Часть 1

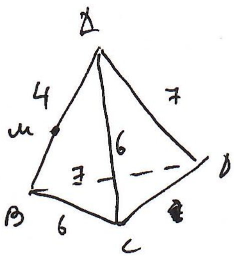
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

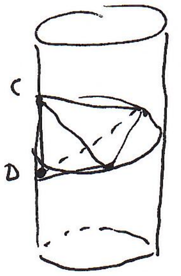
Шифр: **21104102**

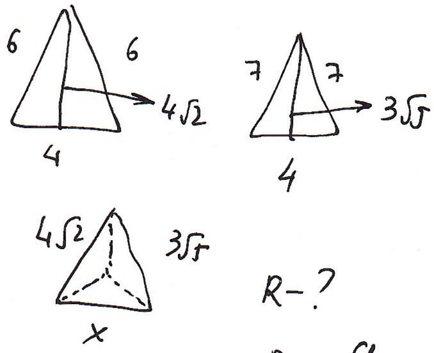
ID профиля: **89625**

Вариант 23

Черновик







R − ?

$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$

$R\downarrow \Rightarrow \sin\alpha\uparrow \Rightarrow |\cos\alpha|\downarrow$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8)$

1) $-4a+4b \geq 8$

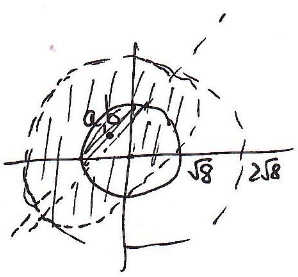
$b-a \geq 2$

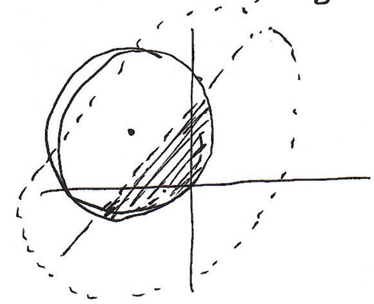
$a^2+b^2 \le 8$

2) $b-a<2$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$





Черновик

$a_1, \dots, a_6$

$a_n = a_0 + nd \quad a_0, d \in \mathbb{Z}$

$S_6 = S = \frac{\cancel{a_0 d} + a_0 + 6d}{2} \cdot 6$

$a_{10} a_{16} > S + 39$

$a_{11} a_{15} < S + 55$

$(a_0 + 10d)(a_0 + 16d) > (2a_0 + 7d) \cdot 3 + 39$

$(a_0 + 11d)(a_0 + 15d) < (2a_0 + 7d) \cdot 3 + 55$

$a_0^2 + 26a_0 d + 160d^2 > 6a_0 + 21d + 39$

$a_0^2 + 26a_0 d + 165d^2 < 6a_0 + 21d + 55$

$a_0^2 + 26a_0 d + 160d^2 > 6a_0 + 21d + 39 > a_0^2 + 26a_0 d + 165d^2 - 16$

$5d^2 - 16 < 0$

$d^2 < \frac{16}{5} = 3{,}2 \Rightarrow d = \pm 1$

1) $a_0^2 + 26a_0 + 160 > 6a_0 + 60$

$a_0^2 + 20a_0 + 100 > 0$

$(a_0 + 10)^2 > 0$ при $a_0 \neq -10$

$a_0^2 + 26a_0 + 165 < 6a_0 + 21 + 55$

$a_0^2 + 20a_0 + 89 < 0$

$(a_0 + 10)^2 - 11 < 0 \quad a_0 \in (-10 - \sqrt{11}; -10 + \sqrt{11})$

$a_0 = -13; -12; \dots; -7$

кроме $\underline{-10}$

2) $(a_0 - 10)^2 > 0$

$(a_0 - 10)^2 < 11$

Аналогично: $7; 8; 9; 11; 12; 13$.

$a_0 \neq a_1$!

Чистовик

Задача 1.

Пусть арифм. прогрессия имеет вид: $a_n = a_0 + nd$, где d - разность прогрессии

$S = a_1 + a_2 + .. + a_6 = (a_0+d) + .. + (a_0+6d) = \frac{(a_0+d)+(a_0+6d)}{2} \cdot 6 = 3(2a_0+7d)$ - по св-ву ар. прог.

