Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104038**

ID профиля: **345127**

Вариант 23

№1. Чистовик Лист 1 из 5

Обозначим разность прогрессии за d. Тогда $S = a_1 + (a_1+d) + \ldots + \underset{\cancel{a_1+6d}}{(a_1+5d)} =$

$= 6a_1 + 15d$. $a_{10}a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2$

$a_{11}a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2 + 24d a_1 + 140d^2 \Rightarrow a_{11}a_{15} > a_{10}a_{16}$ на $5d^2$.

$\cancel{\min(a_{10}a_{16})}$ $a_{10}a_{16} \geq S+40$, $a_{10}a_{16} < a_{11}a_{15} \Rightarrow a_{10}a_{16} \in [S+40; S+54]$.

$a_{11}a_{15}$ так же $\in [S+40; S+54] \Rightarrow a_{11}a_{15} - a_{10}a_{16} \cancel{\in [14} = 5d^2 \in [14; 0]$.

$d \neq 0$, $5d^2 \overset{\in \mathbb{Z}}{\cancel{\in \mathbb{Z}}}$ и $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5d^2 = \left[\begin{array}{l} 5 \Rightarrow d = 1 \ (d>0 \text{ по условию}) \\ 10 \Rightarrow d = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

То есть $d=1$. Тогда $S = 6a_1 + 15$, $a_{10}a_{16} = a_1^2 + 24a_1 + 135$,

$a_{11}a_{15} = a_1^2 + 24a_1 + 140$.

$$\begin{cases} 6a_1 + 15 + 39 < a_1^2 + 24a_1 + 135 \\ 6a_1 + 15 + 55 > a_1^2 + 24a_1 + 140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases} \quad D = 18^2 - 70\cdot 4 = 324 - 280 = 44$$

~~Корни~~ $\cancel{a_1 = \frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2}}$

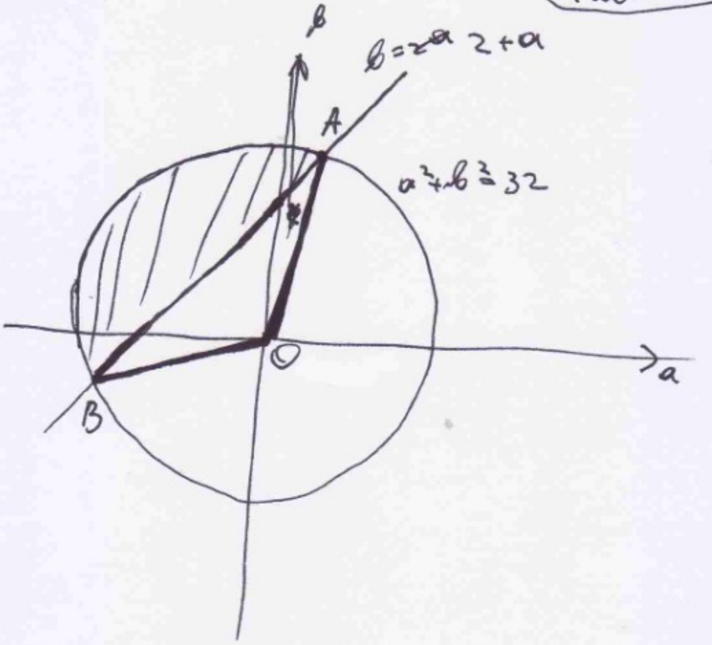
$a_1^2 + 18a_1 + 70 = 0$

$a_1 = \frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -9 \pm \sqrt{11}$

$$\begin{cases} (a_1 + 9)^2 > 0 \\ (a_1 - (-9+\sqrt{11}))(a_1 - (-9-\sqrt{11})) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -9 \\ a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \end{cases}$$

21104038 (U345127 M1304318)



Найдём точки пересечения.

