Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104179**

ID профиля: **130838**

Вариант 23

№1 Чистовик

Математика, 11
В.23
Стр. 1

Пусть $a=a_1$, b - разность прогрессии. По условию, a и b - целые, причем $b>0$. Заметим, что

$(a+9b)(a+15b) = a^2+24ab+135b^2 > S+39 \Rightarrow a^2+24ab+140b^2 > S+39+5b^2$

Но $(a+10b)(a+14b) = a^2+24ab+140b^2 < S+55$, откуда $S+39+5b^2 < S+55 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 < 3{,}2$. b - целое и положительное $\Rightarrow b=1$ - единственный вариант.

Заметим, что $S=6a+15b=6a+15$. Чтобы найти a, решим систему

$\begin{cases} a^2+24a+135 > 6a+54 \\ a^2+24a+140 < 6a+70 \end{cases}$ 1. $a^2+18a+81>0$: $(a+9)^2>0 \Rightarrow a\neq -9$

2. $a^2+18a+70<0$. $D=324-280=44$.

$a_{1,2} = \dfrac{-18\pm\sqrt{44}}{2} = -9\pm\sqrt{11}$. Тогда $a^2+18a+70<0$ при $-9-\sqrt{11}<a<-9+\sqrt{11}$

$\begin{cases} a\neq -9 \\ -9-\sqrt{11}<a<-9+\sqrt{11}. \end{cases}$

$\cancel{-9-\sqrt{11}<-4}$ $-13<-9-\sqrt{11}<-12$; $-6<-9+\sqrt{11}<-5$, откуда

$\begin{cases} a\neq -9 \\ -13<a<-5. \end{cases}$

При этом a - целое, откуда все возможные: $-12, -11, -10, -8, -7, -6$

Ответ: $-12, -11, -10, -8, -7, -6$

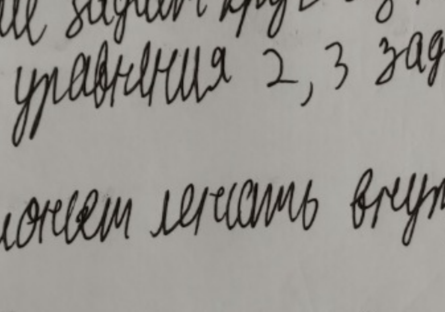
Заметим, что если число ~~меньше~~ не больше минимального из двух чисел, оно ~~меньше~~ не больше обоих этих чисел. Значит, система из условия равносильна следующей:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le 8\\ a^2+b^2\le -4a+4b\end{cases}$$

Первое уравнение задает круг с центром в (a,b) и радиусом $2\sqrt{2}$. В то время как уравнения 2, 3 задают возможные местоположения точки (a,b)

2. Тогда (a,b) может лежать внутри окр. с координатами $(0;0)$ и радиусом $2\sqrt{2}$.

2. $a^2+4a+4+b^2-4b+4\le 8 \Rightarrow (a+2)^2+(b-2)^2\le 8$. Это уравнение задает круг с центром в $(-2;2)$ и радиусом 8. Найдя пересечение фигур, задаваемых уравнениями (2) и (3), получим множество возможных a и b. Заметим, что $(-2;2)$ лежит на границе первого круга, и радиусы их окружностей равны. То есть, пересечение будет выглядеть так:



Заметим, что в таком случае общая хорда стягивает дуги в $90°$. Пересечение - это 2 сегмента таких дуг. Чтобы найти площадь искомой фигуры ~~пров~~ нужно провести окружность радиусом $2\sqrt{2}$ из каждой точки пересечения, область, ограничивающая получившейся фигурой, нам и нужно найти её площадь. Найдем сначала фигуру, получающуюся из сегмента, а для этого - из ~~пло~~ ~~площ~~ окружности.

