Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104028**

ID профиля: **847118**

Вариант 23

Чистовик

№1 Так как первые 6 членов арифметической прогрессии целые числа, а сама прогрессия возрастающая $\Rightarrow$ d (разность прогрессии) – натуральное число

По условию:

1) $a_{10} a_{16} > S_6 + 39$

2) $a_{11} a_{15} < S_6 + 55$

Выразим оба неравенства через формулы ~~…~~ члена арифметической прогрессии ($a_n = a_1 + (n-1)d$) и формулу суммы прогрессии ($S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$):

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 + 39$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 + 55$

$a_1^2 + 24da_1 + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

$a_1^2 + 24d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55$

Пусть $t = a_1^2 + 24da_1 - 6a_1 - 15d \Rightarrow$

$t > 39 - 135d^2$

$t < 55 - 140d^2$

$39 - 135d^2 < 55 - 140d^2 \qquad 5d^2 < 16 \qquad d^2 < 3{,}2 \qquad d \in (-\sqrt{3{,}2}; \sqrt{3{,}2})$,

но так как $d \in N \Rightarrow d = 1$ (единственное натуральное число из промежутка). Подставим d в неравенства

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$

$(a_1 + 9)^2 > 0$

$a_1 \in R, a_1 \neq -9$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 = 0$

$D = 324 - 280 = (\sqrt{11})^2$

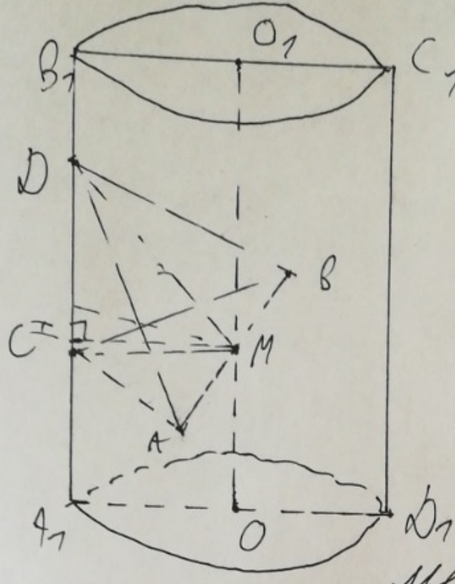
$a_1 = -9 \pm \sqrt{11} \Rightarrow a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$

т.к. -12 – наименьшее целое больше $-9-\sqrt{11}$, -6 – наибольшее целое меньше $-9+\sqrt{11}$, $a_1 \in Z \Rightarrow$

$a_1 \in [-12; -6]$

Ответ: -12; -11; -10; -8; -7; -6

№2 Чистовик



Дано: $A_1B_1C_1D_1$ — цилиндр, OO_1 — ось цилиндра, ABCD — тетраэдр, $AB=4$, $AC=CB=6$, $AD=DB=7$, ABCD — вписан в цилиндр, $r_ц = min$

Найти: CD

Решение: 1) Чтобы радиус цилиндра был минимальным, надо чтобы диаметр тоже был минимальным, а значит равнялся наименьшей стороне $\triangle ABC$ — $AB=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_ц = 2$ ~~$4\ AB = d_ц \Rightarrow AB \parallel$ основаниям цилиндра~~

2) Пусть $M = AB \cap OO_1$, так как AB — диаметр цилиндра $\Rightarrow$ M — середина $AB \Rightarrow AM = r_ц = 2$ 3) $AC=CB \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ CM — медиана и высота $\Rightarrow \triangle AMC$ — прямоуг. 4) Р! $\triangle AMC$: по теореме Пифагора:

$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$ 5) $AD = DB \Rightarrow \triangle ADB$ — равнобедр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ DM — медиана и высота $\Rightarrow \triangle ADM$ — прямоуг.

6) Р! $\triangle ADM$ — прямоуг.; по теореме Пифагора:

$DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 7) Построим $MH \perp CD \Rightarrow \triangle MDH$ и $\triangle MHC$ — прямоуг.