$\cancel{a^2+4a^2=32.}$

$\cancel{a=\pm\sqrt{\frac{32}{5}}=4\,0{,}8\sqrt{10}}$

$$a^2+4+4a+a^2=32$$

$$a^2+2a+2=16$$

$$a^2+2a-14=0$$

$$D=4+40+16=60$$

$$a=\frac{-2\pm2\sqrt{15}}{2}=-1\pm\sqrt{15}$$

$$b=1\pm\sqrt{15}$$

Обозначим точки как на рисунке.

$$\overrightarrow{OA}=\left(\overrightarrow{-1+\sqrt{15};\,1+\sqrt{15};\,0}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{-1-\sqrt{15};\,1-\sqrt{15};\,0}\right)$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1+\sqrt{15} & 1+\sqrt{15} & 0\\ -1-\sqrt{15} & 1-\sqrt{15} & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(-1+\sqrt{15})(1-\sqrt{15})+(1+\sqrt{15})^2\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(1-\sqrt{15})^2+(1+\sqrt{15})^2\right|=16$$

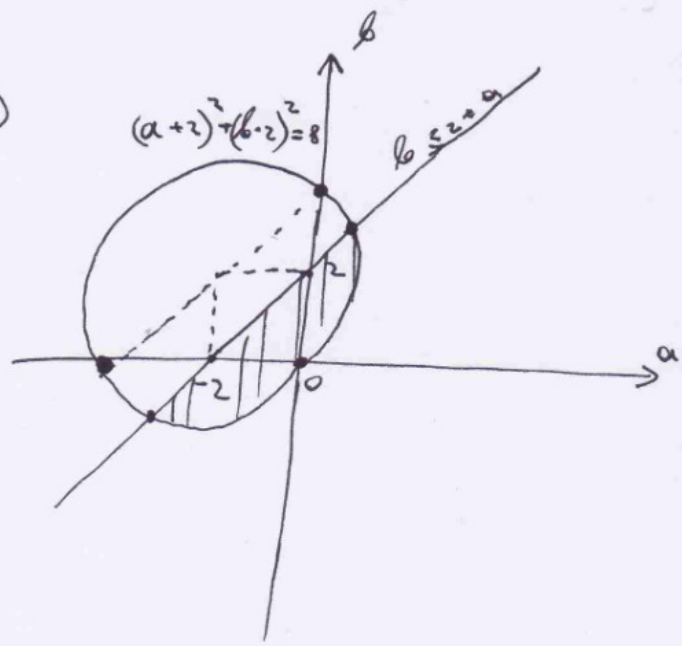
$$S_{\overset{\frown}{AB}}=32\pi-\frac{1}{4}32\pi-2\cdot32\pi\cdot\frac{\arccos\left(\frac{1+\sqrt{15}}{\sqrt{32}}\right)}{2\pi}$$

$\cancel{S=2S_{\overset{\frown}{AB}}}$ $$S_{\text{иском.}}=2\left(S_{\overset{\frown}{AB}}-S_{AOB}\right)=64\pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{\arccos\left(\frac{1+\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}\right)}{\pi}\right)-32$$

Ответ: $S_{\text{иск.}}=64\pi\left(\frac{3}{4}-\frac{\arccos\left(\frac{1+\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}\right)}{\pi}\right)-32.$

№3

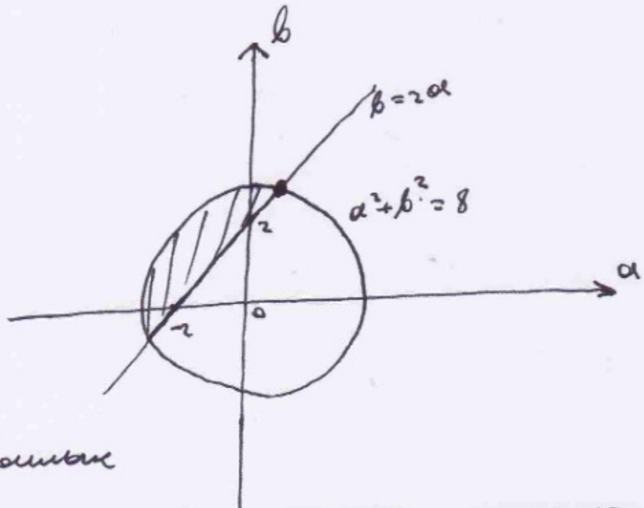
Решим $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8)$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a+4b \\ -4a+4b \le 8 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ -4a+4b > 8 \end{cases} \end{array}\right.$$