№ 3 Чистовик

Математика, 11

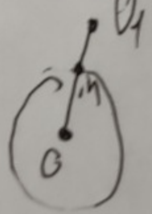
продолжение: круг

стр. 3

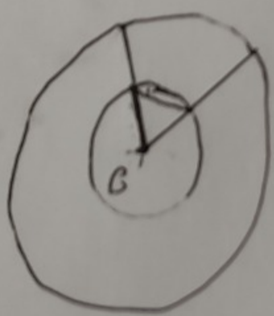
1. Окружность. Пусть имеем ~~окружность~~ радиусом $2\sqrt{2}$, нужно из каждой ее точки провести окр-ность неродного радиуса и найти фигуру. Это будет ~~окр.~~ круг радиусом $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

В.23

И самом деле: $O_1M=2\sqrt{2} \Rightarrow OO_1=4\sqrt{2}$, т.е. если $OO_1\leq 4\sqrt{2}$, то $O_1\in$ фигуре, и если $OO_1>4\sqrt{2}$, то не принадлежит:



2. Сегмент. Тогда получим. ~~сегмент~~



21104179 (U130838 M1299653)

черновик

№ 17

$a_1, \cancel{a_2, a_3}$ $6a_1 + 15b$

-5

$\cancel{25-90}$

$\cancel{25-90+40}$

$(a_1+9b)(a_1+15b) > 6a_1+15b+39$

$\cancel{a_1^2+24ba_1+135b^2 > 6a_1+15b+39}$

$x^2+b^2 \le 8$

$a_1 = a$, b – разность

$6a+15b=S$

$(a+9b)(a+15b) > S+39$ $a^2+24ab+135b^2 > S+39$

$(a+10b)(a+14b) < S+55$ $a^2+24ab+140b^2 < S+55$

$a^2+24ab+140b^2 > S+39+5b^2$

$16-8\sqrt{2}$

$a^2+24ab+140b^2 < S+55$

$\cancel{a^2+24a+135 > 6a+15b}$

$4 \quad 2$

$S+39+5b^2 < S+55$

$5b^2 < 16$

$-2\sqrt{2}+2$

$b^2 < 3{,}2 \Rightarrow b=1$

$12-8\sqrt{2}+2$

$6a+15+55$

$-12, -11, -10, -9, -8, -7$

-4

-4

-10
135
-54
81

13 -260
100 26
234

-57

13
13

$-9 > -19$

$-3, 3$

169

$-2, 2$ $-4 < -2$

-13

$-3 \cdot 1 > -8$

-12

-63

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ – окр. с центром в (a,b), $R = 2\sqrt{2}$

$-4a+4b \le 8 \Rightarrow b-a \le 2$

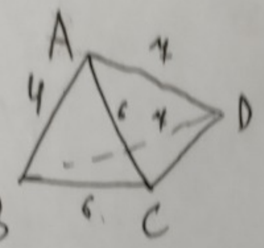
$a^2+b^2 \le 8$

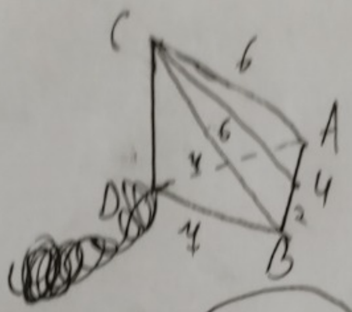
21104179 (U130838 M1299653)

Черновик

$\sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$

№2





-3

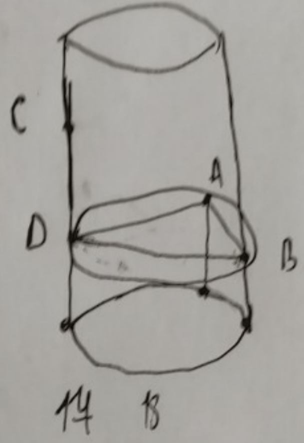
$-9-8-7-6-5-4$

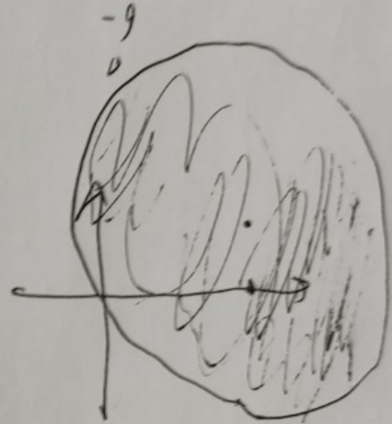
a^2+b^2

$a^2 \cancel{+b^2} \leq -4a+4b$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \leq 8$

2 4





$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 8 \\ a^2+b^2 \leq 8 \\ \cancel{b-a \leq 2} \quad b-a>2 \end{cases} \\ \begin{cases} \cancel{(x-a)(y-b)} \quad (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 8 \\ a^2+b^2 \leq -4a+4b \\ -4a+4b \leq 8 \end{cases} \end{array}\right.$$

$-4a+4b>8$

$-4a+4b \leq 8$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 8 \\ a^2+b^2 \leq -4a+4b \quad . \cancel{(a+2)^2+(b} \\ a^2+b^2 \leq 8 \end{cases}$$

