Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104192**

ID профиля: **875948**

Вариант 23

Чистовик математика 11 кл.

№ 1

$$\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S + 39 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{10}(a_{15} + b) > S + 39 \\ (a_{10} + b) a_{15} < S + 55 \end{cases} \quad b > 0$$

b - натуральное число т.к. члены последовательности целые

$$\begin{cases} a_{10} a_{15} + a_{10} b > S + 39 \\ a_{10} a_{15} + a_{15} b < S + 55 \quad | \times -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{10} a_{15} + a_{10} b > S + 39 \\ -a_{10} a_{15} - a_{15} b > -S - 55 \end{cases} + \Rightarrow a_{10} b - a_{15} b > -16$$

$$(a_1 + 9b) b - (a_1 + 14b) b > -16$$

$$a_1 b + 9b^2 - a_1 b - 14 b^2 > -16$$

$$-5b^2 > -16$$

$$b^2 < \frac{16}{5} \Leftrightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} < b < \frac{4}{\sqrt{5}}, \text{ но } b \in N$$

$$b \in \left(0; \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \quad \frac{4}{\sqrt{5}} < 2, \text{ т.к. } \frac{16}{5} < 4 \Rightarrow b = 1$$

$$(a_1 + 9)(a_1 + 15) > 6a_1 + 15 + 39$$

$$a_1^2 + 15a_1 + 9a_1 + 135 - 6a_1 - 15 - 39 > 0$$

$$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$$

$$(a_1 + 9)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -9$$

Чистовик Математика 11 кл

№1 (продолжение)

$(a_1+10)(a_1+14) < 6a_1+15+55$

$a_1^2+14a_1+10a_1+140-6a_1-15-55<0$

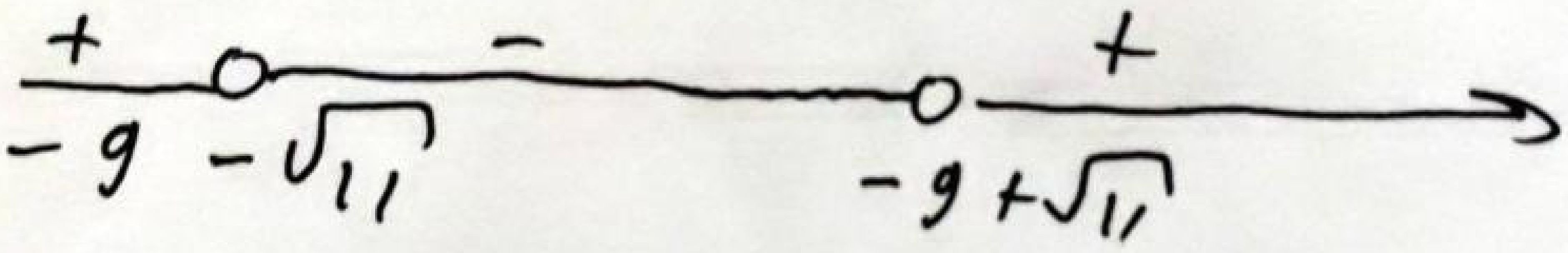
$a_1^2+18a_1+70<0$

$D=324-280=44=(2\sqrt{11})^2$

$$\left[\begin{array}{l} a_1=\dfrac{-18-2\sqrt{11}}{2}=-9-\sqrt{11}\\ a_2=\dfrac{-18+2\sqrt{11}}{2}=-9+\sqrt{11}\end{array}\right.$$