I. $\begin{cases} a^2+4a+4+b^2-4b+4-8 \le 0 \\ b \le \cancel{2a}\ 2+a \end{cases}$

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \\ b \le 2+a \end{cases}$$



II. $\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ b > 2+a \end{cases}$

Найдем точки пересечения 2-х нарисованных окружностей. Они лежат на радикальной оси, которая задается, как

$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-2)^2$, т.к. радиусы окружностей равны, а следовательно рад. ось — это ГМТ равноудаленных точек от центров окружностей.

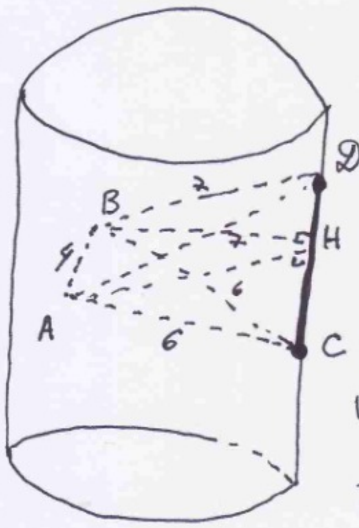
$4a-4b+8=0$

$b=2+a$ эта прямая, которая отсекает ~~сектор~~. решение.

Искомая площадь => удвоенной площади ~~сектора~~:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le (4\sqrt{2})^2=32. \\ b > 2+a \end{cases}$$

№2



AH и BH - высоты $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ соответственно.

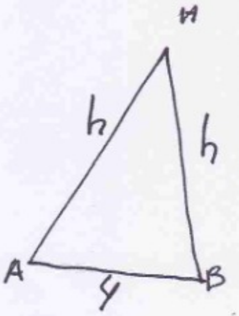
Они приходят в одну точку H на DC, т.к. $\triangle ADC = \triangle BDC$ по трем сторонам.

$(ABH) \perp DC$, т.к. AH и $BH \perp DC$, и $AH, BH \in (ABH)$.

$DC \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow$ описанная окружность $\triangle ABH$ равна окружности, лежащей в основании цилиндра. Обозначим $AH = BH = h$, радиус описанной окружности $\triangle HAB$ Ω обозначим за R.

$2R \sin\angle AHB = 4 \leftarrow$ Т. синусов для $\triangle AHB$.

$R = \dfrac{2}{\sin\angle AHB} \Rightarrow \min R = 2 \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow h = 4\sqrt{2}. \Rightarrow$



$\Rightarrow DH = \sqrt{49 - 32} = \sqrt{17}$, $HC = \sqrt{36 - 32} = 2$.

Если $H \in DC$, то $DC = DH + HC = \sqrt{17} + 2$.

Если $C \in DH$, то $DC = \sqrt{17} - 2$. $AD > AC \Rightarrow D$ не может $\in HC$.