$a_{10} a_{16} = (a_0+10d)(a_0+16d) = a_0^2 + 26a_0d + 160d^2$; $S+39 = 3(2a_0+7d)+39$

$a_{11} a_{15} = (a_0+11d)(a_0+15d) = a_0^2 + 26d + 165d^2$; $S+55 = 3(2a_0+7d)+55$

$a_0^2 + 26d + 165d^2 - 16 = a_{11}a_{15} - 16 < S+55-16 = S+39 < a_{10}a_{16} = a_0^2 + 26a_0d + 160d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5d^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow d^2 < \frac{16}{5} \Leftrightarrow |d| < \sqrt{3,2}$. $d \in \mathbb{Z}$ по усл. $\Rightarrow d = \pm 1$ или $d=$

~~1) $d=0$ Тогда $\forall n$ $a_n = a_0 \Rightarrow$~~

$d=0$ невозможно, как и $d=-1$, так как по усл. прогрессия возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1$.

$a_0^2 + 26a_0 + 160 > 3(2a_0+7)+39$;

$a_0^2 + 20a_0 + 100 > 0$; $(a_0+10)^2 > 0 \Rightarrow a_0 \neq -10$

$a_0^2 + 26a_0 + 165 < 3(2a_0+7)+55$;

$a_0^2 + 20a_0 + 89 < 0$; $(a_0+10)^2 < 11 \Rightarrow$ $|a_0+10| < \sqrt{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0 = -13; -12; .. ; -7$, т.к. $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $[\sqrt{11}] = 3$.

$a_1 = a_0 + d = a_0 + 1 \Rightarrow a_1$ принимает знач. $-12; -11; -10; -8; -7; -6$.

Ответ: $\{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

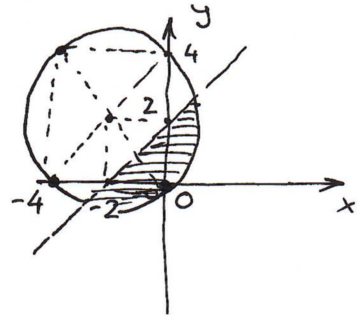
Чистовик

Задача 3.

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 8$ — ур-ие круга радиуса $\sqrt{8}$ с центром в $(a;b)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для каждой точки (a,b), удовлетворяющей системе, круг с центром в этой точке будет лежать в M.

$a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)$

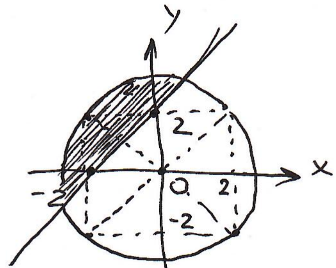


1) $-4a+4b<8$, $b<2+a$ — полупл-ть, лежащая под $b=a+2$.

$a^2+b^2\le -4a+4b \Leftrightarrow a^2+4a+4+b^2-4b+4\le 8 \Leftrightarrow (a+2)^2+(b-2)^2\le 8$ —

— ур-ие круга радиусом $\sqrt{8}$ с центром в $(-2;2)$

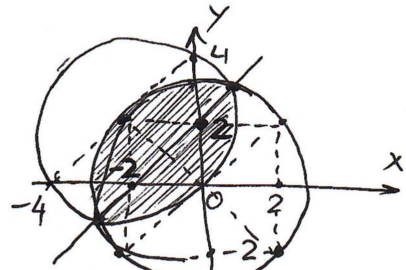
Возможные значения (a,b) для этого случая: пересечение полуплоскости $b<a+2$ и круга $(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$



