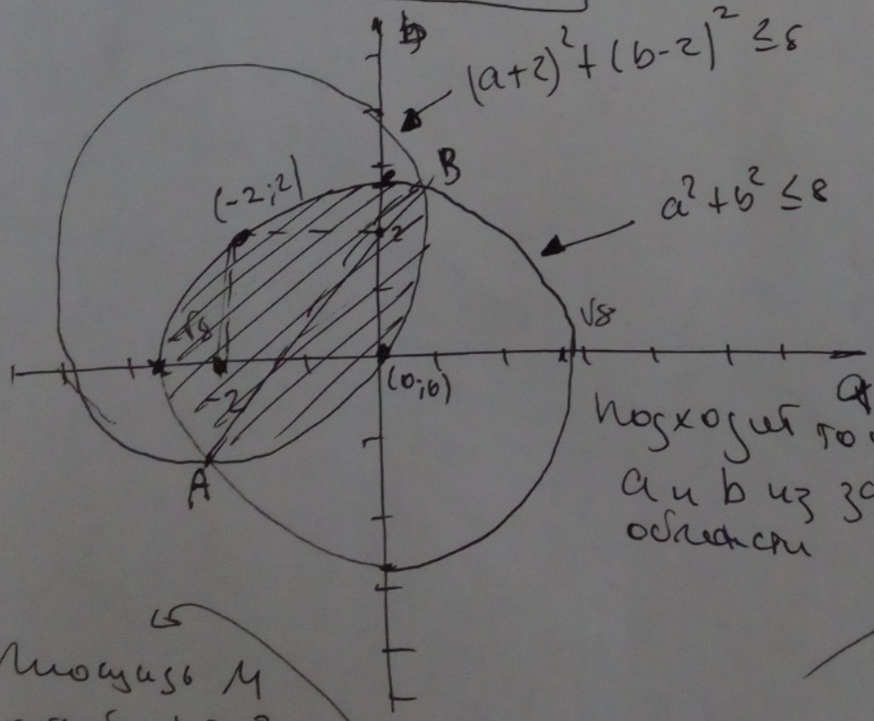
Рассмотрим 1-ое нер-во $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$
Это круг с $R=\sqrt{8}$ и центром $x_0=a$ $y_0=b$

Рассмотрим 2-ое нер-во.
1' $a^2+b^2 \le -4a+4b$ (при $-4a+4b < 8$
2' $a^2+b^2 \le 8$ при $8 < -4a+4b$

1': $a^2+4a+b^2-4b \le 0$
$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

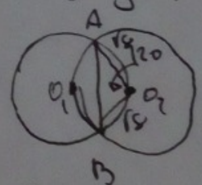
2': $a^2+b^2 \le 8$

Объединяя с $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ получаем, что фигура M — заштрихованная область



Подходят только a и b из заштрих. области

Посчитаем её площадь:



$$S_{\text{сектор } AO_1BO_2} = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$S_{\triangle AO_2B} = \frac{ab\sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{8}\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{AO_1B} = S_{AO_1BO_2} - S_{AO_2B} = \frac{\pi R^2}{3} - 2\sqrt{3}$$

Площадь M состоит из 2-ух таких площадей, то есть $S_M = 2\cdot\left(\frac{\pi R^2}{3} - 2\sqrt{3}\right) = \frac{2(\pi R^2 - 6\sqrt{3})}{3}$

Ответ: $\frac{2(\pi R^2 - 6\sqrt{3})}{3}$

21104426 (U378342 M1295303)