Ответ: $DC = \left[\begin{array}{l} \sqrt{17}+2 \\ \sqrt{17}-2 \end{array}\right.$

$-6 < -9 + \sqrt{11} < -5$ Чистовик Лист 2 из 5

$-13 < -9 - \sqrt{11} < -12 \Rightarrow a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$, ~~т.к. $a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \setminus \{8\}$~~

Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104038**

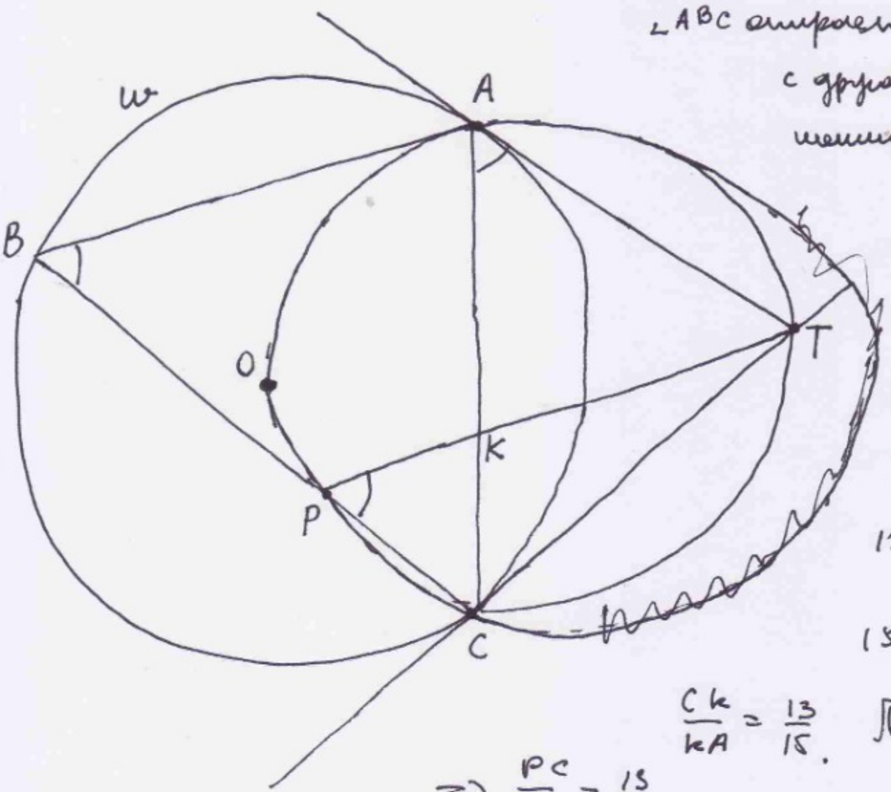
ID профиля: **345127**

Вариант 23

№6

а) $\angle OAT$ и $\angle OCT$ - прямые $\Rightarrow$ в сумме дают $180^\circ \Rightarrow OCTA$ - вписанный $\Leftrightarrow T \in (OAC)$.

$\angle CAT = \angle ABC$, т.к. AT касательная, а $\angle ABC$ опирается на хорду AC и лежит с другой стороны от AC по отношению к углу CAT.



$\angle CAT$ и $\angle CPT$ опираются на одну хорду $\Rightarrow$ равны. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle TPC \Rightarrow AB \parallel PT$.

Пусть $CK = 13x$, а $AK = tx$.

$\rho(P, AC) = h$.

$13 = S_{CPK} = \dfrac{13hx}{2}$

$15 = S_{APK} = \dfrac{thx}{2} \Rightarrow t = 15$, а

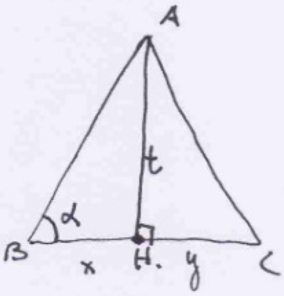
$\dfrac{CK}{KA} = \dfrac{13}{15}$. По т. Фалеса $\dfrac{CK}{KA} = \dfrac{PC}{PB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{13}{15}$.

$$S_{ABC} = \frac{BC}{PC} S_{APC} = \frac{PB+PC}{PC}(S_{APK} + S_{PKC}) = \frac{28}{13} \cdot 28 = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}.$$

$$\begin{array}{r} \times\, 28 \\ 28 \\ \hline 224 \\ 560 \\ \hline 784 \end{array}$$