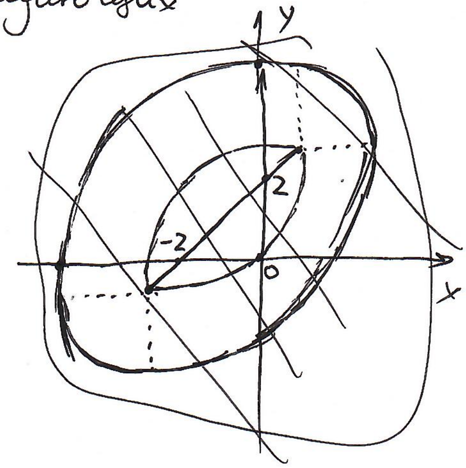
2) $-4a+4b\ge 8$, $b\ge a+2$ — ~~прямая~~ полупл-ть, лежащая выше $b=a+2$

$a^2+b^2\le 8$ — ур-ие круга с центром в $(0;0)$ и радиуса $\sqrt{8}$

Возможные значения (a,b) для этого случая: пересечение полупл-ти $b=a+2$ и круга $a^2+b^2\le 8$.



Поскольку прямая $b=a+2$ симметрична отн-но себе и шары $(a^2+b^2\le 8)$ и $((a+2)^2+(b-2)^2\le 8)$ также симметричны отн-но этой прямой (т.к. их радиусы равны, а центры симметр-ны), всевозможные значения (a,b) будут представлять собой два одинаковых сегмента, совпадающих по хорде. ~~Тогда множество М имеет вид~~:

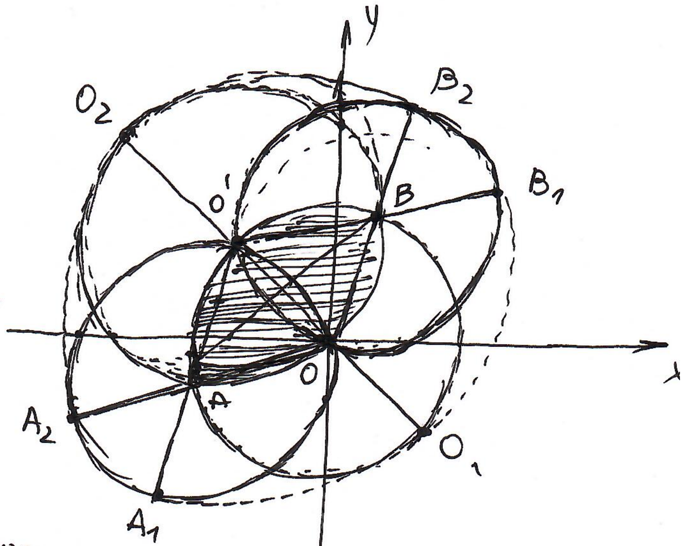


Рассм. точки, являющиеся концами общей хорды:

$$\begin{cases} b=a+2 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+2 \\ a^2+a^2+4a+4=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+2 \\ a^2+2a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+2 \\ a=-1\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Точки имеют координаты $(-1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; $(-1+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$

Чистовик



Задача 3 (продолжение)

Пусть $O(0;0)$, $O'(-2;2)$; $A(-1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; $B(-1+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$. Пусть F – фигура, полученная для множества значений (a,b).

Пусть $\omega(X)$ – шар с радиусом $\sqrt{8}$ и центром в т. X, а $\Omega(x)$ – шар с радиусом $2\sqrt{8}$ и центром в т. X

Рассмотрим дугу AOB. В M содержатся все $\omega(X)$ при $X \in F$; ⇒ ~~M содерж~~ Заметим, что $B \in \omega(0)$ и $B \in \omega(0') \Rightarrow BO = BO' = \sqrt{8}$

$|OO'| = \sqrt{(2-0)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{8} \Rightarrow \triangle BOO'$ – равност. и $O, O' \in \omega(B)$. Аналогично $O, O' \in \omega(A)$. Пусть $O'A_1$ – диам. $\omega(A)$, OO_1 – диам. $\omega(O)$, $O'B_1$ – диам. $\omega(B)$

Тогда сектор $O'B_1O_1A_1$ шара $\Omega(O')$ содержится в M, т.к. все точки дуги $A_1O_1B_1$ лежат на расст. $\sqrt{8}$ от одной из точек дуги AOB (т.к. это расстояние равно разности радиусов окр-тей, на которых точки лежа

Аналогично сектор $OA_2O_2B_2$ шара $\Omega(O)$ лежит в M.