$(a_1+9+\sqrt{11})(a_1+9-\sqrt{11})<0$

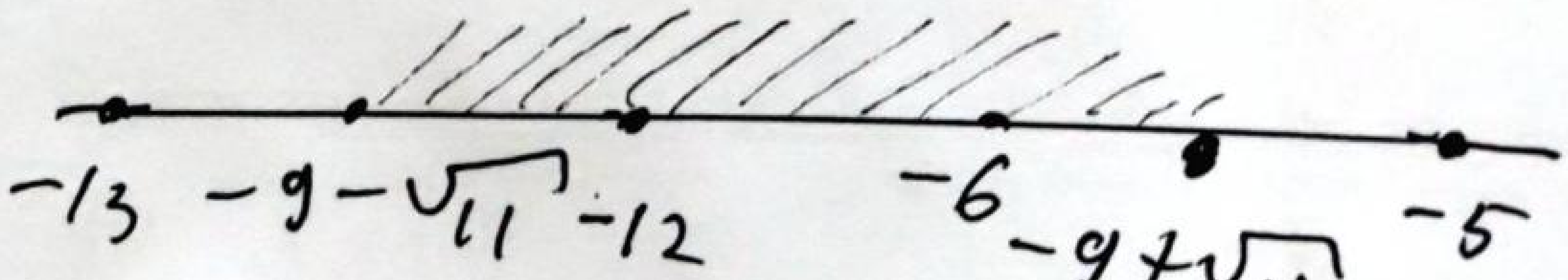
a_1



$a\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11})$

$-13<-9-\sqrt{11}<-12$ $3<\sqrt{11}<4$

$-6<-9+\sqrt{11}<-5$



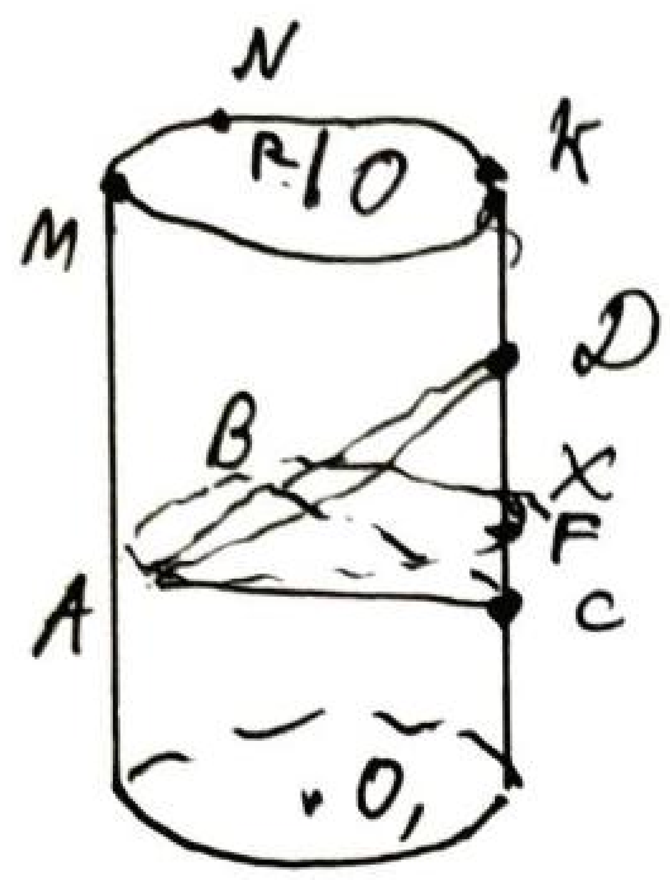
$a_1\in\{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$

−9 не подходит по первому неравенству

Ответ: $a_1\in\{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$

Чистовик Математика 11 кл

№ 2



Дано

$AB = 4$

$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7$

R_{min}; $CD \parallel OO_1$

Найти

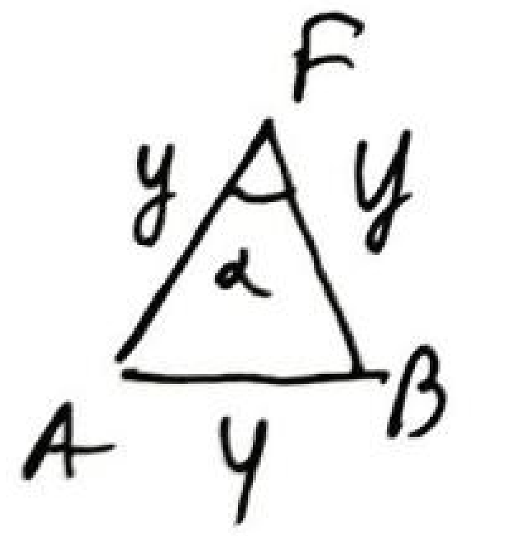
$CD = ?$

Решение

Т.к. $CD \parallel OO_1$; C и $D \subset$ на бок.повер. (по усл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD$ - образующая $\Rightarrow CD \perp (MNK)$; $M, N, K \subset$ в плоскости основания цилиндра

I Проведём окружность через AB и точку F, где $F \subset DC$ и $(ABF) \parallel (MNK)$ / ΔABF - будет проекцией ΔABC и ABD на (ABF)

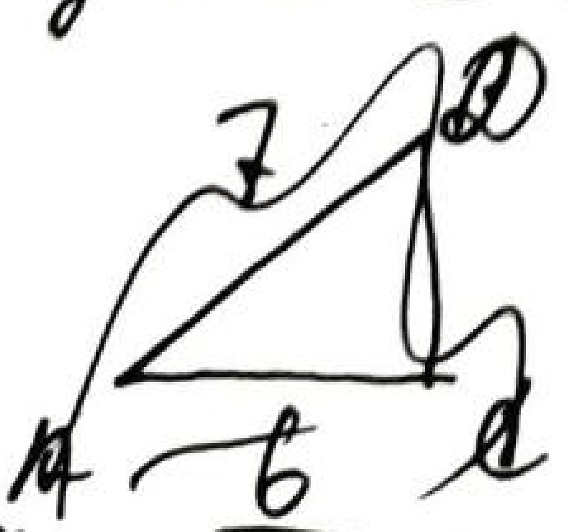


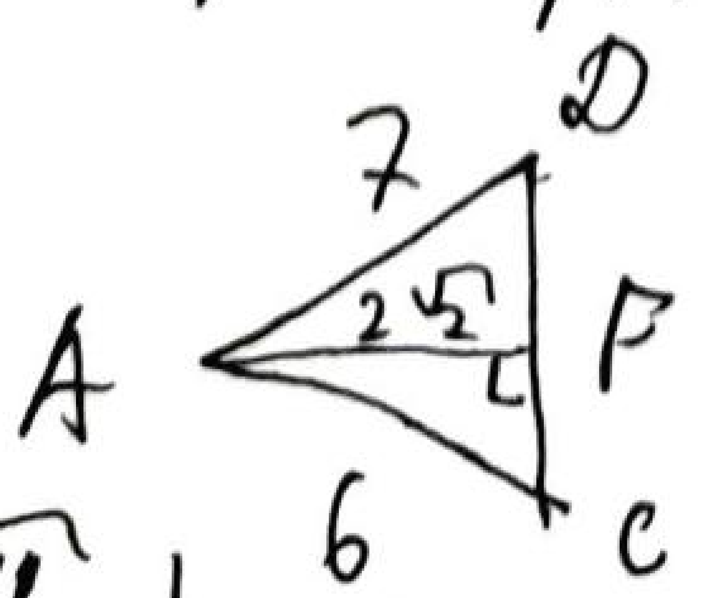
$S_{\Delta ABF} = \frac{y^2 \cdot 4}{4R_{on}} = \frac{1}{2} y^2 \cdot \sin\alpha$

$\frac{y^2}{R_{on}} = \frac{y^2 \cdot \sin\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{on}} = \frac{\sin\alpha}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{\sin\alpha}{2} \cdot R_{on} \Leftrightarrow R_{on} = \frac{2}{\sin\alpha}$ R_{on} - минимален, при $\sin\alpha = 1$; $\alpha = 90^\circ$

$y = 2\sqrt{2}$ (из теор. Пиф.)