Ответ: $S_{ABC} = \dfrac{784}{13}$



б) Обозначим $\angle ABC$ за α, а площадь ABC за S. AH - высота $\triangle ABC$.

$$\begin{cases} AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = 2S \quad \text{- скалярное произведение} \\ AH^2 + BH^2 = AB^2 \\ AH^2 + HC^2 = AC^2 \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AH}{BH} \\ \dfrac{AH \cdot BC}{2} = S \\ BC = \ldots \end{cases}$$

$2\log_w v = 2$

$\log_{2x+23}(-x-4) = 1$

$-x-4 = 2x+23$

$3x = -27$

$x = -9$

При $x=-9$:

$\frac{1}{2}\log_v u = \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34) = \frac{1}{2}\log_5 25 = 1$

$2\log_u w = 2\log_{x+34}(2x+23) = 2\cdot\frac{1}{2}\log_{25}5 = 1 \Rightarrow x=-9$ подходит.

Ответ: $x=-9$.

$x=-19$.

Чистовик

Лист 4 из 7

~~$\frac{1}{2}\log$~~ ОДЗ:

$$\begin{cases} x+34>0 \\ -x-4>0 \\ 2x+23>0 \\ x+34\neq 1 \\ -x-4\neq 1 \\ 2x+23\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-34 \\ x<-4 \\ x>-11,5 \\ x\neq -33 \\ x\neq -5 \\ x\neq -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-11,5;-4) \\ x\notin\{-33,-5,-11\} \end{cases}$$

По ОДЗ $x=-19$ не подходит.

II. $\frac{1}{2}\log_v u = 2$

$\log_v u = 4$

$\log_{-x-4} x+34 = 4$

$x+34 = (-x-4)^4$

$2\log_w v = 1$

$2\log_{2x+23} -x-4 = 1$

$-x-4 = \sqrt{2x+23}$

$x^2+8x+16 = 2x+23$

$x^2+6x-7=0$

$(x-1)(x+7)=0$

~~$x=1$ и $x=-7$ не по~~

$x=1$ не подходит по ОДЗ.

При $x=-7$:

$2\log_u w = 2\log_{x+34} -x-4 = 2\log_{34-7} 3 = 2\log_{27} 3 = \frac{2}{3} \neq 1. \Rightarrow$ ~~$x=-7$ не~~

21104038 (U345127 M1304319)

№5.

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \\ \log_{(x+4)^2}(x+34) \\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ \underline{a^3-a^2} & a^2+2a+2 \\ 2a^2-2 & \\ \underline{2a^2-2a} & \\ 2a-2 & \\ \underline{2a-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Обозначим $u = x+34$, $v = -x-4$, $w = 2x+23$.

ОДЗ: u, v и $w > 0$,

u, v и $w \neq 1$.

$$\begin{cases} 2\log_u w \\ \frac{1}{2}\log_v u \\ 2\log_w v \end{cases}$$

Перемножим эти три числа.

$2\log_u w \log_v u \log_w v = 2\log_v w \log_w v = 2.$

Пусть два равных числа равны a. Тогда $a^2(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$a^2+2a+2=0$

$D = 4-8=-4 \Rightarrow a^2+2a+2>0$ при $\forall a. \Rightarrow$

$\Rightarrow a=1$, $a+1=2$.

I. $2\log_u w=2.$

$\log_u w=1$

21104038 (U345127 M1304319)

$u=w$

$x+34 = -x-4$

2-ки распределяем как угодно (6 способов), а для 1-ок остаются только 4 варианта.

Следовательно всего чисел троек $24 + 1188 + 9720 = 1212 + 9720 = 10932$.

Ответ: 10.932

Чистовик   лист 1 из 7

№4 $НОД(a,b,c)=22$

$НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19}$.