Также сектора AA_1A_2 шара $\omega(A)$ и BB_1B_2 шара $\omega(B)$ лежат в M, потому что A и B лежат в F. Тогда множество $A_1O_1B_1B_2O_2A_2 = M$.

$\triangle OAO' = \triangle OBO'$ – прав. по доказ. $\Rightarrow \angle AOB = \angle AO'B = 120°$; $\angle A_1AA_2 = \angle B_1BB_2 = 60°$;

$S_{AA_1A_2} = R \cdot \alpha = \sqrt{8} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$; $S_{BB_1B_2} = R\alpha = \sqrt{8} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$;

$S_{O'B_1O_1A_1} = R \cdot \alpha = 2\sqrt{8} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$; аналог. $S_{OB_2O_2A_2} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

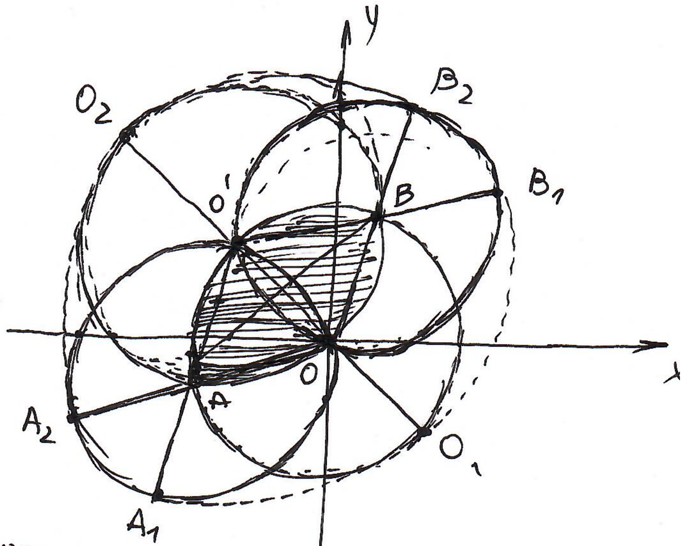
$S_{AOBO'} = 2S_{AOO'} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{8})^2 = 4\sqrt{3}$

$S(M) = S_{AA_1A_2} + S_{BB_1B_2} + S_{OA_2O_2B_2} + S_{O'A_1O_1B_1} - S_{AOBO'} =$

$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{2}\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{20\sqrt{2}\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Чистовик



Задача 3 (продолжение)

Пусть $O(0;0)$, $O'(-2;2)$; $A(-1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; $B(-1+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$. Пусть F — фигура, полученная для множества значений (a,b).

Пусть $\omega(X)$ — шар с радиусом $\sqrt{8}$ и центром в т. X, а $\Omega(X)$ — шар с радиусом $2\sqrt{8}$ и центром в т. X

Рассмотрим дугу AOB. В M содержатся все $\omega(X)$ при $X \in F$; $\Rightarrow$ ~~в М содер~~ Заметим, что $B \in \omega(O)$ и $B \in \omega(O') \Rightarrow BO = BO' = \sqrt{8}$

$|OO'| = \sqrt{(2-0)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{8} \Rightarrow \triangle BOO'$ — равност. и $O, O' \in \omega(B)$. Аналогично $O, O' \in \omega(A)$. Пусть $O'A_1$ — диам. $\omega(A)$, OO_1 — диам. $\omega(O)$, $O'B_1$ — диам. $\omega(B)$

Тогда сектор $O'B_1O_1A_1$ шара $\Omega(O')$ содержится в M, т.к. все точки дуги $A_1O_1B_1$ лежат на расст. $\sqrt{8}$ от одной из точек дуги AOB

(т.к. это расстояние равно разности радиусов окр-тей, на которых точки лежа

Аналогично сектор $OA_2O_2B_2$ шара $\Omega(O)$ лежит в M.

Также сектора AA_1A_2 шара $\omega(A)$ и BB_1B_2 шара $\omega(B)$ лежат в M, потому что A и B лежат в F. Тогда множество $A_1O_1B_1B_2O_2A_2 = M$.