$AF \perp DC$ т.к. $D C \perp$ обр.

$DF = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

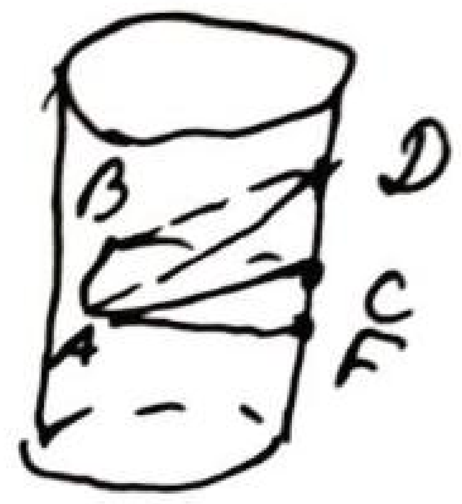
$FC = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$ $\Big| \Rightarrow DC = \underline{\sqrt{41} + \sqrt{28}}$

3

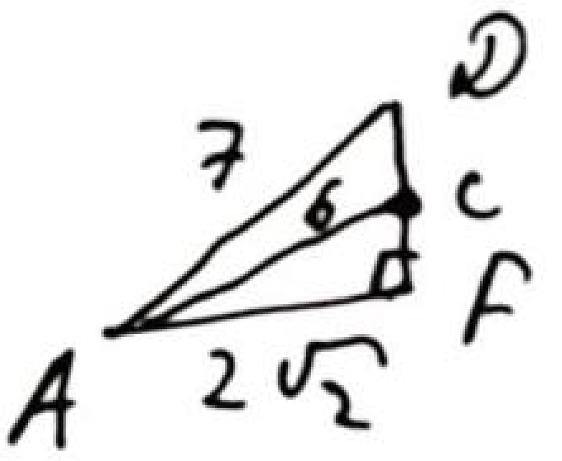
№ 2 (продолжение)

II Дальше DC будет зависить от расположения точки F

II



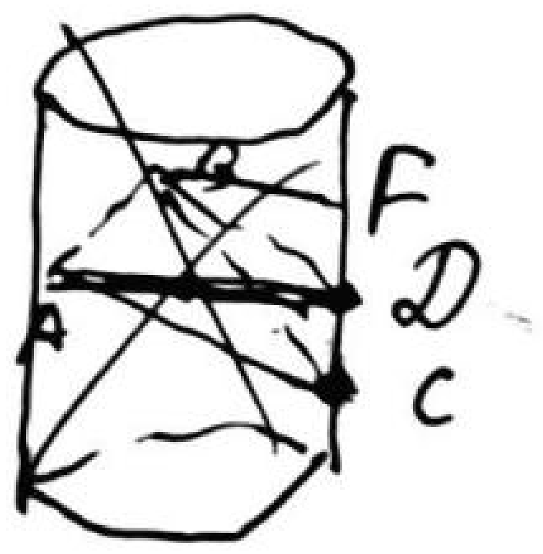
$AF = 2\sqrt{2}$ (из пункта I)

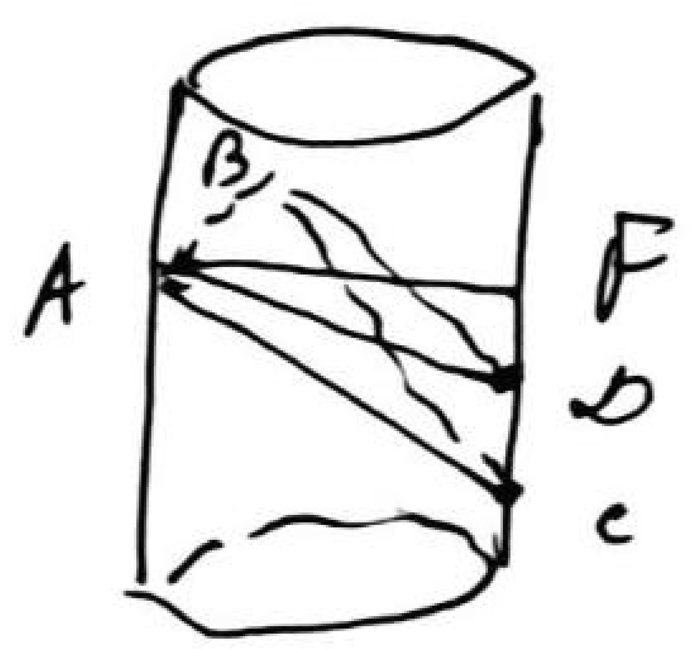


$CF = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$

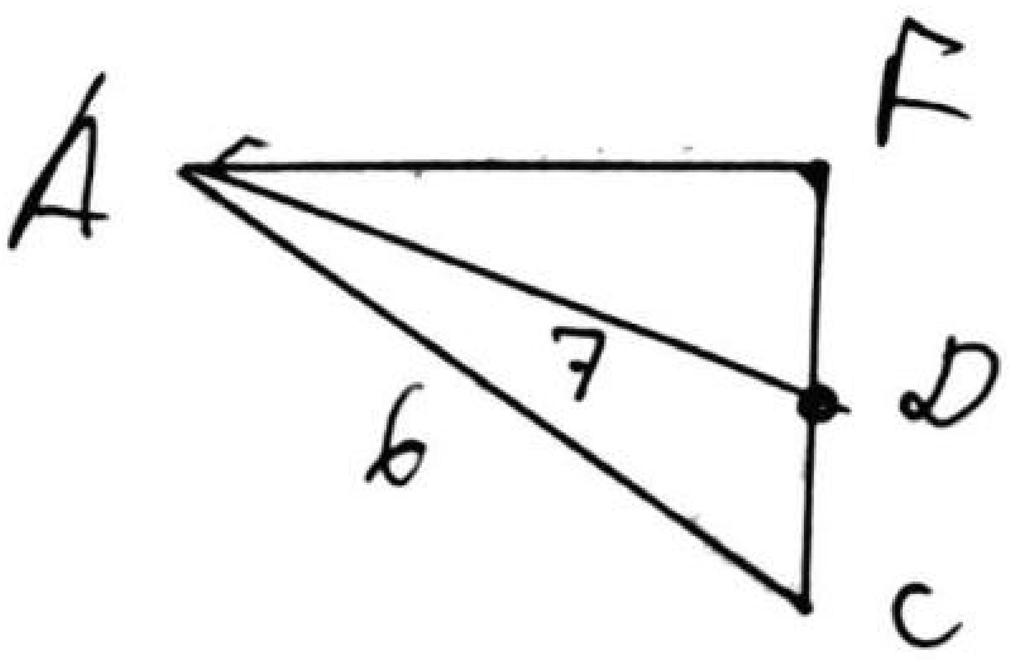
$DF = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$ $\Rightarrow$ $DC = DF - FC = \sqrt{41} - \sqrt{28}$