$\cancel{1.\ b=a+2}.\ b>a+2$

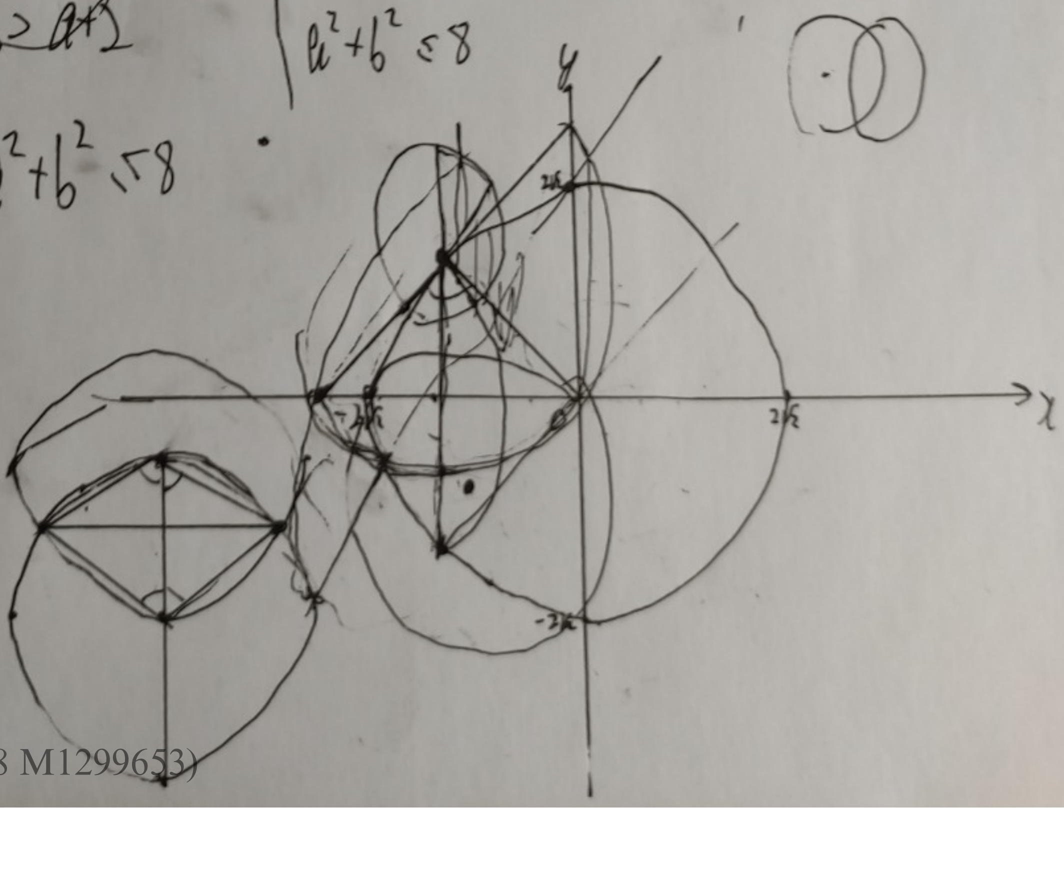
$a^2+b^2 \leq 8$

$a^2+b^2 \leq -4a+4b)$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \leq 8$

$-2,\ (2-2\sqrt{2})$

$-2;-2$

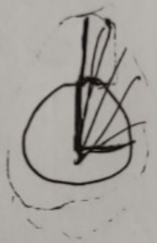


Черновик №3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le -4a+4b\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}$$

$(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$

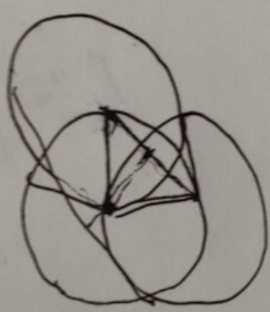
−3



6

44

$2\sqrt{44}$



−10, −9, −8, −7, −6; 5

$-1\cdot 5>-6$

$0<10$

21104179 (U130838 M1299653)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104179**

ID профиля: **130838**

Вариант 23

№4, чистовик

Каждое из чисел представляется в виде $2^n \cdot 11^l$, иначе в их НОК были бы и другие простые множители.
Пусть $a = 2^{n_a} \cdot 11^{l_a}$, $b = 2^{n_b} \cdot 11^{l_b}$, $c = 2^{n_c} \cdot 11^{l_c}$. Из системы получаем, что $\min(n_a, n_b, n_c) = 1$, $\min(l_a, l_b, l_c) = 1$, $\max(n_a, n_b, n_c) = 16$, $\max(l_a, l_b, l_c) = 19$. Найдем все возможные (n_a, n_b, n_c) и (l_a, l_b, l_c), удовлетворяющие этим условиям. Перемножив их, получим ответ, т.к. это будут все случаи удовл. условию, 2 и 11 взаимно просты.