$\triangle OAO' = \triangle OBO'$ — прав. по доказ. $\Rightarrow \angle AOB = \angle AO'B = 120°$; $\angle A_1AA_2 = \angle B_1BB_2 = 60°$;

$S_{AA_1A_2} = R \cdot \alpha = \sqrt{8} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$; $S_{BB_1B_2} = R\alpha = \sqrt{8} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$;

$S_{O'B_1O_1A_1} = R \cdot \alpha = 2\sqrt{8} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$; аналог. $S_{OB_2O_2A_2} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

$S_{AOBO'} = 2S_{AOO'} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{8})^2 = 4\sqrt{3}$

$S(M) = S_{AA_1A_2} + S_{BB_1B_2} + S_{OA_2O_2B_2} + S_{O'A_1O_1B_1} - S_{AOBO'} =$

$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{2}\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{20\sqrt{2}\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104102**

ID профиля: **89625**

Вариант 23

Черновик.

НОД$(a,b,c)=22 \longrightarrow$ ~~все 4~~ есть число 2^1, все ост. $2^{\geq 1}$

есть число 11^1, все ост. $11^{\geq 1}$

НОК$(a,b,c) = 2^{16}\cdot 11^{19}$.

$\downarrow$ есть число 2^{16} $\searrow$ есть число 11^{19}

$(a,b,c)=1$

НОК$(a,b,c) = 2^{15}\cdot 11^{18}$

$2:\quad 2^{16}, 2^1, 2^x \quad 1\ldots 16 - 16$ вар. x

$11:\quad 11^{19}, 11^1, 11^y \quad 1\ldots 19 - 19$ вар. y

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$x+34>0$, $x\neq -33$

$2x+23>0$, $x\neq -11$

$x+4<0$, $x\neq -3$

$2\log_{x+34}(2x+23)$ $\quad \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)$ $\quad 2\log_{2x+23}(-x-4)$

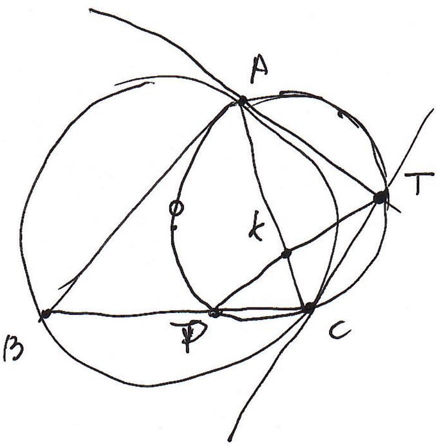
$t^2(t+1)=2$

$t^3+t^2-2=0$

$t^3-t^2+2t^2-2t+2t-2=0$

$(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$t=1 \quad t\in\varnothing$