III F находится выше точки D





$AF = 2\sqrt{2}$ (из пункта I)



III: такое расположение невозможно т.к. $\underset{6}{AC} > \underset{7}{AD}$, ~~а это не~~ $6 > 7$ (неверно)

Ответ: $DC = \sqrt{41} + \sqrt{28}$ или $DC = \sqrt{41} - \sqrt{28}$

Черновик

$\begin{array}{r} \times 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$

$\cancel{a_{10} +}$

$1 \cdot 6$

$a_{10} \cdot a_{16} > S + 39$

$a_{11}^2 \cdot a_{15}^5 < S + 55$

$\begin{array}{r} -135 \\ 44 \\ \hline 91 \end{array}$

$a_1 \quad a_1 + 1$

$\frac{-9-3}{2} \cdot 6 = = -36$

$\cancel{10}$

$\cancel{a_{10} - a_{15} >} = 16$

$\cancel{a_1 + 9 =}$

$\cancel{(a_1 + a_1 + 9b)(a_1 + a_1 + 15b}$ $(a_1 + 9)(a_1 + 15) > 6a_1 + 44$

$a_{10}(a_{15} + b) > S + 39$

$(a_{10} + b)^2 \cdot a_{15} < S + 55$

$a_1^2 + 15a_1 + 9a_1 + 135 >$

$> 6a_1 + 44$

$a_1^2 + 18a_1 + 91 > 0$

$D = 324 - 4 \cdot 91 < 0$

$a \in \mathbb{R}$

$a_{10} a_{15} + a_{10} \cdot b > S + 39$

$a_{10} \cdot a_{15} + a_{15} \cdot b < S + 55 \quad | \times -1$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 5}{2} \cdot 6 =$

$= (2a_1 + 5) \cdot 3 =$

$= 6a_1 + 15$

$\begin{cases} -a_{10} a_{15} - a_{15} b > -55 - S \\ a_{10} a_{15} + a_{10} b > S + 39 \end{cases} +$

b - целое

$a_{10} b - a_{15} b > -16$

$(a_1 + 9b)b - (a_1 + 14b)b > -16$

$\begin{array}{r} -120 \\ 39 \\ \hline 81 \end{array}$

$a_1 b + 9b^2 - a_1 b - 14b^2 > -16$

$-5b^2 > -16$

$\sqrt{2} > 0$

$b^2 < \frac{16}{5}$

$-\frac{4}{\sqrt{5}} < b < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$\underline{b = 1}$

$D = 324 - 280 =$

$=$

Scanned by TapScanner

Черновик

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$CD^2 = 45 + 32 - 2\sqrt{45} \cdot \sqrt{32} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{\cancel{4b}\ CD^2 - 45 - 32}{-2\sqrt{45 \cdot 32}}$

$2\sqrt{x^2-2} = \dfrac{x^2}{2}$

$4\sqrt{x^2-2} = x^2$

$\begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 \le 8 \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a + 4b,\ 8) \end{cases}$

$16x^2 - 32 = x^4$

$x^4 - 16x^2 + 32 = 0$

$D = 256 - 128 = 128 = 4 \cdot 32 = 4 \cdot 4 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2$

