# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104416**

ID профиля: **259038**

Вариант 23

Чистовик



1) Пусть $a$ – 1-й член прогрессии, а $d$ – разность.
Тогда $a \in Z$, $d \in N$, т.к. прогрессия возрастающая и целочисленная.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = 6a + 15d = S$$

$$\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} = (a+9d)(a+15d) > S+39 \\ a_{11} \cdot a_{15} = (a+10d)(a+14d) < S+55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 24ad + 135d^2 > 6a + 15d + 39 \\ a^2 + 24ad + 140d^2 < 6a + 15d + 55 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} 5d^2 < 55 - 39 = 16 \\ d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow d = 1, \text{ т.к. } d \in N \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} a^2 + 24a + 135 > 6a + 15 + 39 \\ a^2 + 24a + 140 < 6a + 15 + 55 \end{cases}$$

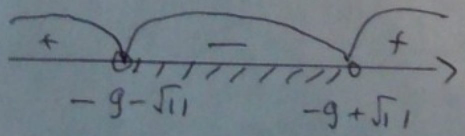
$$\begin{cases} a^2 + 18a + 81 > 0 \\ a^2 + 18a + 70 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+9)^2 > 0 \\ (a+9)^2 - 11 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+9)^2 > 0 \\ (a+9+\sqrt{11})(a+9-\sqrt{11}) < 0 \; (1) \end{cases}$$

(1) $y = (a+9+\sqrt{11})(a+9-\sqrt{11})$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$

нули: $-9-\sqrt{11}$; $-9+\sqrt{11}$



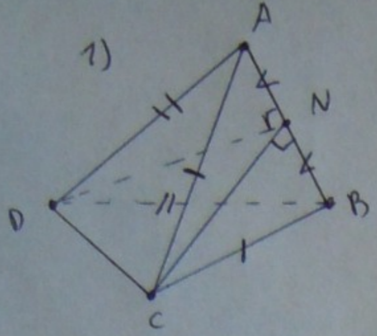

$-12 < -9-\sqrt{11} < -11$ и $-7 < -9+\sqrt{11} < -6$

Следов. $a = \{-11; -10; -9; -8; -7\}$

$$\begin{cases} a \neq -9 \\ a = \{-11; -10; -9; -8 -7\} \end{cases} \Rightarrow a = \{-11; -10; -8; -7\}$$

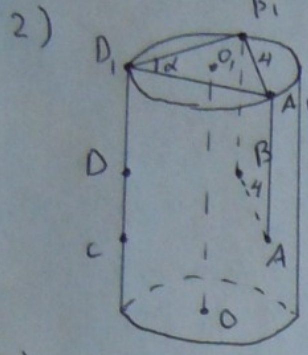
Ответ: $-11$; $-10$; $-8$; $-7$

② 1)



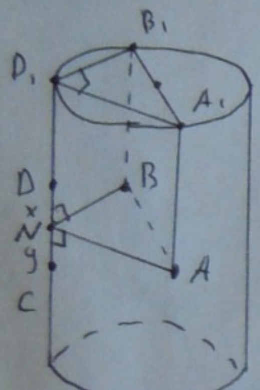

Проведём медианы $DN$ и $CN$.
Т.к. $\triangle DAB$ и $\triangle CAB$ — равнобедренные,
$DN \perp AB$ и $CN \perp AB$.
Следов. $AB \perp (DNC)$

2)




Спроецируем точки $D$, $B$ и $A$ на верхнее основание.
Т.к. $AB \perp DC \Rightarrow AB \perp OO_1$, $A_1B_1 = AB = 4$.
Тогда радиус окр. $R = \frac{4}{2\sin\alpha} \leq \frac{4}{2} \leq 2$.
Следов. $R$ - наим., когда $\alpha = 90^\circ$, т.е. $A_1B_1$ - диаметр.

3)

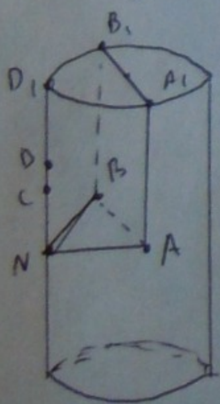



Проведём перпендикуляр $BN$ к прямой $DC$.
1-ый случай, когда $N \in$ отрезку $DC$.
Пусть $DN = x$, $NC = y$.
Заметим, что $(ABN) \parallel (A_1B_1D_1)$.
Следов. $D_1B_1 = NB$ и $D_1A_1 = NA$.
Тогда $NB = \sqrt{DB^2 - DN^2}$, $NA = \sqrt{DA^2 - DN^2}$

$$NB = \sqrt{7^2 - x^2} = NA = \sqrt{7^2 - x^2}$$

Значит $D_1B_1 = D_1A_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$
Тогда $x = \sqrt{7^2 - 8} = \sqrt{41}$. Аналогично $y = \sqrt{6^2 - 8} = \sqrt{28}$.
$DC = x + y = \sqrt{41} + \sqrt{28}$.