$t^2 = 6400-160+1$

$40^2=1600$

$= 6500-180-15 = 6301$

$= 8100+180+1-1600-360-20 =$

$91^2 - 4\cdot 495 =$

$46^2 - 529\cdot 4\cdot$

$0 < -x-4 < 7{,}5$

$22{,}5 < x+34 < 30$

$0 < 2x+23 < 15$

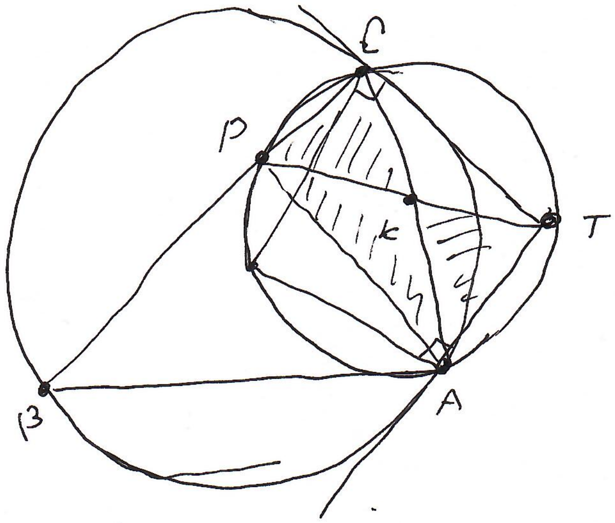
$-11{,}5 < x < -4$

-657
$+495$
196
4
64

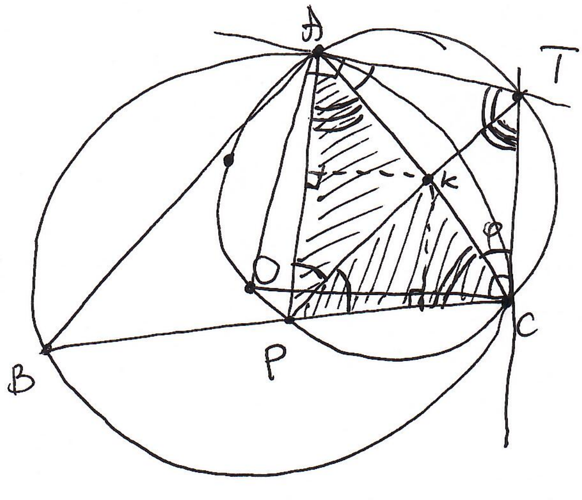
-819
$+495$
328

$\frac{4}{16}$

Черновик



$4 \cdot 81 = 328$
$+ 495$
823
-828
-5



$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PAC}$$

$S_{APK} =$

$$\frac{AC}{\sin\varphi} = 2R$$

$$\frac{KH_1 \cdot AP}{KH_2 \cdot PC} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow KH_1 = KH_2 !$$

Чистовик

Вариант 23

Задача 4.

НОД$(a;b;c)=22$ => во все числа простые 2 и 11 входят по крайней мере в первой степени, причём в какое-то из чисел это простое входит ровно в первой степени, иначе НОД делился бы на бо́льшую степень 2 или 11.

НОК$(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19}$ => во все числа простые 2 и 11 входят не более, чем в 16 и 19 степенях соотв-но, причём в какие-то из чисел эти простые должны входить ровно в 16 или 19 степени соотв-но, иначе НОК был бы меньше. Также числа a, b, c не делятся ни на какие другие простые, кроме 2 и 11.

1) Рассмотрим степени вхождения числа 2 в a, b и c.

2^{16} – должно присутствовать в одном из чисел

2^{1} – ——————— || ———————

2^{n}, $1 \le n \le 16$.

Если $n=1$, то всего 3 способа расстановки $a;b;c$:

$(2^{16}, 2^1, 2^1), (2^1, 2^{16}, 2^1), (2^1, 2^1, 2^{16})$. Аналогично 3 расстановки для $n=16$.

Для других 14-ти вариантов значений n есть $3!=6$ способов расставить числа a, b, c.

Всего $3\cdot 2+14\cdot 3! = 15\cdot 6 = 90$ способов расставить в a, b, c степени 2.

2) Аналогично для 11:

Всего $3\cdot 2+(19-2)\cdot 3! = 18\cdot 6 = 108$ способов расставить в a, b, c степени 11.

Каждое число должно включать и степень 2, и степень 11 =>

=> для каждой расстановки степеней 2 есть 108 расстановок степеней 11 =>

=> всего $90\cdot 108 = 9720$ ~~способов~~ троек чисел

Ответ: 9720

Чистовик

Вариант 23

Задача 5.

Пусть

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=a$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)=b$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=c$.

Тогда $x+34>0$, $x+34\neq 1$; $(x+4)<0$, $x+4\neq 1$; $2x+23>0$, $2x+23\neq 1$

$a = 2\log_{x+34}(2x+23)$; $b=\frac{1}{2}\log_{-(x+4)}(x+34)$; $c=2\log_{(2x+23)}(-x-4)$

Заметим, что $abc = 2\cdot\log_{x+34}(2x+23)\cdot\log_{(-x-4)}(x+34)\cdot\log_{2x+23}(-x-4)=2$