$9d^2-57d+48=0$

$3(3d^2-19d+16)\geq 0$

$D=19^2-4\cdot 3\cdot 16$

$361-192=169$

$d=\frac{19\pm 13}{6}$

$d=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$ $d=\frac{6}{6}=1$

$19\cdot 19=361$

$361-192=169$

$16\cdot 12=192$

1 $5\frac{1}{3}$

черновик

2

$a_1^2+24a_1d+140d^2-6a_1-15d-55<0$

$a_1^2+6a_1(4d-1)+140d^2-15d-55<0$

$\frac{D}{4}=9(4d-1)^2-140d^2+15d+55\geq 0$

$144d^2+9-72d$

3

$4d^2-57d+64\geq 0$

$D=57^2-16\cdot 64\geq 0$

$3249-1024$

$57\cdot 57=3249$

$64\cdot 16=1024$

$3249-1024=2225$

$\sqrt{2225}$

$2225:5=445$, $445:5=89$

$\sqrt{D}=\sqrt{25\cdot 89}=5\sqrt{89}$

$d=\frac{57\pm 5\sqrt{89}}{8}$

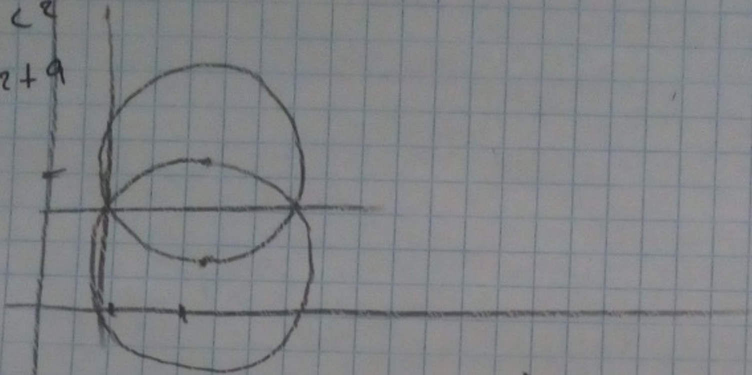
$\frac{57-5\sqrt{89}}{8}$ $\frac{57+5\sqrt{89}}{8}$

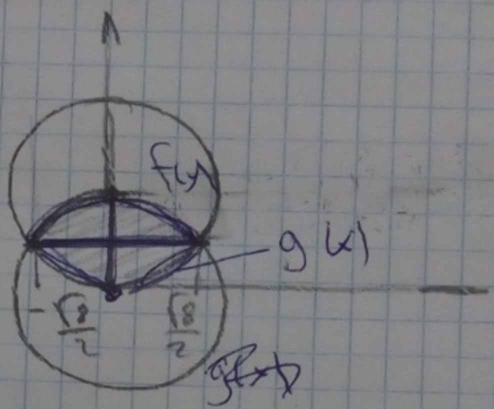
$a_1=-3(4d-1)\pm\sqrt{4d^2-57d+64}$

$-a+b<2$

$b<2+a$

Мерновић





$\cancel{g(x)} = x^2+y^2=8$

$f(x)=y=\sqrt{8-x^2}$

$g(x)=x^2+(y-\sqrt8)^2=8$

$(y-\sqrt8)^2=8-x^2$

$g(x)\quad y=\sqrt{8-x^2}+\sqrt8$

$$\int_{-\frac{\sqrt8}{2}}^{\frac{\sqrt8}{2}}(f(x)-g(x)) = \int_{-\frac{\sqrt8}{2}}^{\frac{\sqrt8}{2}} \left|\sqrt{8-x^2}-\cancel{\sqrt{8-x^2}}-\sqrt8\right| dx$$

$\cancel{-\sqrt8 x} \quad -\sqrt8 x$

$$-\frac{\sqrt8\cdot\sqrt8}{2}-\left(+\frac{\sqrt8\cdot\sqrt8}{2}\right)$$

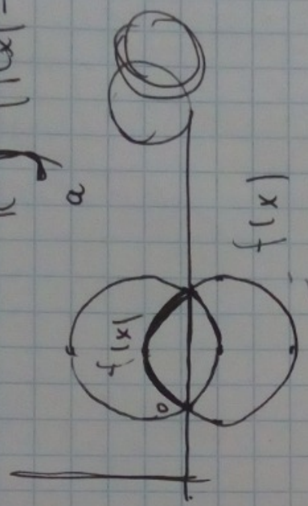
$$-\frac82-\frac82=-4-4=-8$$

21104426 (U378342 M1295303)

Черновик

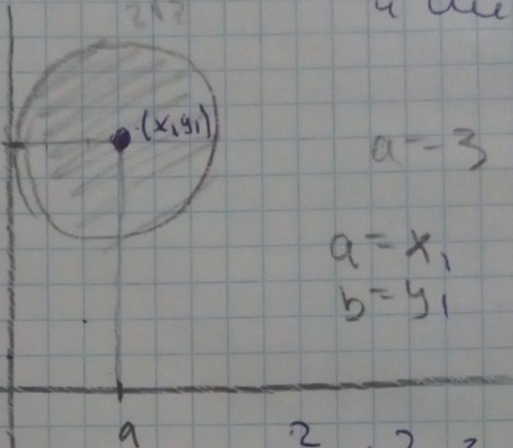
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b; 8)$