1. n_a, n_b, n_c. Предположим, все они различны. Тогда таких наборов будет $3 \cdot 2 \cdot 14$ (сначала - номер максимального, потом - минимального, потом - значение от. от 2 до 15). $3 \cdot 2 \cdot 14 = 84$. Но еще есть случаи, когда 2 из значений равны: $(16, 16, 1)$; $(16, 1, 16)$, $(1, 16, 16)$, $(1, 1, 16)$, $(1, 16, 1)$, $(16, 1, 1)$, итого $84 + 6 = 90$ вариантов.
2. l_a, l_b, l_c. Аналогично, если все они различны, получим $3 \cdot 2 \cdot 17 = 102$, да еще 6 случаев, когда 2 совпадают: итого 108 случаев. Тогда общее кол-во троек равно $90 \cdot 108 = 9720$

Ответ: 9720

черновик

математика, 11
стр.1

$2\cdot 11$ $2\cdot 11$ $2\cdot 11$

19,1

19,19,1
1,16,16

$2^{a_2}\cdot 11^{a_{11}}$, $2^{b_2}\cdot 11^{b_{11}}$, 2^1

19,1,2
19,2 2

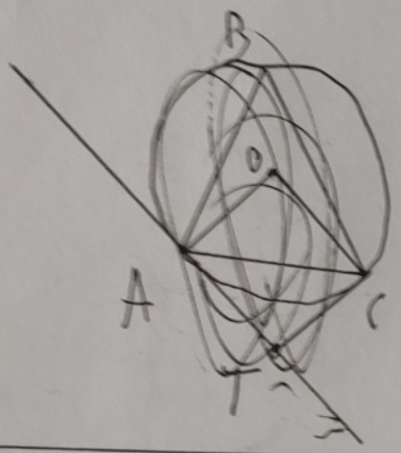
$2^{n_a}\cdot 11^{l_a}$

$\log_2 8 \cdot \log_2 8 = \log_2 64$

$\log_3 27 \cdot \log_3 9$

19,19,1
16,16,1

$l_a, l_b, l_c = 19$



19,1 9

108·9

19,1,18

2-15

6·14

1080
108
972

15.

1. $\cancel{\log_{x+y^2}(2x^2+23)}$

$\cancel{2\log_{x+y^2}(2x^2+23)}$

$\log_{16}(4)$

$16^{\frac{1}{2}}$

14.

~~Каждое из чисел делится на 22, 2 и 11~~

$2^{k_a}\cdot 11^{m_a}$, $2^{k_b}\cdot 11^{m_b}$, $2^{k_c}\cdot 11^{m_c}$.

$\max(k_a, k_b, k_c) = 16$

$\max(m_a, m_b, m_c) = 19$

$\min(k_a, k_b, k_c) = 1$

$\min(m_a, m_b, m_c) = 1$

$16^{\frac{-8}{4}}$

-10

36^{6}

$y^2(y+1)$

21104179 (U130838 M1299654)