4)




2-й случай, когда $N \notin$ отрезку $DC$.
Тогда $DC = x - y$, по аналогичным 1-му случаю рассуждениям.
$DC = \sqrt{41} - \sqrt{28}$

Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{28}$ или $\sqrt{41} - \sqrt{28}$

③

Рассмотрим условие $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8)$

Оно равносильно

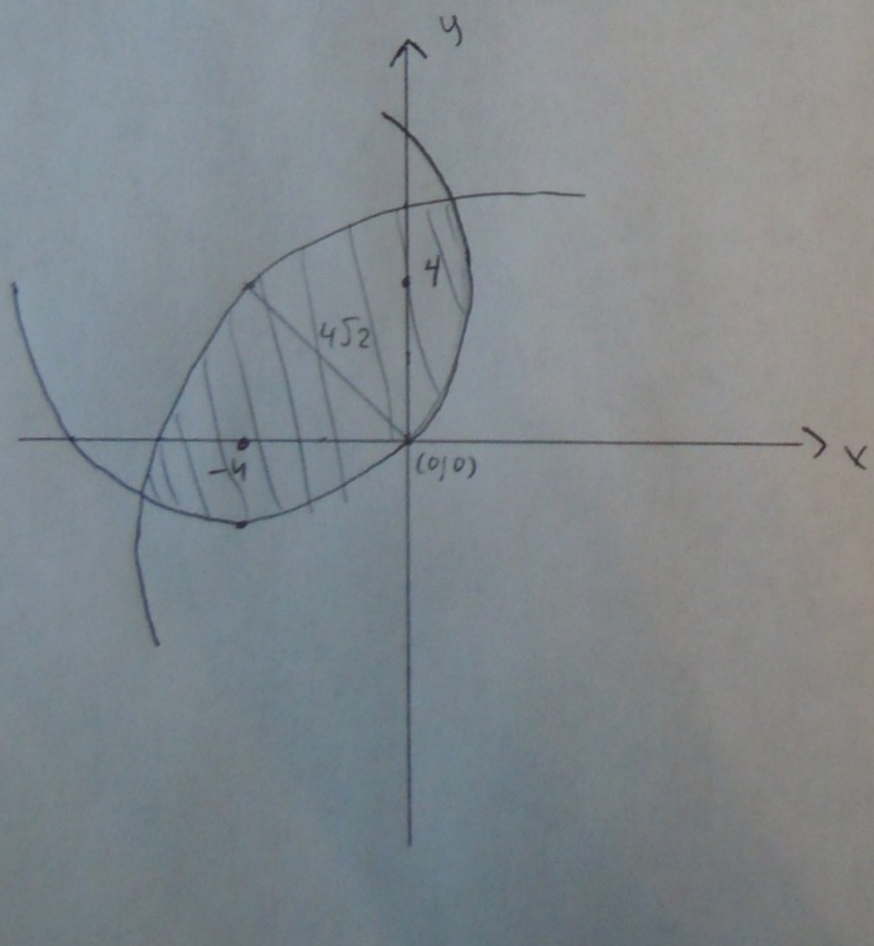
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \end{cases}$$


область пересечения яв-ся решением данной системы

Тогда все точки $(x;y)$ принадлежат этой фигуре:



Черновик

①

$6a + 21d = 5$

$$\begin{cases} (a+9d)(a+15d) > 5+39 \\ (a+10d)(a+14d) < 5+55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 24ad + 135d^2 > 6a + 21d + 39 \\ a^2 + 24ad + 140d^2 < 6a + 21d + 55 \end{cases}$$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d \in \left(0; \frac{4\sqrt5}{5}\right) \Rightarrow d = 1$

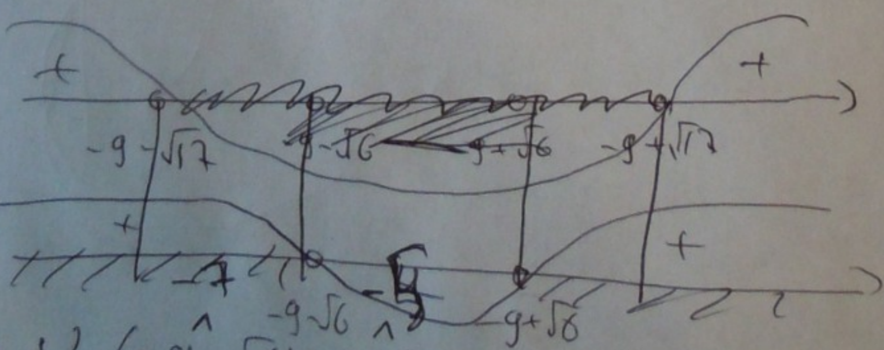
$$\begin{cases} a^2 + 24a + 135 > 6a + 60 \\ a^2 + 24a + 140 < 6a + 76 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 18a + 75 > 0 \\ a^2 + 18a + 64 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 18a + 81 - 6 > 0 \\ a^2 + 18a + 81 - 17 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+9)^2 - (\sqrt6)^2 = (a+9-\sqrt6)(a+9+\sqrt6) > 0 \\ (a+9-\sqrt{17})(a+9+\sqrt{17}) < 0 \end{cases}$$