меньше 8

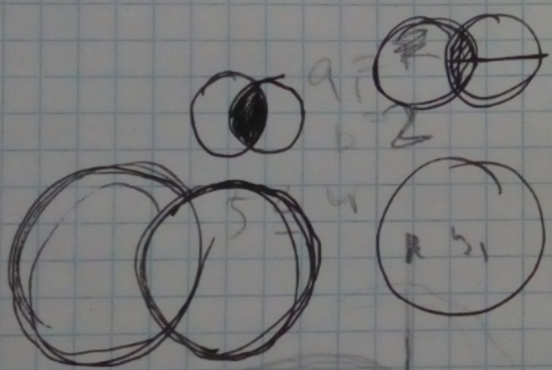
и меньше $-4a+4b$



$a=-3$

$a=x_1$

$b=y_1$



$a^2+b^2 \le -4a+4b$

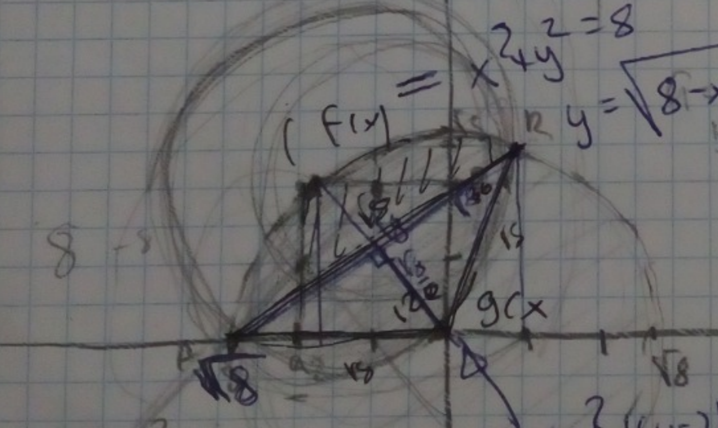
$a^2+4a+b^2-4b \le 0$

$(x_1+2)^2+(y_1-2)^2 \le 8$

$x_1^2+y_1^2 \le 8$

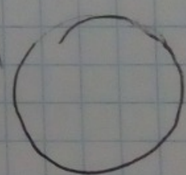
$x^2+y^2=8$

$y=\sqrt{8-x^2}$



$a=2 \quad b=1$

$5 \le$



120

$S=\pi R^2 \cdot \frac{120}{360}$

$(x+2)^2+(y-2)^2=8$

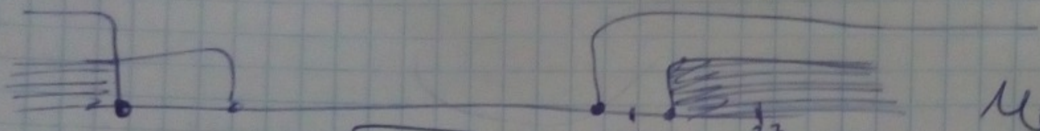
$(y-2)^2=8-(x+2)^2$

$y-2=\sqrt{8-(x+2)^2}$

$y=2+\sqrt{8-(x+2)^2}$

$(x+1)^2+(y-2)^2 \le 8$

$5 \le 12, 8$



Черновик

$1 \quad \frac{57-5\sqrt{89}}{8} \quad 5\frac{1}{3} \quad 32 \quad \frac{57+5\sqrt{89}}{8} \quad 33$

$\frac{57-5\sqrt{89}}{8} \vee 1 \qquad \frac{57+5\sqrt{89}}{8} \vee \frac{16}{3}$

$57-5\sqrt{89} \vee 8$

$49 \vee 5\sqrt{89}$

$49^2 \vee 25 \cdot 89$

2401

$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 89 \\ \times 25 \\ \hline 445 \\ 178 \\ \hline 2225 \end{array}$

$\sqrt{89} \quad 9.$

$171+15\sqrt{89} \vee 128 \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times 8 \\ \hline 128 \end{array}$

$15\sqrt{\ }$

$\begin{array}{r} 57 \\ \times 3 \\ \hline 171 \end{array}$

$a_1 = 1$

$57+\cancel{5\ 8}$

$\frac{45+57}{8} = \frac{102}{8} \qquad \begin{array}{r} 102 \\ -8 \\ \hline 32 \end{array}$

$\frac{57+5\sqrt{89}}{8} \vee 33$

$57+5\sqrt{89} \vee 264 \qquad \begin{array}{r} 264 \\ -57 \\ \hline 207 \end{array}$