8) $CD \parallel OO_1$, $OO_1 \perp$ основаниям $\Rightarrow CD \perp$ основания, но $MH \perp CD \Rightarrow$

$MH \parallel$ основаниям, но так как $M \in OO_1$, а $H \in CD \Rightarrow H \in$ бок. гран. $\Rightarrow$

$\Rightarrow MH = r = 2$ 9) Р! $\triangle MDH$: по теореме Пифагора: $DH = \sqrt{MD^2 - MH^2} =$

$= \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$ 10) Р! $\triangle CHM$: по теореме Пифагора: $CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} =$

$= \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ 11) $CD = DH + HC = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

2

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

a_1 a_2 d, $a \in Z$ Черновик

a_{14}

a_{10} $a_{16} > S + 39$

a_{11} $a_{15} < S + 55$

$15 \times 9 = 135$

43×2

$(a_1+9d)(a_1+15d) > \frac{2a_1+5d}{2} \cdot 6 + 39$

$a_1^2 + 15da_1 + 9da_1 + 135d^2 > (2a_1+5d)3 + 39$

~~$a_1^2 + 24da_1 + + 96 - 6a_1 - 15d > 0$~~

$135 - 39 = 96$

$135 - 49 = 86$

$d > 0$

~~$(a_1+10d)(a_1+14d) < \frac{2a_1+5d}{2} \cdot 6 + 55$~~

$(a_1+9)(a_1+15) > 6a_1 + 15 + 39$

~~$a_1^2 - 6a_1 + 24da_1 + 120d > 39$~~

~~$a_1^2 - 6a_1 + 24da_1 + 120d - 39 > 0$~~

~~$D = 225$~~

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 49$

$a_1^2 - 18a_1 + 86 > 0$

$(a_1+10d)(a_1+14d) < \frac{2a_1+5d}{2} \cdot 6 + 55$

$a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55$

~~$t = a_1^2 + 24a_1d - 6a_1 - 15d$~~

~~$d(a_1 - 6) + 3d(8a_1$~~ $- 5)$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d - 6a_1 - 15d < 140d^2 + 55 \\ a_1^2 + 24a_1d - 6a_1 - 15d > 135d^2 + 39 \end{cases}$$

$t = a_1^2 + 6a_1 + 4d - 11$

~~$t < 140d^2 + 55$~~

~~$t > 135d^2 + 39$~~

$135d^2 + 39 < 140d^2 + 55$

$5d^2 < 14$

$t - 15d < 140d^2 + 55$

$a_1^2 > 6a_1 + 4d - 11$

~~$t < 140d^2 + 15d + 55$~~ $: 15$

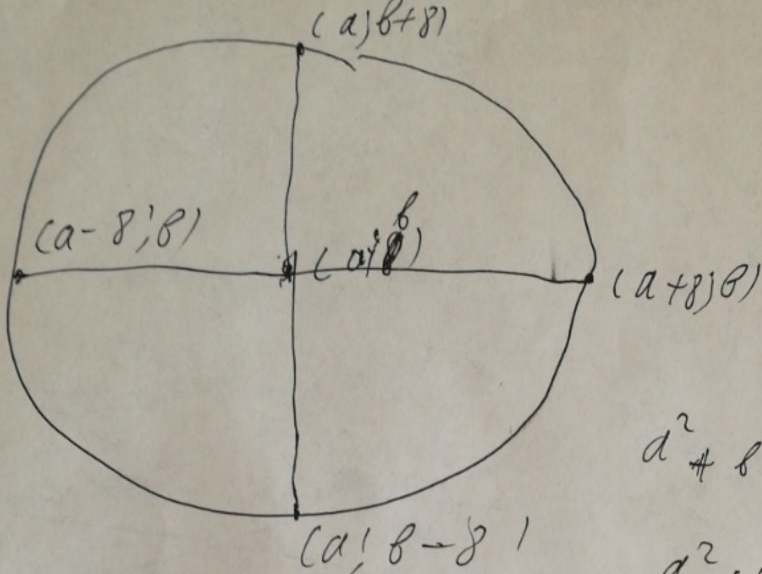
$t > 0$

$t > 135d^2 + 15d + 55$

$d = 7$

$d^2 < 2{,}8$

$d < \sqrt{2{,}8}$



$a^2 + b^2 - 16b + 64 \le -4a + 4b - 32$

$a^2 + 4a + b^2 - 20b + 96 \le 0$

$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 20b + 100 \le 8$

$(a+2)^2 + (b-10)^2 \le 8$

$+7\infty$

$a^2 + 4a + b^2 - 4b \le 8$

$\left[\begin{array}{l}(a+2)^2 + (b-2)^2 \le 16 \\ a^2 + b^2 \le 8\end{array}\right.$