$-9+\sqrt6 \quad -9-\sqrt6$

$-9+\sqrt{17} \quad -9-\sqrt{17}$




$-14 \qquad -12$

$a \in (-9-\sqrt{17}; -9-\sqrt6) \cup (-9+\sqrt6; -9+\sqrt{17})$

$-13 \qquad -11 \qquad -6 \qquad -5$

$a = -13, -12, -6, -5$

$15 \cdot 9 = 135$

$12 \cdot 6 = 72$

$39 - 51 = 38 - 50 = 8 - 20 = -12$

$55 - 51 = 4$

$39 - 63 = 36 - 60 = 6 - 30 = -24$

$55 - 63 = -8$

$39 - 57 = 40 - 58 = -18$

$55 - 57 = -2$

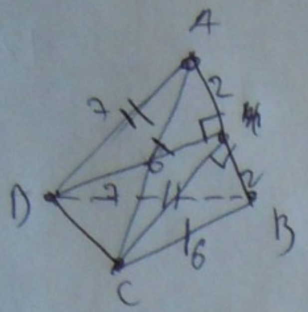
$13 \cdot 6 = 78$, $78 - 21 = 57$

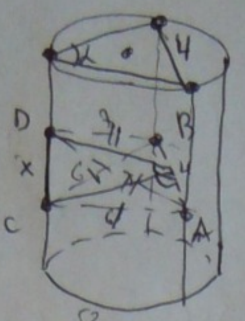
$1+2+3+4+5$

$3/6/10/15$

$75 = 3 \cdot 25$

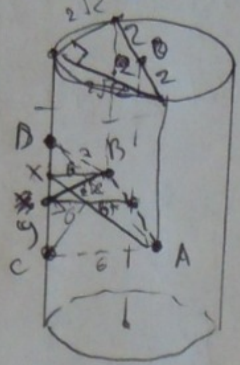
Черновик





$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \le \frac{a}{2}$

$R \le 2$



$\cancel{7^2 - a^2 = 6^2 - x^2}$

$\cancel{\sqrt{7^2-2^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt5}$

$\sqrt{7^2-(2\sqrt2)^2} = x$

$\sqrt{6^2-(2\sqrt2)^2} = y$

$\sqrt{49-8} = x$

$\sqrt{36-8} = y$

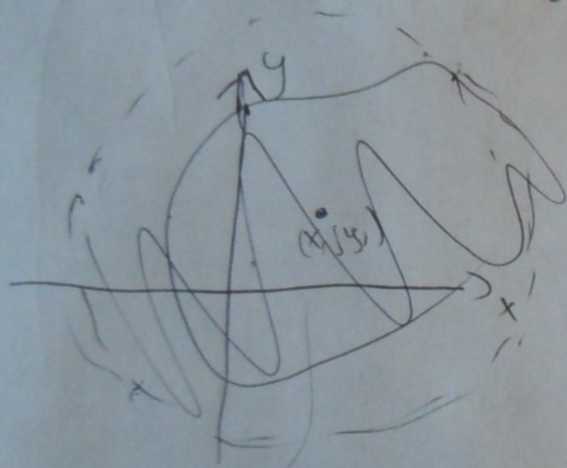
$x = \sqrt{41}$

$y = \sqrt{28}$

$x+y = \sqrt{41}+\sqrt{28}$

$x-y = \sqrt{41}-\sqrt{28}$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$$



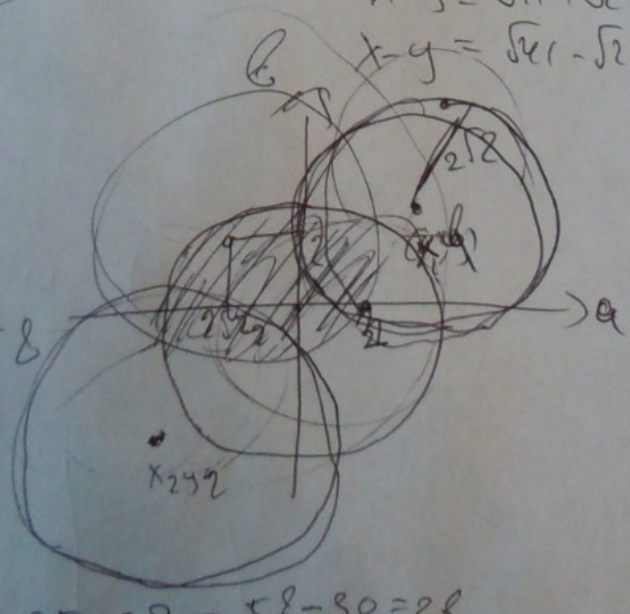
$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$

