Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103990**

ID профиля: **326449**

Вариант 23

Чистовик Математика 11кл

№1 $a_1+a_2+\ldots+a_6=S$
$d>0,\ a_1, a_2, \ldots a_6 \in \mathbb{Z}$
$a_{10}\cdot a_{16} > S+39$
$a_{11}\cdot a_{15} < S+55$

$a_1 = ?$

a_1 и $a_2 \in \mathbb{Z},\ a_2=a_1+d \Rightarrow d\in\mathbb{Z}$

$a_1+a_2+\ldots+a_6=S=6a_1+15d$

$a_{10}\cdot a_{16}=(a_1+9d)(a_1+15d)=a_1^2+24a_1d+135d^2$

$a_{11}\cdot a_{15}=(a_1+10d)(a_1+14d)=a_1^2+24a_1d+140d^2$

$a_{10}\cdot a_{16} > S+39 \Rightarrow a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39$ (1)

$a_{11}\cdot a_{15} < S+55 \Rightarrow a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 5d^2<16 \Rightarrow d^2<\frac{16}{5}$, $d>0$ и $d\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow d=1$.

Тогда из (1): $a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+15+39 \Rightarrow a_1^2+18a_1+81>0$

$(a_1+9)^2>0 \Rightarrow a_1\neq -9$.

Из (2): $a_1^2+24a_1+140<6a_1+15+55 \Rightarrow a_1^2+18a_1+70<0$

$(a_1+9-\sqrt{11})(a_1+9+\sqrt{11})<0$

$-9-\sqrt{11}$ $\quad$ $-9+\sqrt{11}$ $\quad a_1 \Rightarrow a_1\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11})$

$a_1\in\mathbb{Z}$

из (1) $\Rightarrow a_1\neq-9$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=-12\\ a_1=-11\\ a_1=-10\\ a_1=-8\\ a_1=-7\\ a_1=-6\end{array}\right.$

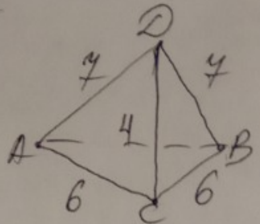
Ответ: $a_1=\{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$.

1

21103990 (U326449 M1303962)

№2 Чистовик Математика 11кл

ABCD – тетраэдр
$AB=4$, $AC=CB=6$, $AD=DB=7$
вписан в цилиндр: вершины на бок. пов.
$CD \parallel$ оси цилиндра
$R_ц - min \Rightarrow CD=?$



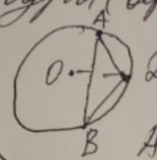
0) $S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$p=\frac{a+b+c}{2}$ по ф-ле Герона

1) $S_{ABC}=8\sqrt{2}$; $S_{ADB}=6\sqrt{5}$.

2) По условию $CD \parallel$ оси цилиндра, $AC=CB$, $AD=DB$ $\Rightarrow$

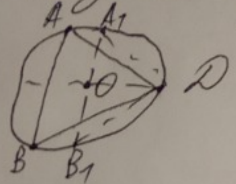
$\Rightarrow$ т. A и т. B расположены симметрично плоскости OO_1CD, где O и O_1 – центры оснований цилиндра (верх. и ниж.)

3) Рассмотрим вид сверху:



Если т. A и т. B расположены между т. O и т. D (как на рис.), то $AB > AD$ и $AB > BD$, но по усл. $AB=4$, $AD=BD=7 \Rightarrow$ противоречие.

4) Из (3) $\Rightarrow$ т. A и т. B расположены либо за т. O либо между, как на рис.

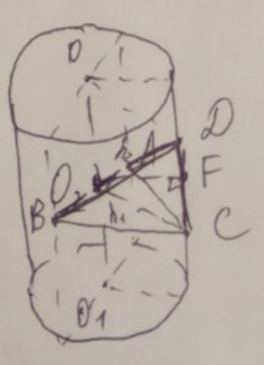


$\Rightarrow$ Наименьший $R_ц$ будет, когда AB-диаметр.
$R_ц=\frac{AB}{2}=2.=R_{min}$.

5) $S_{ABC}=8\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h_1 \Rightarrow h_1=\frac{2S_{ABC}}{AB}=4\sqrt{2}$; $S_{ADB}=6\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h_2=\frac{2S_{ADB}}{AB}=3\sqrt{5}$, где h_1 и h_2 – высоты в $\triangle$ ABC и ADB.

6) $DC \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow DC \perp R_ц$.

7) Рассмотрим п/у $\triangle O_2DF$ и $\triangle O_2FC$. По т. Пифагора получаем: $FC=\sqrt{O_2C^2-O_2F^2}=2\sqrt{7}$, $CD=\sqrt{O_2D^2-O_2F^2}=\sqrt{41}$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow CD=CF+FD=2\sqrt{7}+\sqrt{41}$, где $OF=R_ц\,min$
$OF \perp DC$.