$\cancel{a^2 + b^2 \quad 8}$

$a^2 + b^2 - 16b + 64 \le 8$

$a^2 + (b-8)^2 \le 8$

$\cancel{\left[(a+2)^2 + (b-10)^2 \le 8\right.}$

Черновик

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$D = 324 - 280 = 44 = (2\sqrt{11})^2$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{11}$

$a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 \geq 0$

$(a_1+9)^2 \geq 0$

$\varnothing$

$-9-\sqrt{11} < -12$

$3 < \sqrt{11}$

$\sqrt{11} \in (3;4)$

-12 $\quad$ -6

$-9+\sqrt{11} > -6$

$\sqrt{11} > 3$

$[-12;-6]$

$-12; -11; -10; -9; -8; -7; -6$

$400 - 80 + 4 = 324 = 18^2$

$18 \cdot 18 = 324$

$135 - 15 = 120$

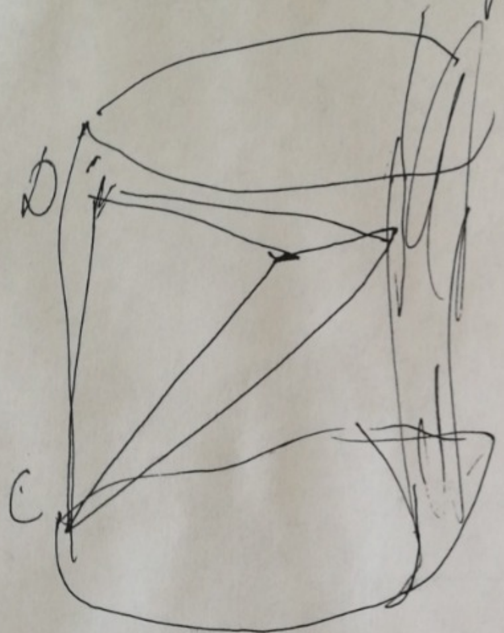
$120 - 39 = 81$

Черновик

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 4R = \frac{abc}{S}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$R = \frac{abc}{\sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}}$$



$$\frac{6^2\cdot 4}{\sqrt{8\cdot 4\cdot 2\cdot 2}} = \frac{6^2\cdot 4}{4\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{18}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{4(36-x^2)}{2\sqrt{32-x^2}} = \frac{2(36-x^2)}{\sqrt{32-x^2}}$$

4; 6; 6

4; $\sqrt{36-x^2}$; $\sqrt{36-x^2}$

$2+\sqrt{36-x^2}$

8

$(\sqrt{36-x^2})^2 + (\sqrt{36-x^2}-2)^2\,4$

$(36-x^2-4)4 = (32-x^2)4$

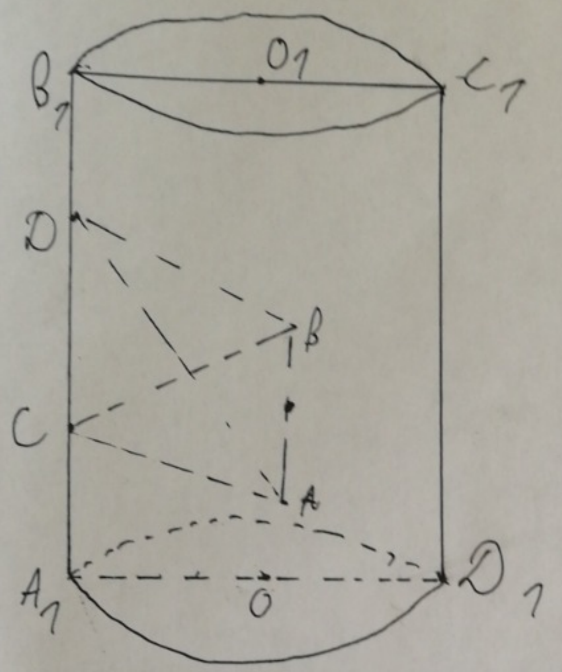
$$\frac{2(36-x^2)}{\sqrt{32-x^2}} < \frac{18}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{72-2x^2}{\sqrt{64-2x^2}} < \frac{18\sqrt{32-x^2}}{\sqrt{64-2x^2}}$$