$a^2+b^2 \le 8$

$a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$



$-66+15=-45$

$-66+15=-51$

$-48+15=-33$

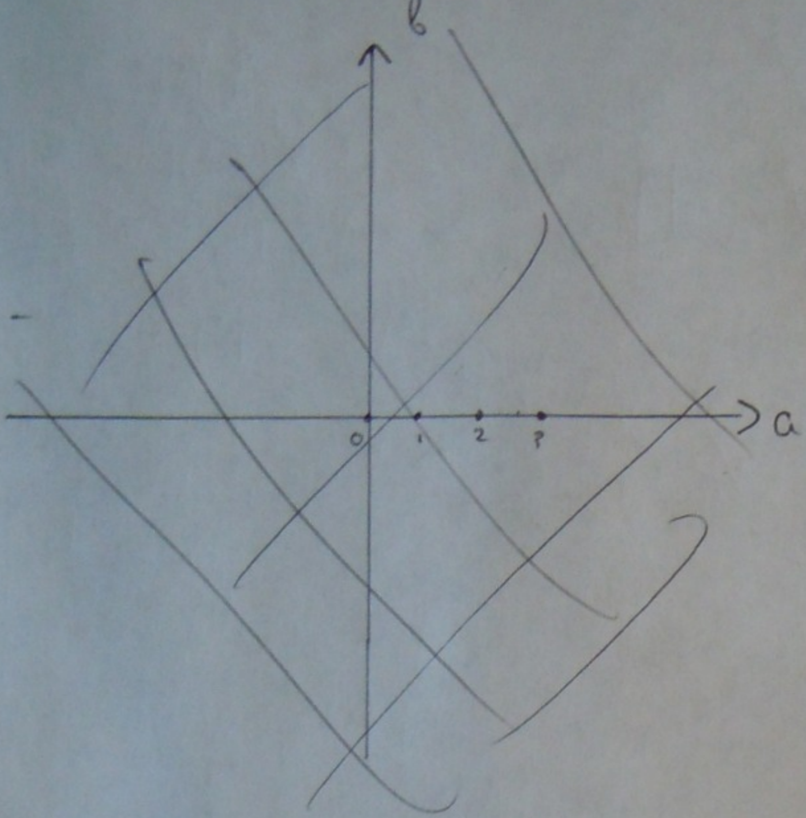
$-42+15=-27$

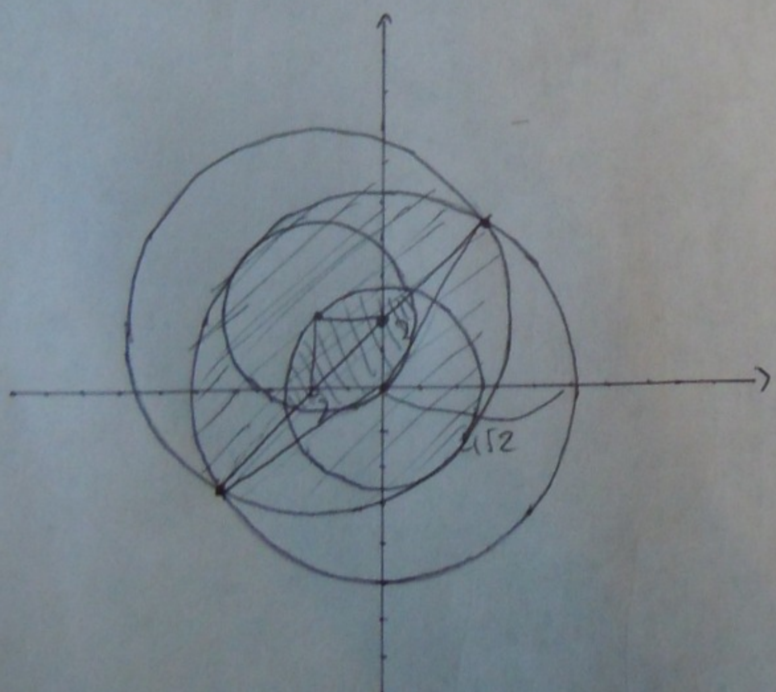
$35-27=58-30=28$

21104416 (U259038 M1299011)

Черновик

$\sqrt{8} < \sqrt{9}$




21104416 (U259038 M1299011)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104416**

ID профиля: **259038**

Вариант 23

Чистовик



4

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$

Тогда

$\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$

$\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 16$

$\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$

$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 19$

У трёх чисел показатель степени 2-ки может быть

$1, 16, x \ (x \in [1; 16])$

Всего вариантов $3! \cdot 16 - 6 = 6 \cdot 15$, т.к.

Расстановок $1, x, 16$ по 3 местам $3!$, $x$ может принимать 16 значений и 6 случаев учтённых 2 раза!