~~Заметим, что a, b~~ Заметим, что a, b и c делятся на степени 11 и степени 2, причем одно число делится на 2 и $\not\vdots\, 4$, а одно $\vdots\, 2^{16}$ и $\not\vdots\, 2^{17}$. Пусть третье $\vdots\, 2^n$ и $\not\vdots\, 2^{n+1}$, где $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

I_a $n \notin \{0, 1, 16\}$. ~~Таких~~ n 14, а перестановок чисел $(2, 2^n, 2^{16})$ ровно $14\cdot 6 = 60+24 = 84$.

II_a $n = 1$ или 16 тогда перестановок чисел $(2, 2^n, 2^{16})$ 6.

III_a $n=0$ таких перестановок чисел ~~α~~ $(2, 2^n, 2^{16})$ 6.

~~Пусть~~ ~~Одно~~ Одно из чисел делится на 11, и $\not\vdots\, 11^2$, одно $\vdots\, 11^{19}$ и $\not\vdots\, 11^{20}$, а еще одно $\vdots\, 11^m$ и $\not\vdots\, 11^{m+1}$, где $m\in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

$\text{I}_б$. $m \notin \{0, 1, 19\}$ Таких m 17, а перестановок чисел $11, 11^{19}$ и 11^m

$6\cdot 17 = 60+42 = 102$

$\text{II}_б$. $m = 1$ или 19 Для таких m перестановок чисел $11, 11^{19}$ и 11^m 6.

$\text{III}_б$. $m=0$ Перестановок чисел $11, 11^{19}, 11^m$ 3.

I. m и $n \neq 0$. Таких ~~m~~ 3-ек (a,b,c) $(84+6)\cdot(\cancel{104}\,102+6) = 90\cdot 108 = 9720$.

II. Одно из чисел m и $n=0$, а второе нет. Таких 3-ек (a,b,c)

$6\cdot(102+6) + 6\cdot(84+6) = 6(108+90) = 6\cdot 198 = 1200-12 = 1188$.

III. $m=0$ и $n=0$. ~~Таких~~. Таких чисел $6\cdot \cancel{4}\,4 = 24$, т.к. числа a, b и c делятся на 2 или на 11, а $\Rightarrow$ если одно не делится на 11, то оно $\vdots$ на 2 и наоборот

21104038 (U345127 M1304319)

Обозначим BH за x, HC за y, AH за t, BC за p.

$$\begin{cases} (AH^2 + BH^2)\,BC^2 \sin^2\alpha = 4S^2 \\ AH^2 + HC^2 = AC^2 \\ AH = BH\,\mathrm{tg}\,\alpha \\ AH \cdot BC = 2S \\ BC = BH + HC \end{cases}$$

$\cancel{p\,x\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2S}$

$\cancel{(x+y)\,x\,\mathrm{tg}}$

$$\begin{cases} (t^2 + x^2)(x+y)^2 \sin\alpha = 4S^2 \\ t^2 + y^2 = AC^2 \\ t = x\,\mathrm{tg}\,\alpha \\ t(x+y) = 2S \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2\,\mathrm{tg}^2\alpha + x^2)(x+y)^2 \sin^2\alpha = 4S^2 \\ x^2\,\mathrm{tg}^2\alpha + y^2 = AC^2 \\ x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(x+y) = 2S \end{cases}$$

$AC^2 = x^2\,\mathrm{tg}^2\alpha + y^2$.

$x^2(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)(x+y)^2 \sin^2\alpha = 4S^2$

$x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(x+y) = 2S$

$x^2\,\mathrm{tg}^2\alpha\,(x+y)^2 = x^2(x+y)^2(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)\sin^2\alpha$

$\cancel{\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha}$

Данная система решается.

При $y = 0$

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = S$$

$AC^2 = 2S\,\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow AC^2 = \sqrt{2S\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \sqrt{\frac{8}{7} \cdot \frac{28^2}{13}} = 28\sqrt{\frac{8}{91}}$

21104038 (U345127 M1304319)

Ответ: $AC = 28\sqrt{\frac{8}{91}}$, $S_{ABC} = \frac{784}{13}$.