$$\frac{36-x^2}{\sqrt{32-x^2}} < 9\sqrt{2}$$

№2

Черновик



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104028**

ID профиля: **847118**

Вариант 23

Чистовик

№4

Так как НОК состоит только из 2 и 11, то не трудно понять, что числа a, b, c будут иметь вид: $a=2^{x_1}\cdot 11^{y_1}$, $b=2^{x_2}\cdot 11^{y_2}$, $c=2^{x_3}\cdot 11^{y_3}$. Так степень 2 в НОК равна 16, а в НОД 1, а у 11 – 19 и 1 => $\Rightarrow \max(x_1;x_2;x_3)=16$, $\min(x_1;x_2;x_3)=1$, $\max(y_1;y_2;y_3)=19$, $\min(y_1;y_2;y_3)$. Из этого можно сделать вывод, что один из x_i может равняться от 1 до 16, а y_i от 1 до 19.

Подсчитаем количество комбинаций:

1) 2: Так как при $x_i=1$ и $x_i=16$ у нас будут возникать повторы, то их будем считать отдельно $x_i\in[2;15]$ – 14 вариантов

$2^1;2^{16};2^{x_i}$ – количество перестановок $=3!=6 \Rightarrow$

=> количество комбинаций $6\cdot 14$

При $x_i=1$ 3 случая $(2^1;2^1;2^{16},\ 2^1;2^{16};2^1,\ 2^{16};2^1;2^1)$. Аналогично для $x_i=16$. Итого количество комбинаций двоек $=6\cdot 14+6=90$

2) 11: Считаем аналогично как для двоек.

$y_i\in[2;18]$ – количество комбинаций $17\cdot 6$

$y_i=1$ и $y_i=19$ – количество комбинаций 6

Итого $=6\cdot 17+6=108$

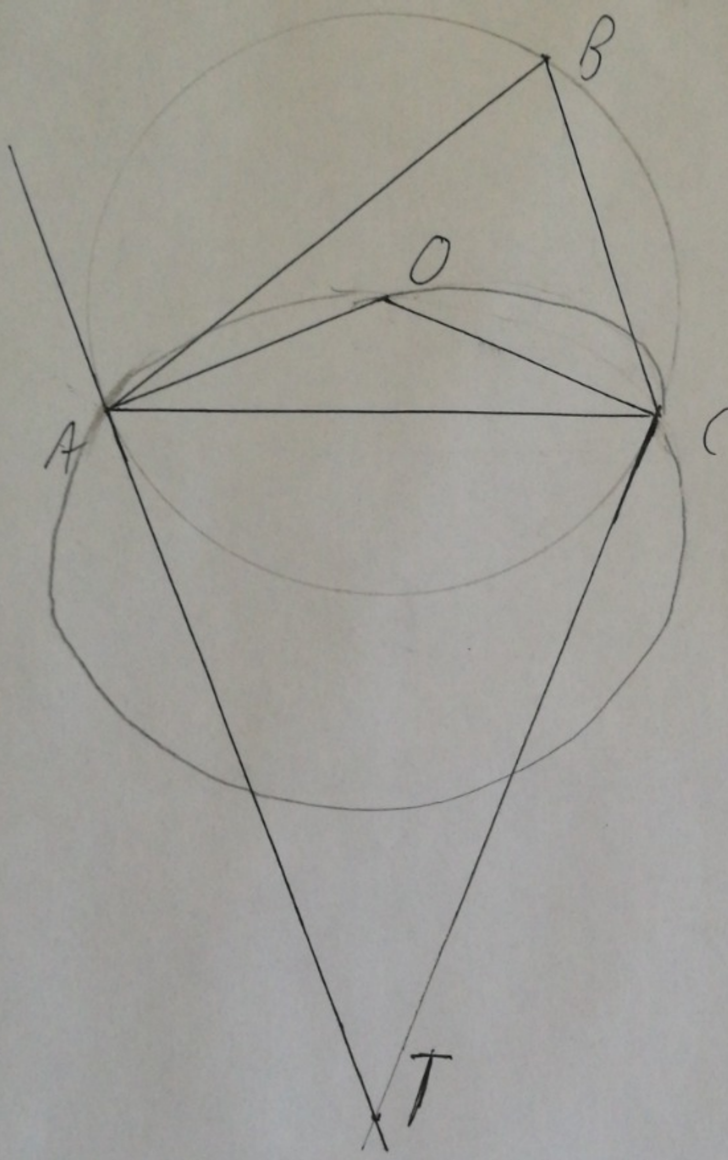
~~Итого~~ Так как позиции 2 и 11 независимы (то есть мы можем ставить в числа a, b, c 2 и 11 с их степенями не завися друг друга) => количество троек $(a;b;c)$ равно произведению комбинаций 2 и 11 $=108\cdot 90=9720$