$x = 1$

| | | |
|---|---|---|
| 1 x 16 | 1 16 x | 16 1 x |
| x 1 16 | x 16 1 | 16 x 1 |

$x = 16$

| | | |
|---|---|---|
| 1 x 16 | x 1 16 | x 16 1 |
| 1 16 x | 16 1 x | 16 x 1 |

Аналогично со степенями 11: $3! \cdot 19 - 6 = 6 \cdot 18$

Ответ: $6^2 \cdot 15 \cdot 18 = 9720$

21104416 (U259038 M1299012)

(5) Рассмотрим произведение:

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=$

$=\log_{\sqrt{x+34}}(x+34)\cdot\log_{(x+4)^2}(-x-4)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(2x+23)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=2$

Тогда $\begin{cases} a\cdot b\cdot c=2\\ a=b\\ a=c-1\end{cases} \Rightarrow \quad a^2(a+1)=2$

$a^3-1+a^2-1=0$

$(a-1)((a+1)^2+1)=0$

$a=1$

Следов. какие-то 2 из данных чисел равны 1, оставшееся $=2$.

1) $\begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1\\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=1\\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\ (x+4)^2=x+34\\ 2x+23=-x-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\ (x+4)^2=x+34\\ 3x=-27\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-9$ (Подставив $x=-9$ в 1 и 2 уравнение убедимся в правильности ответа) и удовл. ОДЗ

2) $\begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1\\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1\\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\ \sqrt{2x+23}=-x-4\\ (x+4)^2=\sqrt{x+34}\end{cases} \Rightarrow$ (1) $x^2+16x+16=2x+23$

$x^2+14x-7=0$

$(x+7-\sqrt{42})(x+7+\sqrt{42})=0$

Данные корни не удовл. ОДЗ, т.к. $-x-4>0 \Rightarrow x<-4$, а $\sqrt{42}-7>-4$ и $2x+23>0 \Rightarrow x>-11{,}5$, а $-7-\sqrt{42}<-11{,}5$

3) $\begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=2\\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1\\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+34=2x+23 \ (1)\\ \sqrt{2x+23}=-x-4\\ (x+4)^2=x+34\end{cases}$ (1) $x+34=2x+23$

$x=11$, что не удовл. условию $x<-4$

продолжение

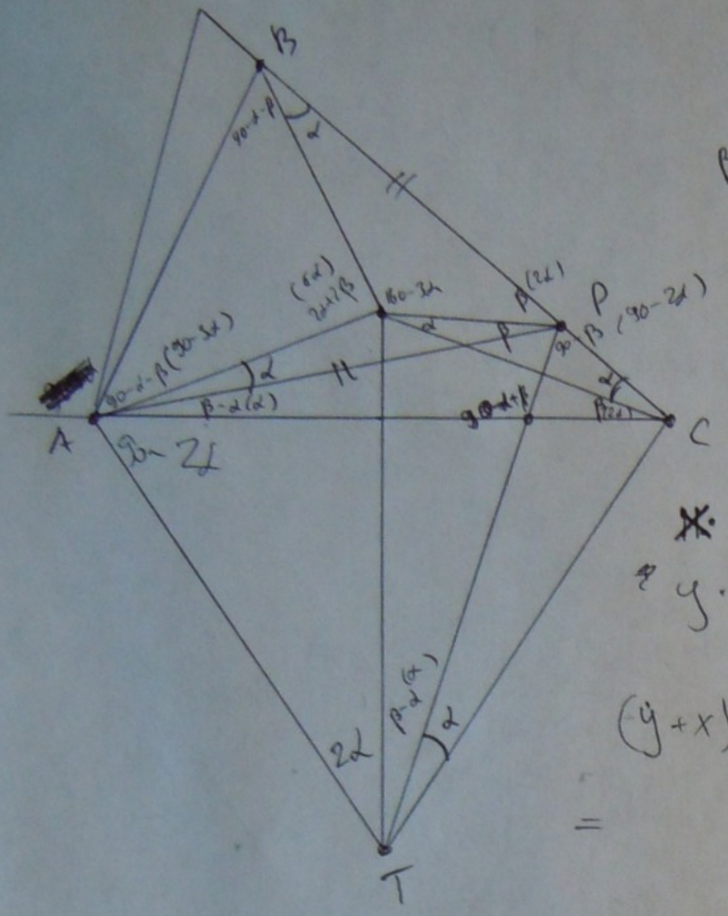
Ответ

⑤ продолжение

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+34>0 \\ x+34\neq 1 \\ 2x+23>0 \\ (x+4)^2\neq 1 \\ x+34>0 \\ 2x+23\neq 1 \\ -x-4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-34 \\ x\neq -33 \\ x>-11,5 \\ x\neq -5 \\ x\neq -3 \\ x>-34 \\ x<-4 \\ x\neq -11 \\ x\neq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11,5<x<-4 \\ x\neq 5 \\ x\neq -3 \\ x\neq -11 \end{cases}$$

21104416 (U259038 M1299012)