$5\sqrt{89} < 207$

$\cancel{25 \cdot 89}$

$57+5\sqrt{89} \vee 256 \qquad \frac{57+45}{8} \qquad \frac{102}{8}$

$5\sqrt{89} < 199 \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 8 \\ \hline 256 \\ -57 \\ \hline 1 \end{array}$

$\begin{array}{r} 68 \\ -51 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 57 \\ +11 \\ \hline 68 \end{array}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104426**

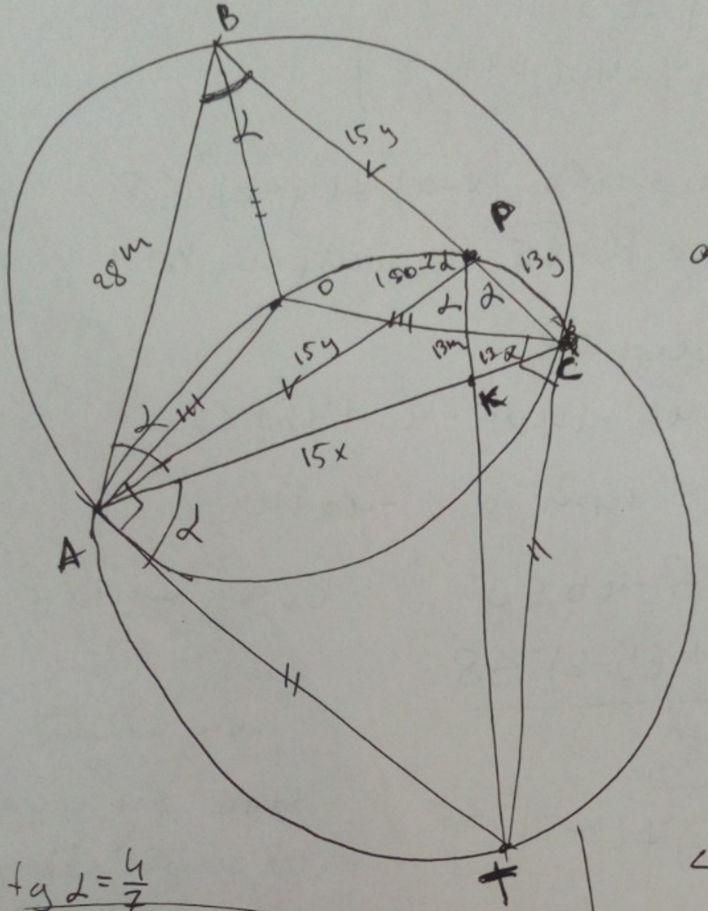
ID профиля: **378342**

Вариант 23

Лист 5

Чистовик

Задача 6



$tg\,\alpha = \frac{4}{7}$

$S_{APK}=15$

$S_{CPK}=13$

S_{ABC}?

а) Рассмотрим $APCT$

$\angle PAT = \angle PCT = 90°$

В сумме 180, значит около $APCT$ можно описать окружность, т. есть T лежит на окружности, описанной около APC.

Т. к. AT - касательная к ω, AC - хорда в окр. ω, то

$\angle CAT = \angle CBA = \alpha$

$\angle CPT = \angle CAT = \alpha$ (опираются на одну дугу)

Рассмотрим ΔCPK и ΔCBA

$\angle CPK = \angle CBA = \alpha$, и $\angle BCA$ - общий, значит ΔABC подобен ΔCPK с коэфф. $K = \frac{13}{28}$

$\frac{S_{CKP}}{S_{ABC}} = K^2 = \left(\frac{13}{28}\right)^2 = \frac{13}{S_{ABC}}$

$S_{ABC} = \frac{28^2 \cdot 13}{13^2} = \frac{28^2}{13} = \boxed{\frac{784}{13}}$

Ответ на пункт а)

$tg\,\alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$ $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}$