Ответ: 9720

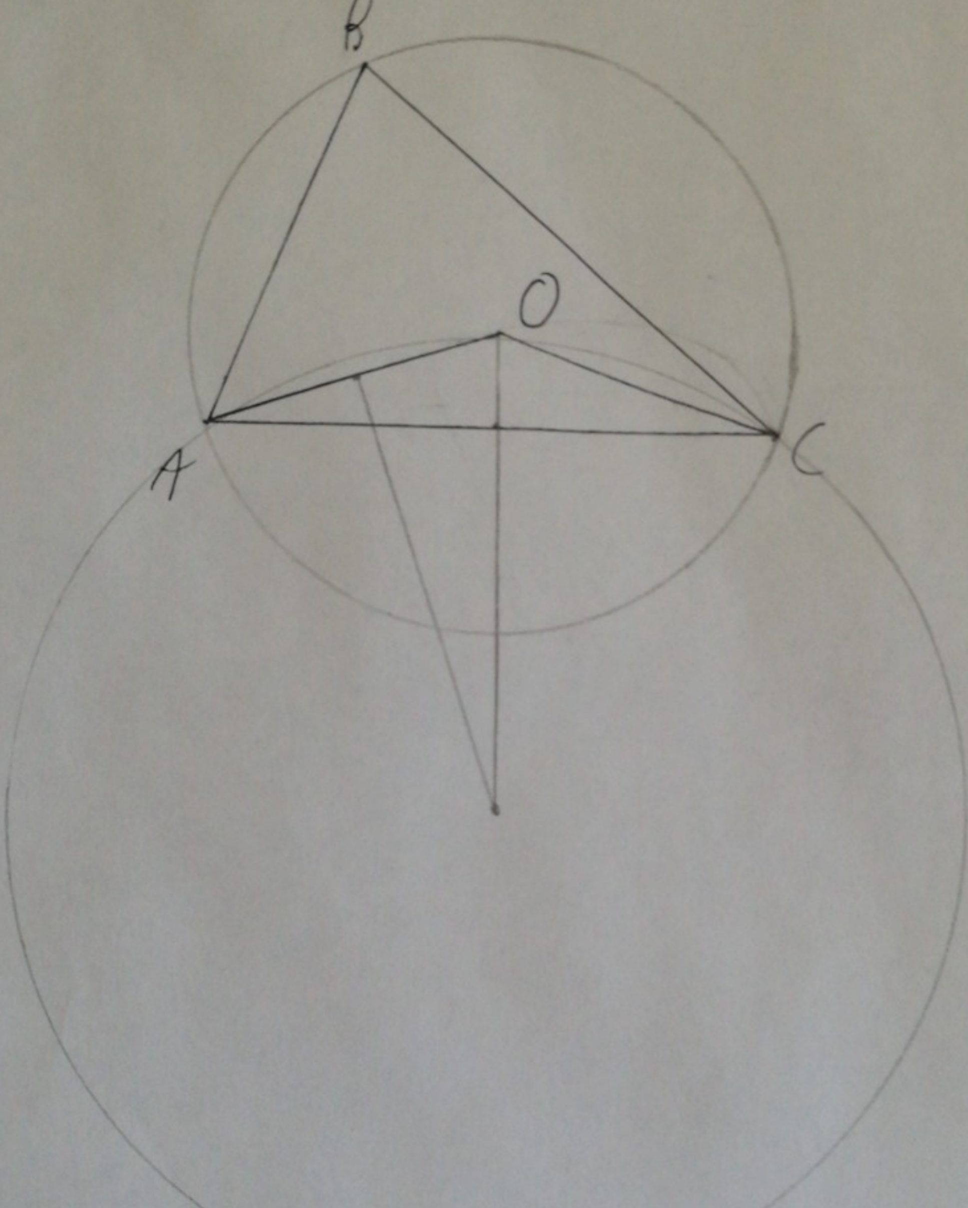
1

21104028 (U847118 M1296170)

Черновик