$\sqrt{D} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

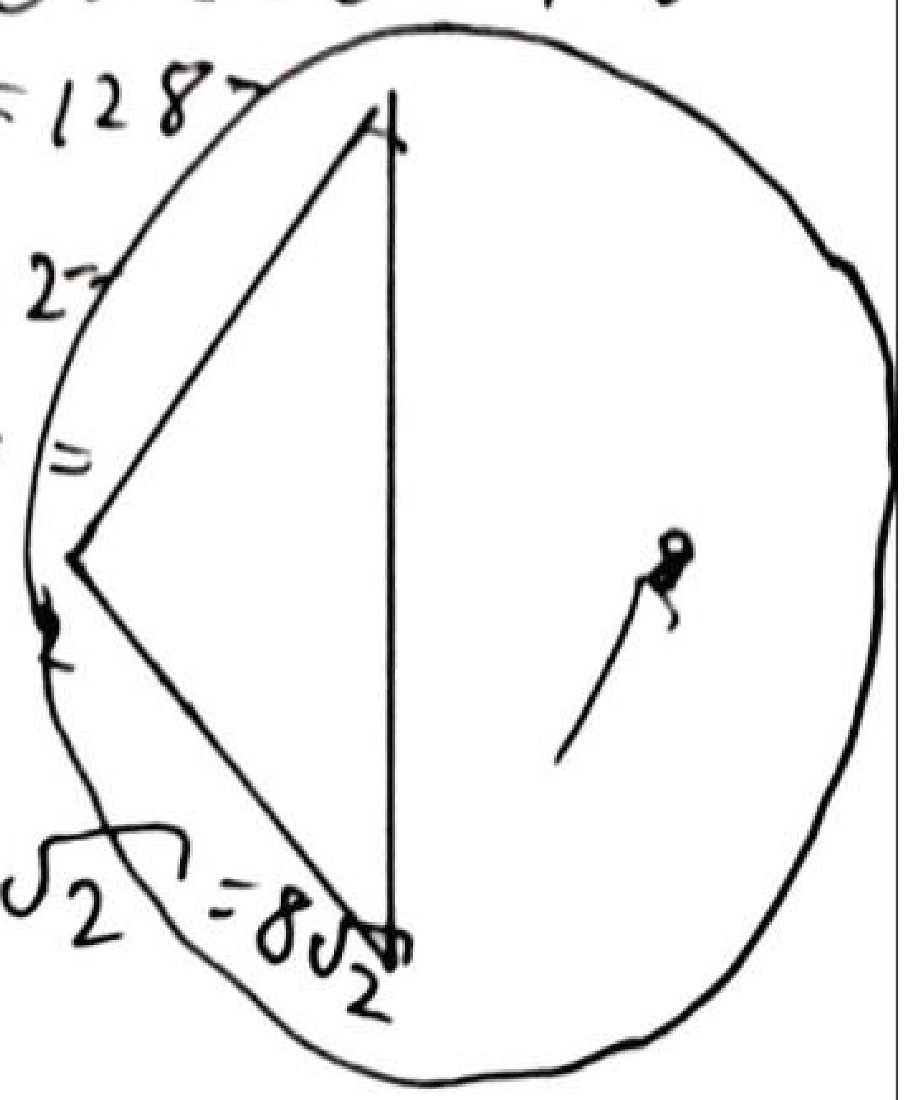
I $8 < -4a + 4b$

$a^2 + b^2 \le 8$

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{x^2-2} = \dfrac{4x^2}{8}$

$\sqrt{x^2-2}$

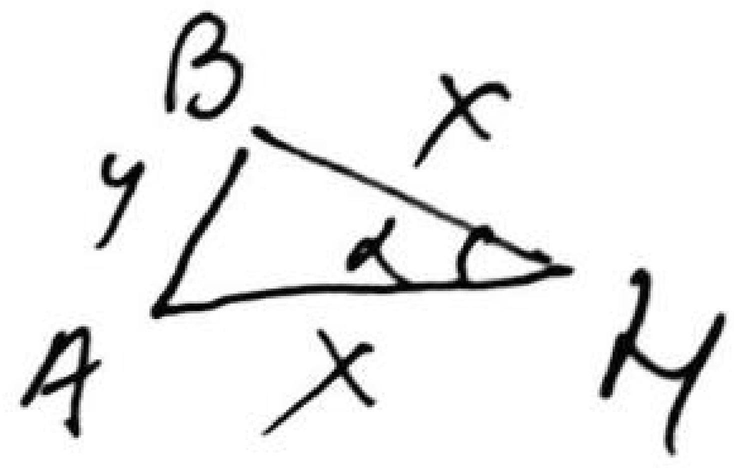
$\sqrt{45}$

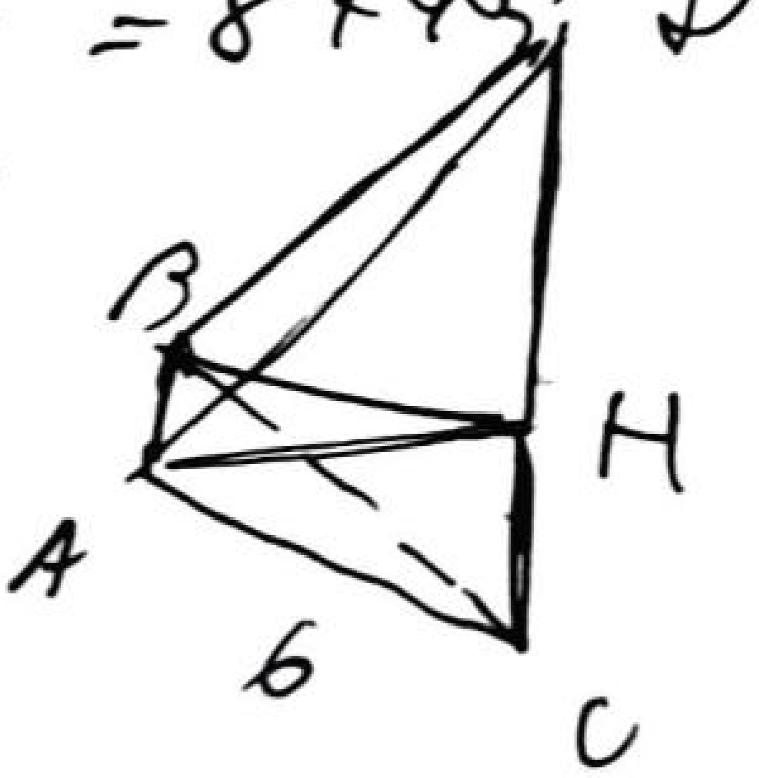


$\sqrt{32}$

$x^2 = \dfrac{16 - 8\sqrt{2}}{2} = 8 - 4\sqrt{2}$

$x^2 = \dfrac{16 + 8\sqrt{2}}{2} = 8 + 4\sqrt{2}$





$x^2 + x^2 = 16$

$x^2 = 8$

$x = 2\sqrt{2}$

$R = 2$

$S = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin\alpha$

$S = \dfrac{abc}{4R} =$

$\dfrac{1}{R} = \dfrac{\sin\alpha}{2}$

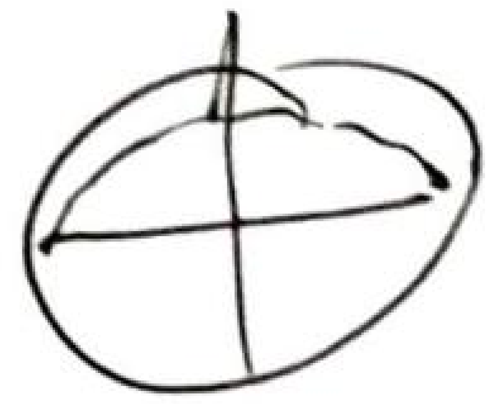
$= \dfrac{4\cancel{x}^{x}}{4R} = \cancel{\dfrac{x^2 \cdot \sin\alpha}{2}}$