Если все три числа имеют вид t, t и $(t+1)$, то

$t^2(t+1)=2 \Leftrightarrow t^3+t^2-2=0 \Leftrightarrow \cancel{(t-1)(t^2+2t+2)}\ t^3-t^2+2t^2-2t+2t-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+2t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$, т.к. $(t^2+2t+2)=(t+1)^2+1>0$ при всех $t\in\mathbb{R}$

1) $a=b=c-1=1$:

$$\cancel{\begin{cases}2\log_{x+34}(2x+23)=\frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)\\ 2\log_{x+34}(2x+23)=2\log_{2x+23}(-x-4)-1\end{cases}} \quad \begin{cases}2\log_{x+34}(2x+23)=1\\ \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)=1\\ 2\log_{2x+23}(-x-4)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+23=\sqrt{x+34}\\ (-x-4)^2=(x+34)\\ -x-4=2x+23\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+92x+529=x+34\\ x^2+7x-18=0\\ 3x+27=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+91x+495=0\\ (x+9)(x-2)=0\\ x=-9\end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases}4\cdot 81-91\cdot 9+495=0\\ x=-9\end{cases}} \Leftrightarrow x=-9.$$

2) $a=c=b-1=1$:

$$\begin{cases}2\log_{x+34}(2x+23)=1\\ \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)=2\\ 2\log_{2x+23}(-x-4)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+91x+495=0\\ x+34=(-x-4)^4\\ -x-4=\sqrt{2x+23}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+91x+495=0\\ x+34=(2x+23)^2\\ (x+4)^2=2x+23\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+91x+495=0\\ x^2+8x+16=2x+23\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+91x+495=0\\ x^2+6x-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+91x+495=0\\ \left[\begin{array}{l}x=-7\\ x=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\cdot(-7)^2+91(-7)+495=0\\ x=-7\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

3) $a-1=b=c=1$:

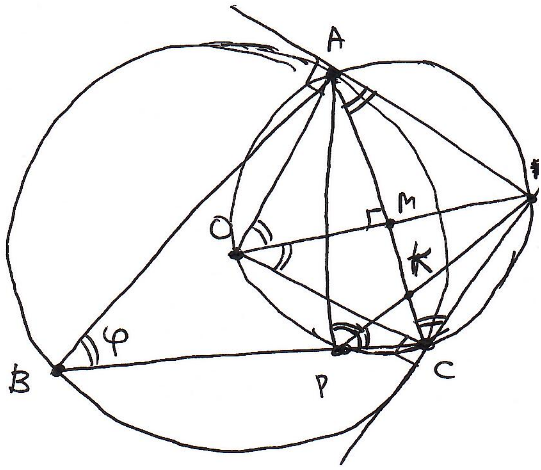
$$\begin{cases}2\log_{x+34}(2x+23)=2\\ \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)=1\\ 2\log_{2x+23}(-x-4)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+34=2x+23\\ x+34=(-x-4)^2\\ -x-4=\sqrt{2x+23}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=11\\ x+34=x^2+8x+16\\ x^2+8x+16=2x+23\end{cases}; \quad x=11>-4 \Rightarrow x\in\varnothing$$

Ответ: -9.

Чистовик

Вариант 23

Задача 6.



$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$ — по св-ву бисс. PK угла APC:

$\angle APK = \frac{1}{2} \cup AT = \frac{1}{2} \cup TC = \angle TPC$; $\cup AT = \cup TC$, т.к. $AT = TC$.

$S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \sin\varphi$

$S_{CPK} = \frac{1}{2} CP \cdot PK \cdot \sin\varphi$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\varphi = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$

$\triangle AKT \sim \triangle PKC$ по I пр. $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{KT}{PK} \Rightarrow S_{AKT} = S_{APK} \cdot \frac{AK}{KC} = \frac{15^2}{13}$; $S_{TKC} = S_{PKC} \cdot \frac{AK}{KC} = 15$

$S_{ATC} = \frac{15^2}{13} + 15 = \frac{15 \cdot 28}{13} = \frac{420}{13} = 2 \cdot S_{ATM} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} AC\right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} AC}{\cos\varphi}\right) \sin\varphi\right) =$

$= \frac{1}{4} AC^2 \operatorname{tg}\varphi = \frac{420}{13}$.