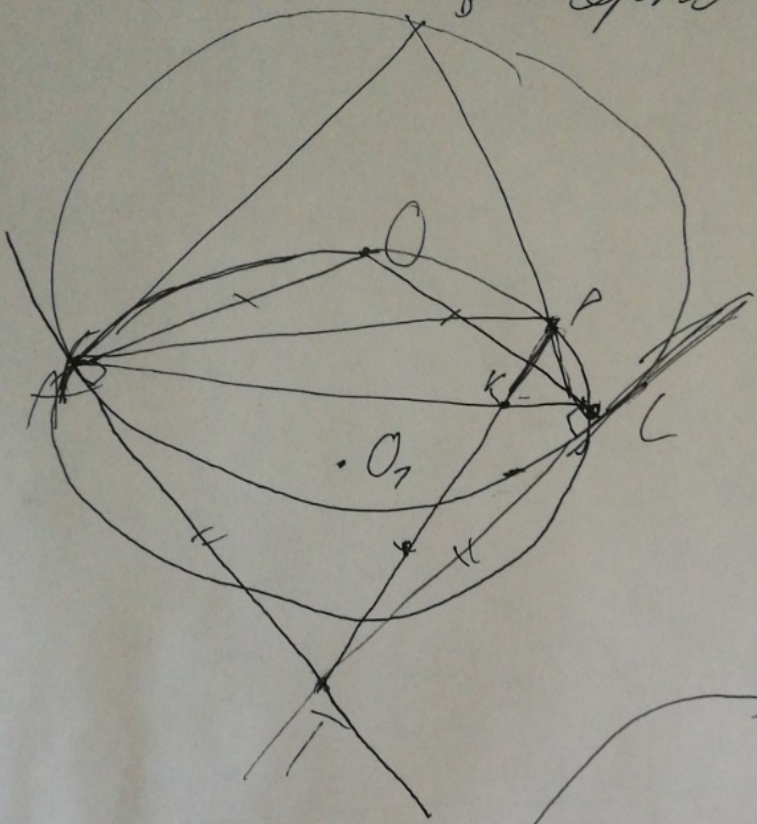


Черновик



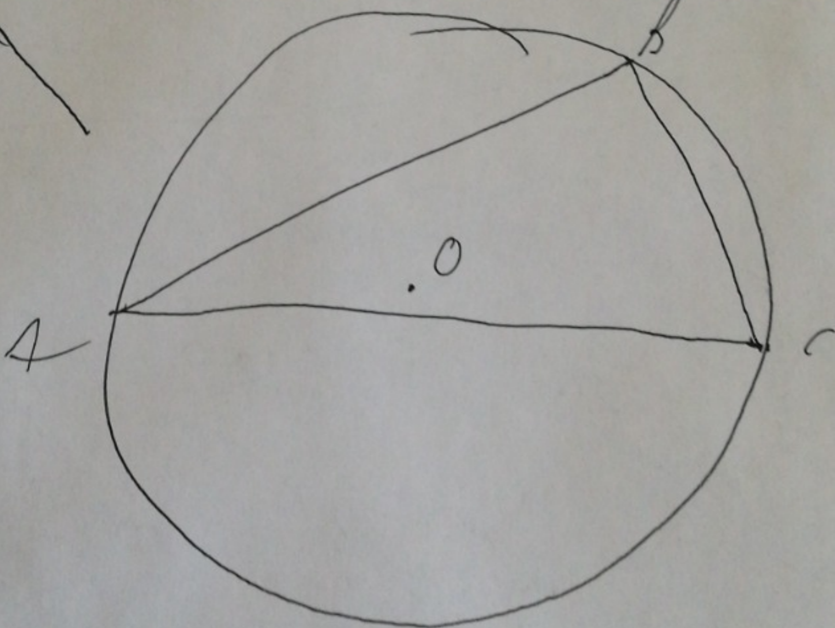
21104028 (U847118 M1296170)