$1 = \dfrac{\sin\alpha}{2} \cdot R$

$2 \quad \underline{2}.$

$\sin\alpha = 1$

Черновик



$(a_1+10)(a_1+14) < 6a_1+60$

$a_1^2+10a_1+14a_1+140-6a_1-60<0$

$a_1^2+18a_1+80<0$

$D = 324-320=4$

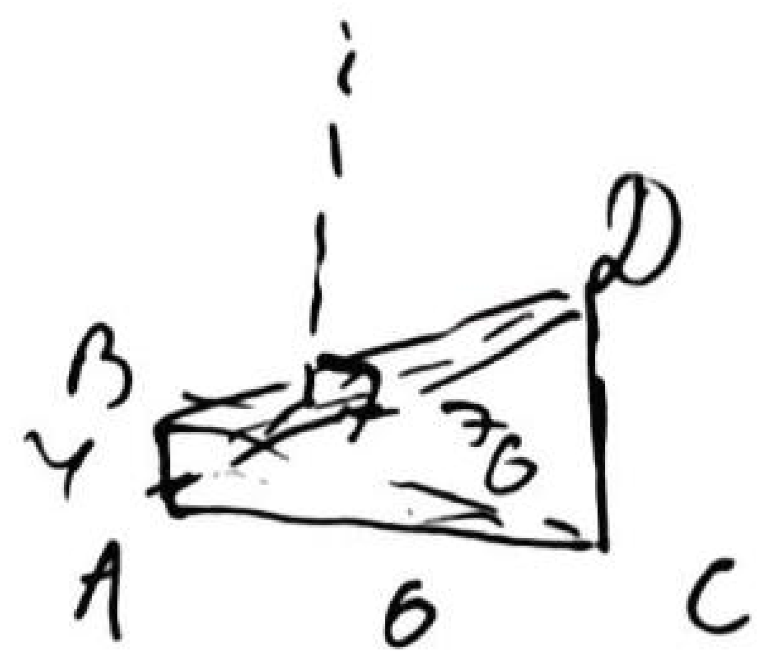
$\left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{-18-2}{2} = -10 \\ a_1 = \frac{-18+2}{2} = -8 \end{array}\right.$