$\beta - \alpha = \alpha$

$\beta = 2\alpha$

$a \cdot \sin\alpha = 15$

$y \cdot c \cdot \sin 2\alpha = 13$

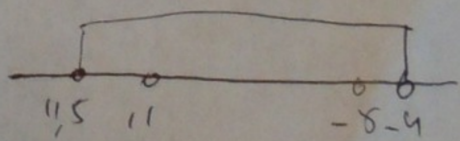
$(y + x)(a + c) \cdot \sin 3\alpha =$

$=$

$$1 + \log_{a} b^2 = \log_b c^2 + 1 = \log_c a^2$$

$$2\log_{x+34}(2x+23) = \frac{1}{2}\log_{x+4}$$

$$\begin{cases} 2x + 23 > 0 \\ 2x + 23 \neq 1 \\ -x - 4 > 0 \\ x + 34 > 0 \\ \cancel{2x + 23 \neq 0} \\ x + 34 \neq 1 \\ x + 4 \neq 1 \\ x + 4 \neq -1 \\ x \neq -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -11{,}5 \\ x \neq -11 \\ x < -4 \\ x > -34 \\ x \neq -33 \\ x \neq -3 \\ x \neq -5 \\ x \neq -4 \end{cases}$$



$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$$

$$4\log_{x+34}(2x+23) = \log_{x+4}(x+34$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \cdot \log_{(x+4)^2}(x+34) \cdot \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

$$x^2(x+1) = 2$$

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) + (x-1)(x+1) = 0$$

$$(x-1)(x^2+2x+2) = 0$$

$$(x-1)((x+1)^2+1) = 0$$

$$x = 1$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \cdot \log_{(-x-4)^2}(x+34) \cdot \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) =$$

$$= \log_{\sqrt{x+34}}(x+34) \cdot \log_{\sqrt{2x+23}}(2x+23) \cdot \log_{(x-4)^2}(x-4) = 2$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{\sqrt{x+34}}\sqrt{x+34}$$

$$x+34 = 2x+23$$

$$11 = x \quad \times$$

$$23 - 16$$

$$27 - 20$$

$$x+34 = (2x+23)^2$$

$$2x+23 = (x+4)^2$$

$$(x+4)^2 = \sqrt{x+34}$$

$$3x = -27$$

$$2x+23 = -x-4$$

$$x = -9$$

$$(x+7)^2 - 42 =$$

21104416 (U259038 M1299012)

$3!\cdot 14\cdot 17 + 2\cdot 3\cdot 17 + 2\cdot 3\cdot 14 + 4\cdot 2$

$= \cancel{6(14\cdot 17 +}$

1 16 16

11 16 | 1 1 16 | 1 16 16 | 1 16 16
--- | --- | --- | ---
1 1 19 | 1 19 19 | 1 1 19 | 1 19 19
1 1 16 | 1 1 16 | 1 16 16 | 1 16 16
1 19 1 | 19 19 1 | 19 1 1 | 19 1 19

$6(14\cdot 17 + 17 + 14 + 1) + 2 =$

$\cancel{= 6(14+1)(17+1)+2 = 6\cdot 15\cdot 17}$

$(3!\cdot 16 - 6)$

$(3!\,19 - 6)$

$3!\cdot 15\cdot 18$

$15\cdot 18 =$
$= 30\cdot 9 =$
$= 270$

$$\begin{array}{r} 270 \\ \times\ 36 \\ \hline 1620 \\ 81\phantom{0} \\ \hline 9720 \end{array}$$

1 1 16
1 1 16
1 16 16
1 16 16

1 1 16
1 1 16

$(3!\cdot 16 - 6)\cdot(3!\cdot 19 - 6) =$

$= 3!\cdot 15\cdot 3!\cdot 18 = 3!\cdot 3!\cdot 15\cdot 18$

21104416 (U259038 M1299012)