Черновик



$S_{\Delta APK} = 75$

$S_{\Delta CPK} = 73$



№5 Черновик ОДЗ: $x > -34$

$-x-4 > 0$

$x < -4$

$x > -11{,}5$

$x \in (-11{,}5; -4)$

$x \neq -33$

$x \neq -3$

$x \neq -11$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$$

$$\log_{(x+34)}(2x+23)^2 = \frac{1}{\log_{(x+34)}(x+4)^2}$$

$$\log_{(x+34)}(x+23)^2 \log_{(x+34)}(x+4)^2 - 1 = 0$$

$$(x+34)^{\log_{(x+34)}(2x+23)^2} = (x+34)^{\frac{1}{\log_{(x+34)}(x+4)^2}}$$

№4

$22 \cdot 2^{75} \cdot 11^{28}$ $2 \cdot 11^x$ $2^x \cdot 11$ $2^x \cdot 11^y$

$2^{16} \cdot 11$ $2 \cdot 11$ $2 \cdot 11^{19}$ $2 \cdot 11 + 2 \cdot 11$

$2^{16} \cdot 11^{19}$

$2 \cdot 11$ $2^x \cdot 11^y$ $2^{16-x} \cdot 11^{19-y}$

~~16 · 19 · 16 · 19~~

$1 \cdot 1 \cdot 16 \cdot 19$

$16 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 19$

$1 \cdot 19 \cdot 16 \cdot 1$

$16 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 1$

$64 \times 19 = 576$, $+64 = 1216$

~~$1216 \times 3 = 3648$~~ ~~3648?~~

$1216 \cdot 9 + 9 = 1217 \cdot 9$

$1217 \times 9 = 10953$

10953?

21104028 (U847118 M1296170)

Черновик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$x>-11,5$

$x<-4$

$x\neq-11$

$1+\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$1+\frac{\log_{x+34}(2x+23)^2}{\log_{(x+4)^{34}}(x+4)^2}$:

$a=b+1$

$a^2=b^2+b+1=0$

$b=a-1$

$\log_{(x+4)}(2x+23)=\frac{1}{2}\log_{2x+23}(-x-4)$ $a^2=b^2+b+1$

$\log_{(-x-4)}(2x+23)+\log_{(-x-4)}\sqrt{x+34})+1=\frac{1}{4}\log_{2x+23}(-x-4)$

$\log_{(-x-4)}(2x+23)+\frac{1}{4}\log_{(2x+23)}(-x-4)=$

$8-16+8-4=0$

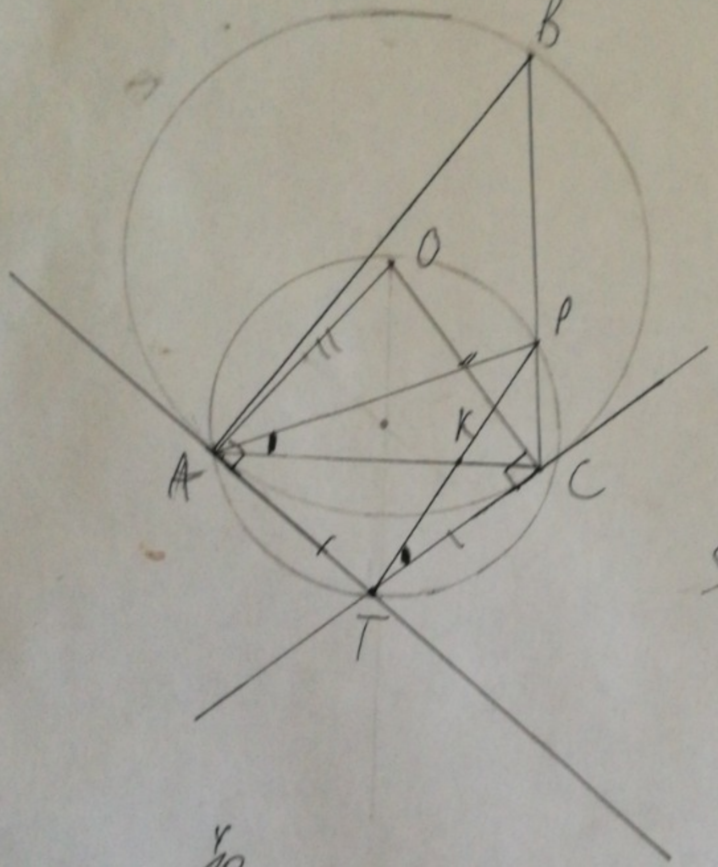
$-8-16-8-4=0$

$1-4+1-4=0$

$64-64+16-4=0$

21104028 (U847118 M1296170)

Черновик



$S_{\triangle APK} = 15$

$S_{\triangle CPK} = 13$

$S_{\triangle APC} = 28$

15×18

$18 \times 6 = 108$

$x \in [1; 16]$ $2; 15$ 14

2^1 2^{16} 2^x

$6 \cdot 14 + 3 \cdot 2 = 6 \cdot 15 = 90$

11^7 11^{119} 11^4

$6 \cdot 17 + 6 = 6 \cdot 18 = 108$

$108 \times 90 = 9720$

9720

21104028 (U847118 M1296170)

№5

Черновик

ОДЗ: $\begin{cases} x > -11{,}5 \\ x < -4 \\ x \neq -11 \end{cases}$

~~Ходе~~ Пусть $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34) = b$,

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = a$

Тогда $b^2 = \log_{x+34}(2x+23)^2 \cdot \log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{(x+4)^2}(2x+23)^2 =$

$= \log_{(-x-4)}(2x+23)$

$a = b+1 |^2 \Rightarrow b = a-1$

$a^2 = b^2 + 2b + 1 = b^2 + 2a - 1$

~~$\frac{?}{}\log^2_{(-x-4)}(x+34) = \log_{(-x-4)}(2x+23$~~

$4\log^2_{(2x+23)}(-x-4) = \log_{(-x-4)}(2x+23) + 4\log_{(2x+23)}(-x-4) - 1$

$t = \log_{(2x+23)}(-x-4)$

$4t^2 = \frac{1}{t} + 4t - 1 | \cdot t \quad 4t^3 = 1 + 4t^2 - t \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$t^3 - 4t^2 + 4t - 4 = 0 \quad t^2(t-4) \quad t(t^2$~~

$4t^2(t-1) + (t-1) = 0 \quad (4t^2+1)(t-1) = 0$

$4t^2 + 1 = 0 \quad t = 1$

$\varnothing \quad \log_{(2x+23)}(-x-4) = 1$

$-x-4 = 0 \quad x = -4$ невозможно

Пусть $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = b$, а $\log_{(x+4)^2}(x+34) = a$

$b^2 = 2\log_{x+34}(2x+23) \cdot 2\log_{2x+23}(-x-4) = 4\log_{x+34}(-x-4) \Rightarrow$

$\frac{1}{4}\log^2_{(-x-4)}(x+34) = 4\log_{(x+34)}(-x-4) + \log_{(-x-4)}(x+34) - 1 \quad t = \log_{(-x-4)}(x+34)$

$t^2 = \frac{16}{t} + 4t - 4 | \cdot t \quad t^3 - 16 - 4t^2 + 4t = 0 \quad t^2(t-4) + 4(t-4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 4 \Rightarrow \log_{(-x-4)}(x+34) = 4 \Rightarrow (-x-4)^4 = (x+34) \Rightarrow x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 255x + 222$

12