$d\uparrow$ cos <

$(a_1+8)(a_1+10)<0$

$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -10 & & -8 & \end{array}$

$a_1 \in (-10;-8) \Rightarrow a_1 = -9$

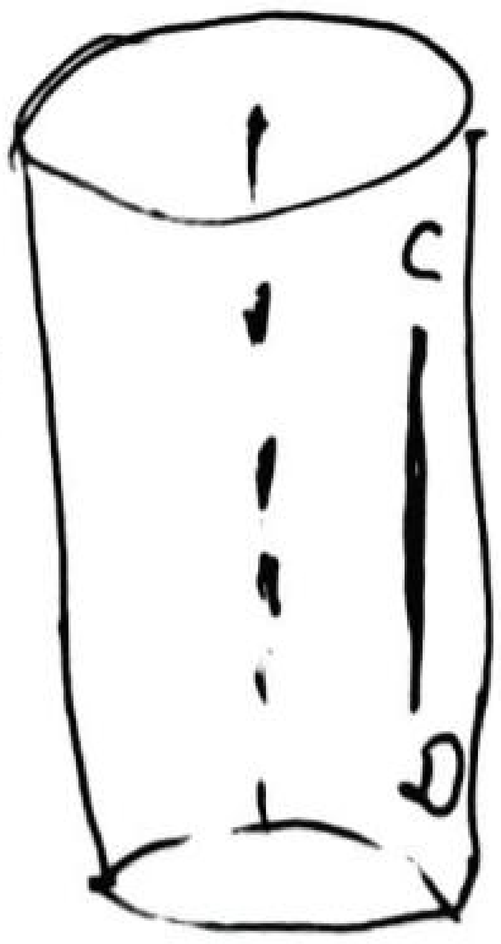


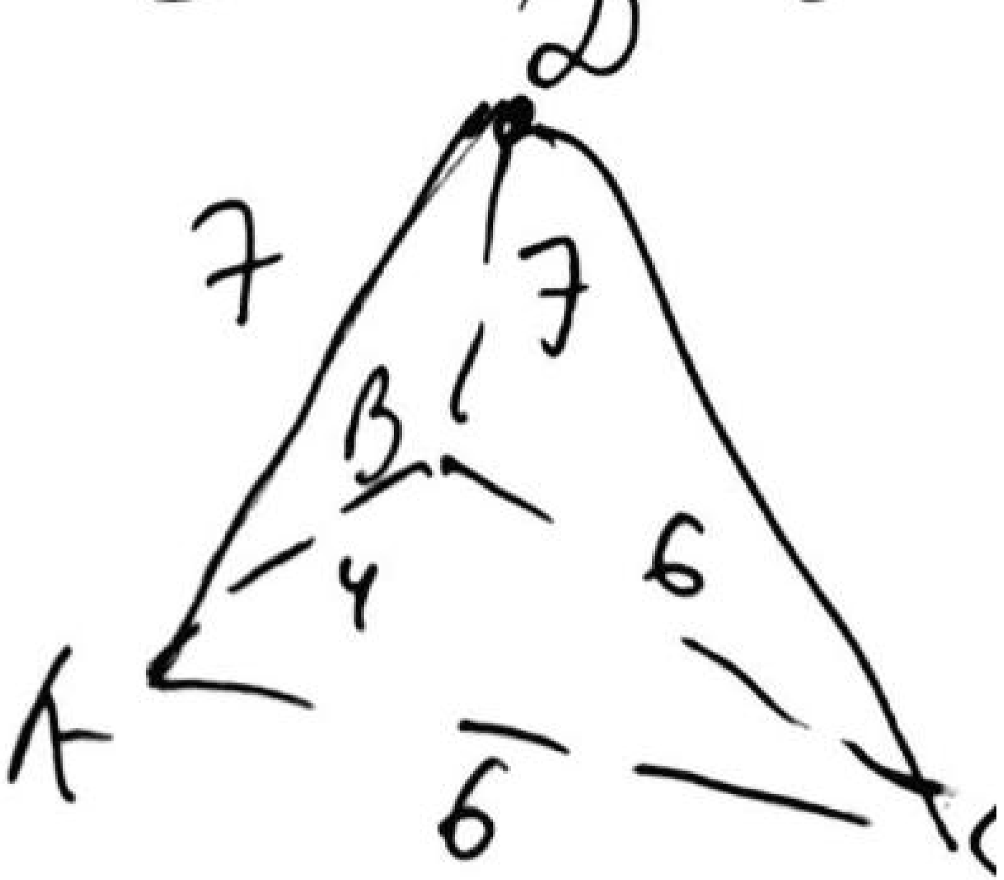
$\min(-4a+4b, 8)$

$4(b-a)$

$CD=$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$



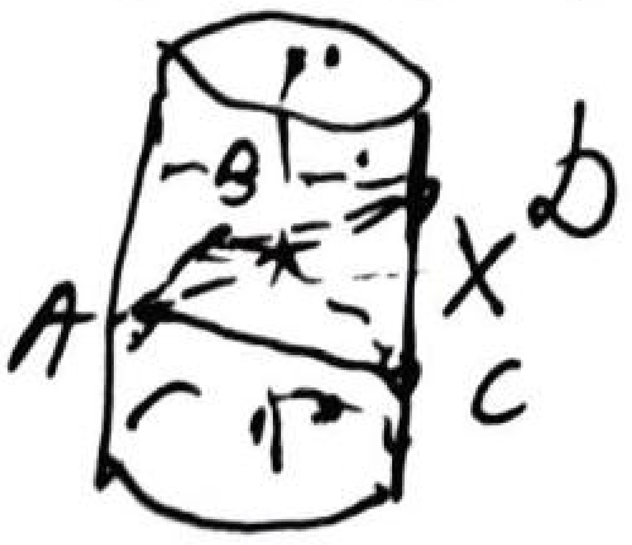


$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 8 \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$

I $-4a+4b<8$

$b-a<2$

$a^2+b^2 \leq b-a$



$\sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104192**

ID профиля: **875948**

Вариант 23

Чистовик
23 вариант

математика 11 кл.

№ 4

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 22 = 2 \cdot 11 \\ НОК(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$$

$a = 2^x \cdot 11^y$

$b = 2^z \cdot 11^m$

$c = 2^p \cdot 11^t$

У нас всегда есть числа с множителями $2, 11, 2^{16}, 11^{19}$ остальные 2 множителя выбираем $16 \cdot 19$ способами

Число способов разместить 2 переменных множителя $= 3 \cdot 3 = 9$ (каждый множитель по 3 местам)

Общее число без повторов: $16 \cdot 19 \cdot 9$

Числа 22 и $2^{16} \cdot 11^{19}$ мы считаем несколько раз их можно разместить 3 способами каждое, значит $9 - 3 \cdot 2 = 3$ способа для $2 \cdot 11$ и для $2^{16} \cdot 11^{19}$

Всего $16 \cdot 19 \cdot 9 - 3$ способа

Ответ: $16 \cdot 19 \cdot 9 - 3$ способа

1

математика 11 кл.

Чистовик

23 вариант

№ 5

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2\log_{(x+34)}(2x+23)$$

$$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)$$

$$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 2\log_{2x+23}(-x-4)$$

$$\begin{cases} x+34>0 \\ x \neq -33 \\ x<-4 \\ x\neq -3 \\ x \neq -5 \\ x > -\frac{23}{2} \\ x \neq -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-11{,}5 \\ x<-4 \\ x\neq -3 \\ x\neq -5 \\ x \neq -11 \\ x\neq -33 \end{cases}$$

Пусть два равных числа равны a

$$2\log_{(x+34)}(2x+23) \cdot \frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34) \cdot 2\log_{2x+23}(-x-4) =$$

$$= 2 = a^3 + a$$

$$a^3 + a - 2 = 0$$

$$a = 1 \text{ (оч. к.)}$$

$$(a-1)(a^2+a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1, \text{ значит } a+1=2$$

$$D = 1 - 8 < 0 \Rightarrow a^2+a+2>0$$

$$\cancel{2\log_{(x+34)}(2x+23) = 1}$$

$$\cancel{(2x+23)^2 = x+34}$$

$$\cancel{4x^2 + 2\cdot 46x + 23^2 - x - 34 = 0}$$

$$\cancel{4x^2 + 91x + 495 = 0}$$

$$\cancel{D = 91^2 - 4\cdot 4\cdot 495}$$

2

Чистовик математика 11 кл.