б) Т. к. ΔKPC подобен ΔABC

$\frac{PC}{BC} = \frac{13}{28}$ $\frac{PK}{AB} = \frac{13}{28}$

$\angle BPA = 180 - 2\alpha$ и $\angle ABP = \alpha$

значит $\angle BAP = \alpha$ и

ΔABP - равнобедренный, $BP = AP$

$S_{ABP} = S_{ABC} - S_{APC} = \frac{784}{13} - 28 = \frac{420}{13}$

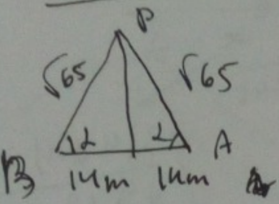
$\sin 2\alpha = \frac{56}{65}$

$S_{ABP} = \frac{BP^2 \sin(180-2\alpha)}{2} = \frac{420}{13}$

$\frac{420}{13} = \frac{BP^2 \cdot 56}{2 \cdot 65}$

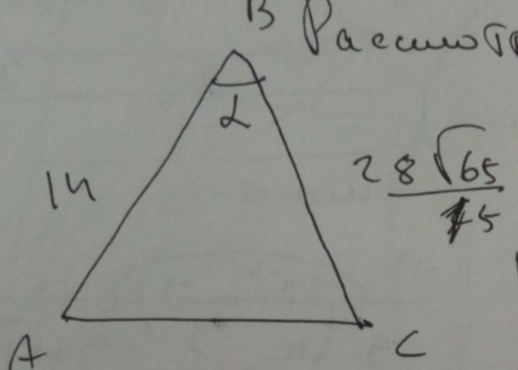
$BP = \sqrt{65}$, $BC = \frac{28\sqrt{65}}{15}$ → на листе 6

Лист 6 Чистовик



$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{14m}{\sqrt{65}} \qquad m = \frac{1}{2},\ AB = 14$$

Рассмотрим теперь $\triangle ABC$:



$$\frac{28\sqrt{65}}{15} \qquad \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

По теореме косинусов:

$$AC^2 = 14^2 + \frac{28^2\cdot 65}{15^2} - \frac{\cdot 28\sqrt{65}}{15}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}} =$$

$$= 14^2 + \frac{28^2}{15}\left(\frac{65}{15} - 7\right) = 14^2 + \frac{28^2}{15}\left(-\frac{8}{3}\right) =$$

$$= 14^2 - \frac{8\cdot 14^2\cdot 4}{3\cdot 15} = 14^2\left(1 - \frac{32}{45}\right) =$$

$$= 14^2\cdot\frac{13}{45}$$

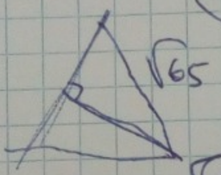
$$\boxed{AC = \frac{14}{3}\sqrt{\frac{13}{5}}}$$ Ответ на пункт б.

$$\frac{\cancel{420}^{60^{15}} \cdot 5}{\cancel{28}4} = BP^2$$

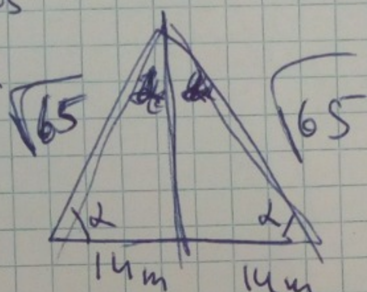
Черновик

$$65 = BP^2$$

$$BP = \sqrt{65}$$



$S =$



$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{14m}{\sqrt{65}}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$15y = \sqrt{65}$$

$$y = \frac{\sqrt{65}}{15}$$

$$28y = \frac{28\sqrt{65}}{15} = BC$$

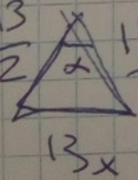
$$\frac{\times\begin{matrix}14\\14\end{matrix}}{56}$$

$$\frac{784}{-369}\Big/ 920$$

$$\cancel{AC^2 = 196 +}$$

196

$$\frac{13}{2}$$



$$\frac{13\cdot\sqrt{65}}{15}$$

$$\cancel{KC^2 = \frac{169}{4} +}$$

$$AC^2 = 196 + \frac{28^2\, 65}{15^2} - 2\cdot\frac{14\cdot 28^2\,\cancel{65}}{15}\cdot\frac{7}{\cancel{\sqrt{65}}}$$

$$\frac{\times\begin{matrix}28\\28\end{matrix}}{\begin{matrix}224\\56\end{matrix}}$$
784