Черновик

$НОД(a;b;c) = 22$

$НОК(a;b;c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$

$\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$

$\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$

$\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 16$

$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 19$

$x = 1$

$1 \le y \le 16$

$z = 16$

$x = 1$

$1 \le y \le 19$

$z = 19$

1) $\alpha_1 = 1$ $1 \le \beta_1 \le 16$ $\gamma_1 = 16$ $16 \cdot 19$ 1 16 16

$\alpha_2 = 1$ $1 \le \beta_2 \le 19$ $\gamma_2 = 19$

2) $\alpha_1 = 1$ $1 \le \beta_1 \le 16$ $\gamma_1 = 16$ $16 \cdot 19$

$\alpha_2 = 19$ $\beta_2 = 19$ $1 \le \gamma_1 \le 19$

1 1 16

1 x 19

1 1 16

x 1 19

$\alpha_1$ ; $\beta_1$ , $\gamma_1$ 14

$\alpha_2$ $\beta_2$ $\gamma_2$ 17

~~3! · 14 · 17~~ $3! \cdot 16 \cdot 19 - 19 \cdot 3 -$

~~3! · 16 · 19 −~~

1) 1 y 16

1 x 19

2) 1 y 16

1 19 x

3) 1 y 16

x 1 19

4) 1 y 16

x 19 1

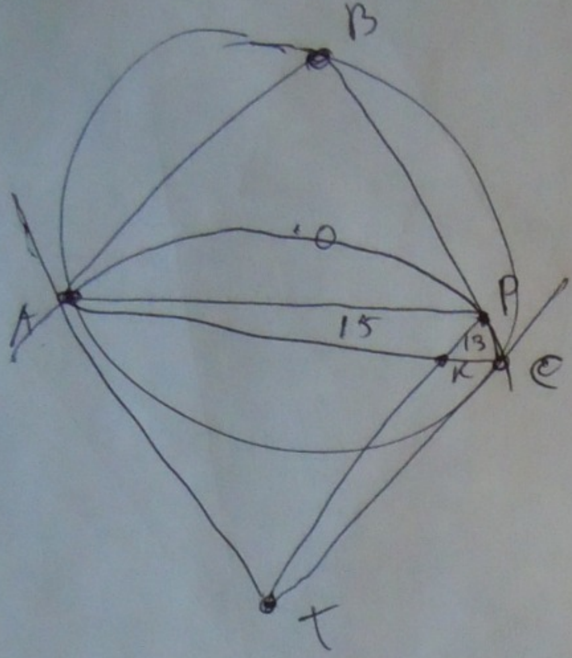
5) 1 y 16

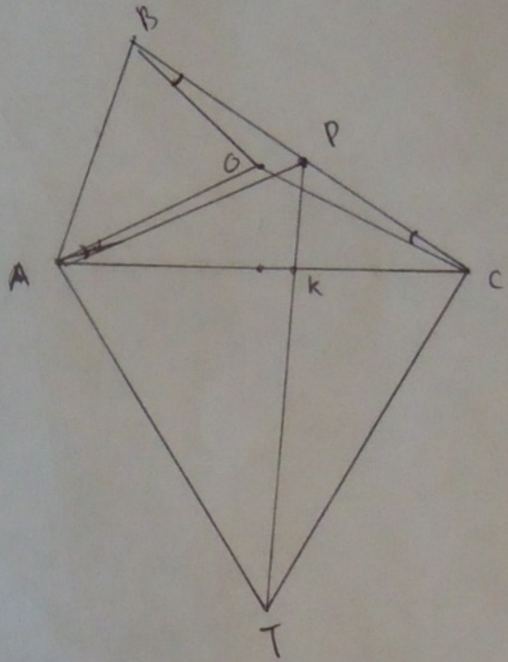
19 1 x

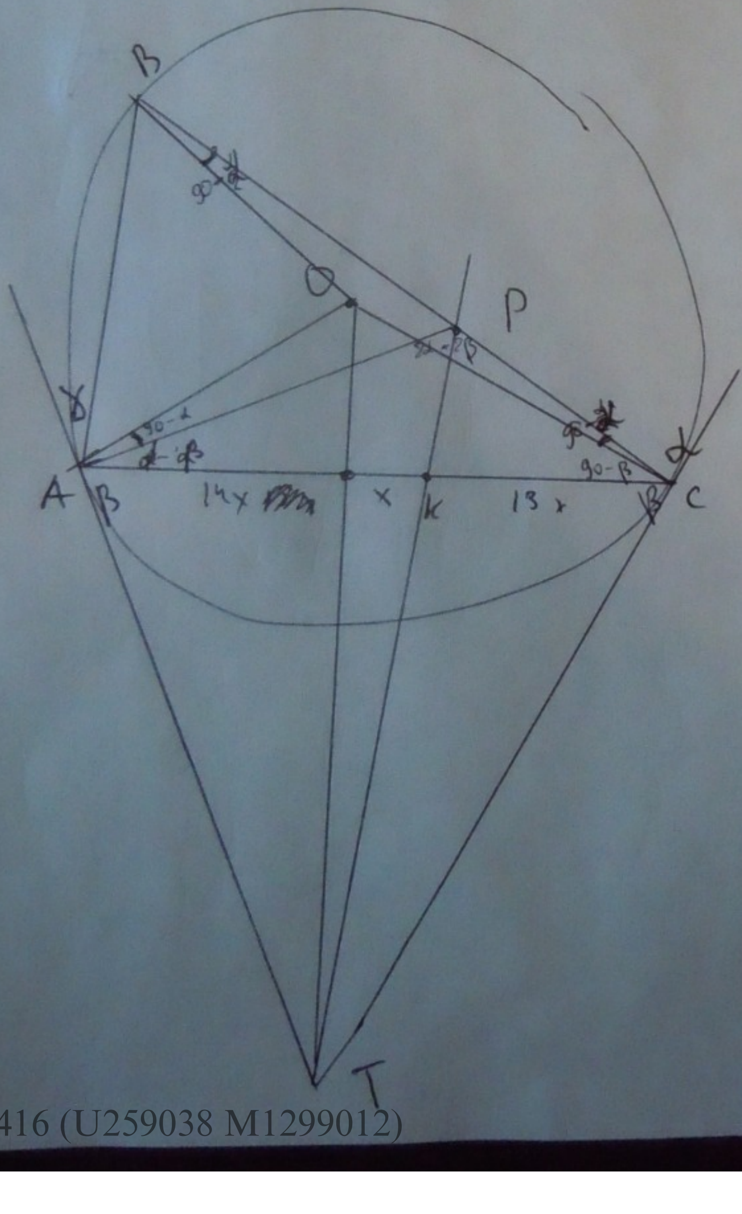
6) 1 y 16

19 x 1

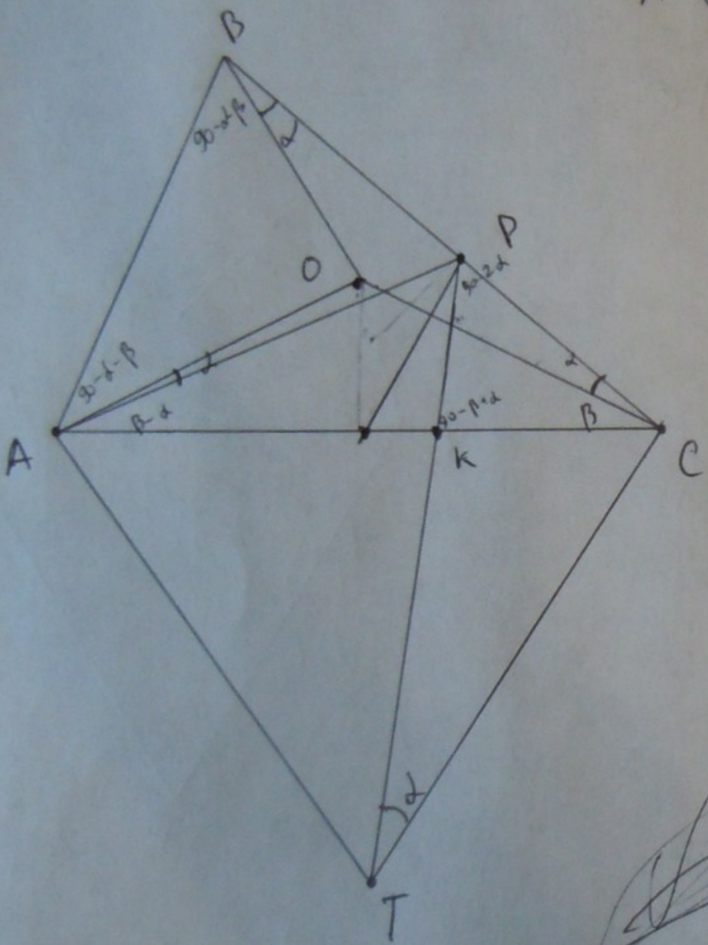
21104416 (U259038 M1299012)

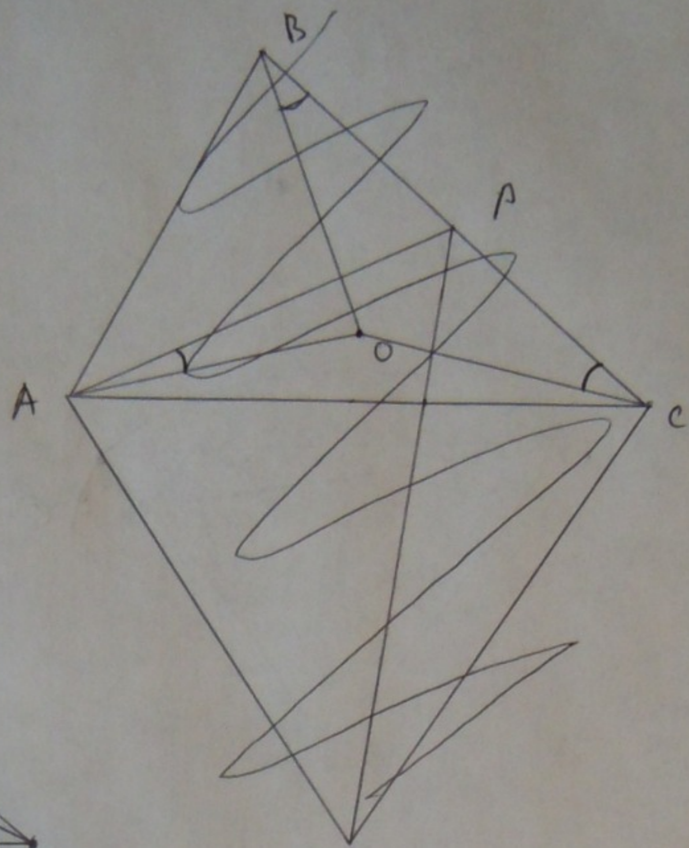



21104416 (U259038 M1299012)




$\beta-\alpha$