№ 51 (продолжение) 23 вариант

I

$$\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)=1$$

$$(x+4)^2=x+34$$

$$x^2+8x+16-x-34=0$$

$$x^2+7x-18=0$$

$$D=49+72=11^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-7-11}{2}=-9 \\ x_2=\frac{-7+11}{2}=2 \end{array}\right.$$

а) При $x=-9$

$$2\log_{(x+34)}(2x+23)=2\log_{25}5=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$2\log_{(2x+23)}(-x-4)=2\log_5 5=2$$ -9 - подходит

б) При $x=2$

$$2\log_{(x+34)}(2x+23)=2\log_{36}27$$ не равно ни 1, ни 2

II $\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)=2$, тогда $2\log_{(2x+23)}(-x-4)=1$

$$\log_{(-x-4)}(x+34)=4$$

$$\cancel{(x+4)^4=(x+34)}$$

$$(x+4)^2=2x+23$$

$$x^2+8x+16-2x-23=0$$

$$x^2+6x-7=0$$

$$D=36+28=64$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-6-8}{2}=-7 \\ x=\frac{-6+8}{2}=1 \end{array}\right.$$

3

Чистовик

№ 5 (продолжение) 23 вариант

а) $x = -7$

$\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34) = \frac{1}{2}\log_3 27 = \frac{1}{2}\cdot\cancel{3} = 1,5 \neq 2$, не подх.

б) $x = 1$ - не подходит по ОДЗ т.к $x < -4$

$\cancel{\frac{1}{2}}$

Ответ: $x = -9$

Scanned by TapScanner

~~Чистовик~~ Черновик математика 11 кл

23 вариант

№ 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 = 2 \cdot 11 \\ НОК(a;b;c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$$

$a = 2^x \cdot 11^y$

$b = 2^z \cdot 11^m$

$c = 2^p \cdot 11^t$

~~У нас всегда один показатель равен 19, другой 16, третий 1, четвертый~~

У нас всегда есть числа с множителями $2^1, 11^1, 2^{16}, 11^{19}$, остальные 2 множителя выбираем $16 \cdot 19$ способами

Число способов разместить 2 переменных множителя по 6 местам: ~~$A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$~~ $3 \cdot 3 = 9$

Общее число способов без учёта повторов: $16 \cdot 19 \cdot 9$ Числа 22 и $2^{16} \cdot 11^{19}$ мы считаем несколько раз их можно разместить ~~...~~ 3 способами, значит ~~24~~ 3 способа минимум, т.к. 3 способа для $2 \cdot 11$ и 3 для $2^{16} \cdot 11^{19}$

Всего $16 \cdot 19 \cdot 9 - 3$ способа

Ответ: $16 \cdot 19 \cdot 30 - 24$ способа

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 = 2 \cdot 11 \\ НОК(a;b;c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$$

$a = 2^{\alpha} \cdot 11^{\beta}$

$b = 2^{\gamma} \cdot 11^{x}$

$c = 2^{k} \cdot 11^{t}$

Не умоляя общности пусть $t = 19$, $k = 16$

I 2^{16} и 11^{19} содержатся в ~~II~~ одном числе и 2^1 и 11^1 тоже в одном

пусть $a = 2 \cdot 11$

$c = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$b = 2^{\gamma} \cdot 11^{x}$ $\gamma \in [1; 16]$

$x \in [1; 19]$

$\underline{16 \cdot 19}$

II 2^{16} и 11^{19} в одном числе 2^1 и 11^1 в разных числах

$2 \cdot 11^{\beta}$ $16 \cdot 19 - 1$

$2^{\gamma} \cdot 11$

~~2^{19}~~ $2^{16} \cdot 11^{19}$

III

Черновик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \frac{1}{\log_{2x+23}\sqrt{x+34}} = \frac{2}{1}\log_{x+34}(2x+2$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)$ $-x-4>0$

$x<-4$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) =$

$2 \cdot 1 = 2 = a^3+a$

$= 2\log_{2x+23}(-x-4)$

$a^3+a-2=0$

$a=1$

$\frac{1}{2}2\log_{(x+34)}(2x+23)$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_{(-x-4)}(x+34)\cdot\log_{(x+34)}(2x+23)\cdot\log_{(2}$

$\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)$

$= \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} = a^2(a+1) =$

$2\log_{(2x+23)}(-x-4)$

$= a^3+a-\frac{1}{2} =$

$\frac{-3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$

$3a^2+1=0$

$=$

$\frac{3\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} =$

$a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\log_{x+34}(2x+23) = \frac{1}{2}\log_{(-x-4}(x+34)$

Scanned by TapScanner

Черновик

$a = 2^{\alpha} \cdot 11^{\cancel{\beta}\,19}$ $\quad$ $\cancel{16 \cdot 16 + 19 \cdot 19 = 16^2 \cdot 19^2}$

$b = 2^{16} \cdot 11^{\cancel{x}\,1}$ $\quad$ $16 \cdot 19$

$c = 2^{\cancel{x}\,1} \cdot 11^{t}$

№ 5

$x + 34 \neq 1$

$2x + 23 \neq 1$

$x + 34 > 0$

$x + 4 \neq \pm 1$

$2x + 24 > 0$

$\log_{\sqrt{x+34}} (2x+23)$

$\log_{(x+4)^2} (x+34)$ $\quad$ $\log_{\sqrt{2x+23}} (-x-4)$

I $a = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$b = 2 \cdot 11$

$\boxed{16 \cdot 19}$

$16 \cdot 19 \cdot \frac{6!}{(6-2)!} =$

$= 16 \cdot 19 \cdot 5 \cdot 6 - 2$

II $a = 2^{16} \cdot 11^{19}$ $\quad$ $A_3^2 = \frac{3!}{1} = 6$

$b = 2^{x} \cdot 11^{y}$ $\quad$ x y

$c = 2 \cdot 11$ $\quad$ ещё $16 \cdot 19 - 1$ $\quad$ z m

p t

III

Каждое А имеет

2, 11 или $2^{16} \cdot 11^{19}$ по нескольким