$$196 + \frac{28^2}{15}\left(\frac{65}{15} - 7\right) = 196 +$$

$$\frac{\times\begin{matrix}15\\7\end{matrix}}{105}$$

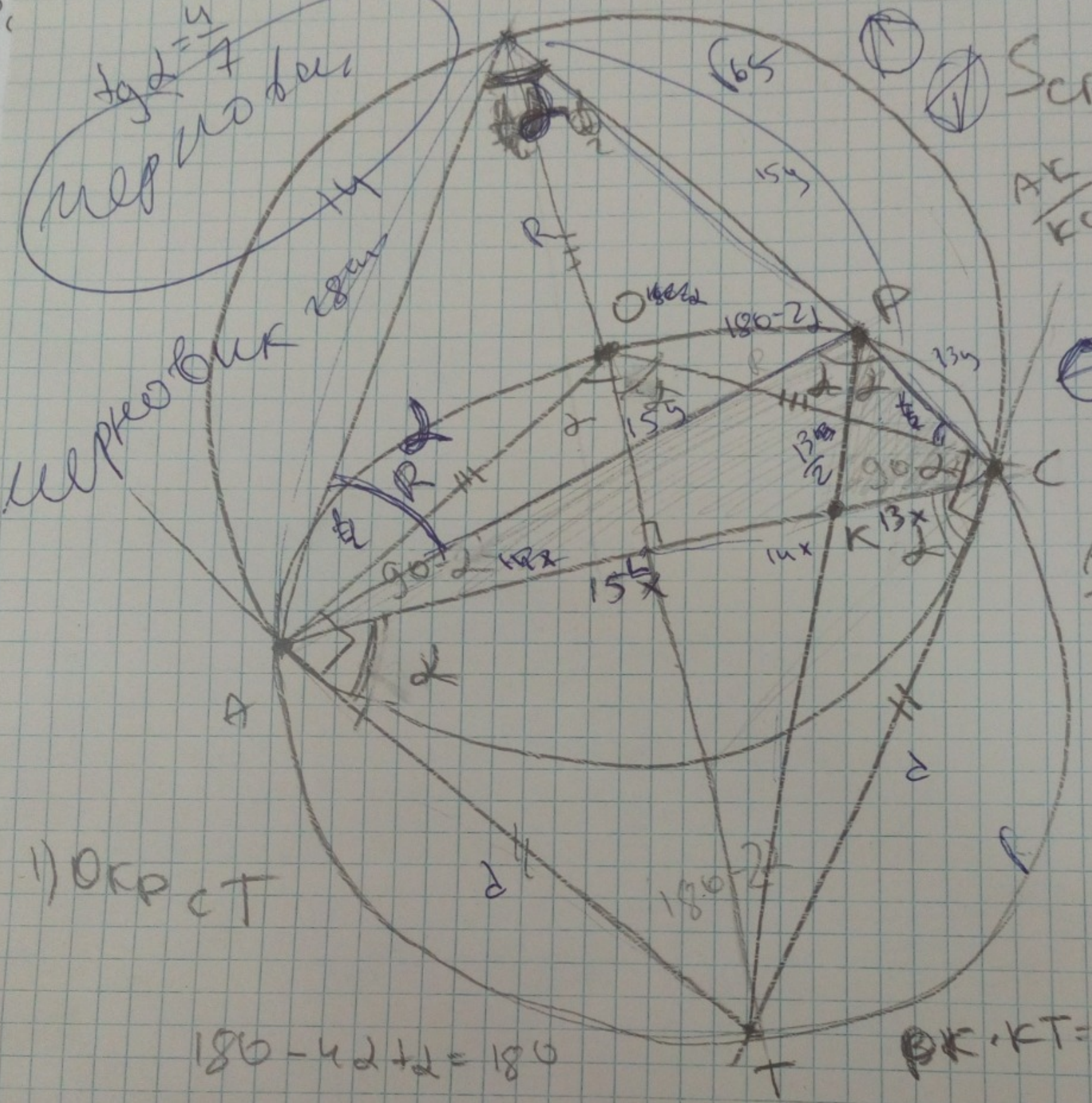
$$\frac{65-105}{15} = -\frac{40}{15} = -\frac{8}{3}$$

21104426 (U378342 M1295304)

$S_{ABC} = ?$ $S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

$\frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$



$\frac{AP}{PC} = \frac{15}{13}$

$180 - 4\alpha + \alpha = 180$

$BK \cdot KT = 15 \cdot 13 x^2$

$\Delta KPC \sim \Delta ABC$

$$\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{KC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{13\cancel{x}}{28\cancel{x}}\right)^2$$

$$\frac{\cancel{13}}{S_{ABC}} = \frac{13^{\cancel{2}}}{28^2} \qquad S_{ABC} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$