Черновик

16, 1, 12 1(2

17, 19, 1 0

-1 -1 -0

16 1, 12 12 1 16

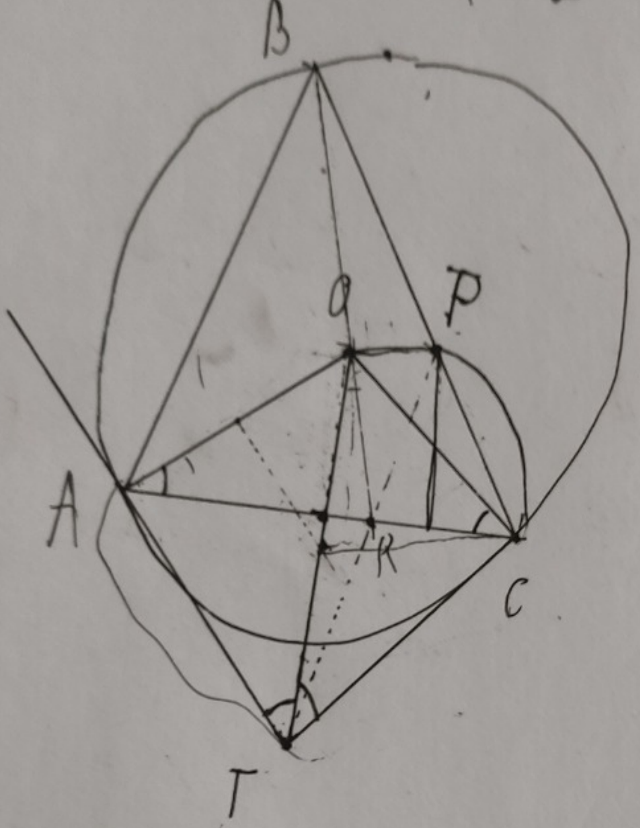
17, 19, 1 1 19 14

11, 11.

стр. 2

5 · 18 6 · 15, 6 · 18

AOCT - вписанный => A, O, P, C, T - на одной окр.



15 34 10

20

$y^3+2y^2+2y-y^2-2y-2$

1 1 2

2 2 3 6

23·23

460

$y^2 \cdot y$

$\frac{7 \pm 11}{2}$

49+72

$-x-4>0 \quad x+4<0$

$(y-1)(y^2+2y+2$

$x^2+4x-18$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23), \log_{(x+4)^2}(x+34), \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$\log_a b^2, \log_{c^2}(a^2), \log_b(c)$

$\log_{\sqrt{x+34}}(x+34) \cdot \log_{\sqrt{2x+23}}(2x+23) \cdot \log_{(x+4)^2}(-x-4) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 = y^3+y$

$91 \cdot 91 - 16 \cdot 5 \cdot 91 =$

$= 11 \cdot 91 =$

$y^3+y-2=0$

1 0 1 -2

1 1 0 1

~~$(y-1)(y^2+y)-2)$~~

$(y-1)(y^2+y+2) = y^3+y^2+2y-y^2-y+2 = y^3+y-2$

$y^2+y+2=0$

$y=1$

21104179 (U130838 M1299654)

Чистовик. №5 — Математика, 11 В. 23, стр. 2

Пусть 2 из данных чисел равны y, тогда третье: $y+1$. Тогда на ОДЗ:

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=\log_{\sqrt{x+34}}(x+34)\cdot\log_{(x+4)^2}(-x-4)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(2x+23)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=2=y\cdot y\cdot(y+1)=y^3+y^2$ (по св-ву логарифма).

Откуда $y^3+y^2-2=0$, или $(y-1)(y^2+2y+2)=0$. $y^2+2y+2=0$: $D=4-8<0\Rightarrow$ решений нет. Значит, единственное решение $y=1$. То есть, 2 из этих чисел равны 1, а третье − 2. Рассмотрим все случаи:

1. $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$. Из второго ~~первого~~: ~~$\sqrt{x+34}=(2x+23)\Rightarrow x+34=4x^2+529+92x$. $4x^2+91x+495=0$~~ $x^2+8x+16=x+34$, $x^2+7x-18=0$. $x_{1,2}=-9, 2$. $x=2$ не подходит по первому, $x=-9$: подходит по первому, подходит по третьему, подходит по ОДЗ $\Rightarrow$ это правильный ответ.

2. $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1$. Тогда $\sqrt{2x+23}=-x-4\Rightarrow 2x+23=x^2+8x+16$. $x^2+6x-7=0$. $x_{1,2}=1,-7$. $x=1$ не подходит по ОДЗ $(-x-4>0)$, $x=-7$: не подходит по первому: $\log_{\sqrt{-7+34}}(-14+23)=\log_{\sqrt{27}}(9)\neq 1$.

3. $\log_{(x+4)^2}(x+34)=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1$. Тогда $x^2+8x+16=x+34\Rightarrow x_1=2,\ x_2=-9$. ~~Эти случаи уже рассмотрели~~.
$x=2$ не подходит по ОДЗ $(-x-4>0)$, $x=-9$ подходит, ~~хоть в нем $\log_{(x+4)^2}(x+34)\neq 1$~~, хоть и не в этом случае, т.к. $\log_{\sqrt{5}}(5)\neq 1$.

Рассмотрев все случаи, получаем единственный ответ: $x=-9$

Ответ: −9