Ответ: $2\sqrt{7}+\sqrt{41}$

2

21103990 (U326449 M1303962)

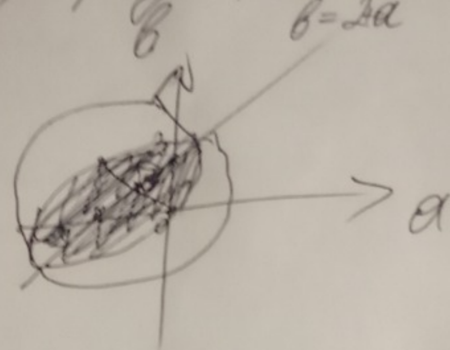
Чистовик Математика 11кл

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b, 8) & (2)\end{cases}$$

(1) Уравнение круга с центром в т. $(a;b)$ и рад. $\sqrt{8}$

(2). Рассмотрим случаи: 1. Если $-4a+4b<8 \Rightarrow b<2+a$, тогда $a^2+b^2\le -4a+4b \Rightarrow (a+2)^2+(b-2)^2\le 8$ - Ур-ие круга с центром в т. $(-2;2)$ и рад. $\sqrt{8}$;

2. Если $8<-4a+4b \Rightarrow b>2+a$, тогда $a^2+b^2\le 8$ - Ур-ие круга с ц. в т. $(0;0)$ и рад. $\sqrt{8}$.



3

21103990 (U326449 M1303962)

Математика 11 кл

Математика 11 кл

Черновик

№1. $a_1+a_2+\dots+a_6=S$

$d>0$, $a_1, a_2 \dots a_6 \in \mathbb{Z}$

$a_{10}\cdot a_{16} > S+39$

$a_{11}\cdot a_{15} < S+55$

$a_1 = ?$

$d \in \mathbb{Z}$, ~~т.к. $a_1, a_2 \dots$~~ $a_1+a_2+\dots+a_6 = 6a_1+d+2d+3d+4d+5d = 6a_1+15d = S$.

$a_{10}\cdot a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+9da_1+15da_1+135d^2 = a_1^2+24da_1+135d^2 \Rightarrow$

(1) $a_1^2+24da_1+135d^2 > 6a_1+15d+39$

$a_{11}\cdot a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+24da_1+140d^2$

(2) $a_1^2+24da_1+140d^2 < 6a_1+15d+55$

~~(2) (1) $\cdot 5d^2$~~

(1) $+5d^2 < 6a_1+15d+55 \Rightarrow 6a_1+15d+39 < (1)+5d^2 < 6a_1+15d+55$ ($5d^2 \geq 0$, $135d^2+5d^2$)

$0 < 5d^2 < 16$

$0 < d^2 < \frac{16}{5} = 3{,}2 < 4$ и $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d=1$.

Из (1): $a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+15+39$ (54)

$a_1^2+18a_1+81 > 0$

$(a_1+9)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -9$.

Из (2): $a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+15+55$ (70)

$a_1^2+18a_1+70 < 0$

$D/4 = 81-70 = 11$.

$a_1 = -9 \pm \sqrt{11} \Rightarrow$ $-9-\sqrt{11}$ $-9+\sqrt{11}$ $a_1 \Rightarrow a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$.

$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 = \{-12, -11, -10, -8, \dots$

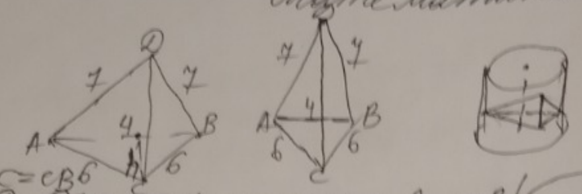
Ответ: от -12 до -6. и -9 не уд.

21103990 (U326449 M1303962)

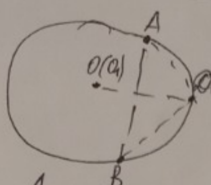
Математика 11кл

№2. ABCD – тетр.
AB = 4, AC = CB = 6, AD = DB = 7.
вписан в цил.: верш на окр. п
CD ∥ оси цил.
$R_ц = \min \Rightarrow CD = ?$

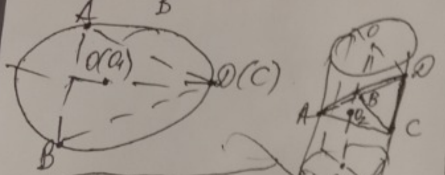
черновик



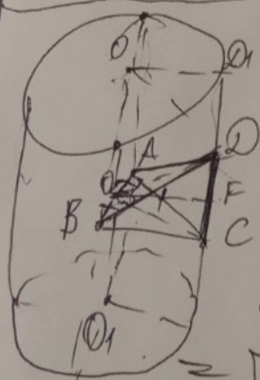
AC = CB = 6
AD = DB = 7. CD ∥ оси цил ⇒ т. A и т. B симм-но пл-ти OO_1CD.



⇒ AB > AC (BC) ⇒ противоречие ⇒ не такой рис.



$R_ц = \min$, когда AB – диам ⇒ $AB = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = 2$.
$O_2D = 2 = O_2C$.
CD ∥ оси ⇒ $O_2D \perp$ оси. ц.



$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. $p = \frac{a+b+c}{2}$.
$p = 8$. $S_{ABC} = \sqrt{8(8-6)(8-6)(8-4)} = \sqrt{8\cdot2\cdot2\cdot4} = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot h = 8\sqrt{2} \Rightarrow h = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{16\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2}$ ⇒ $CD \not\perp ABC$.
$O_2F = 2$, $CO_2 = 4\sqrt{2}$ ⇒ в п/у $\triangle O_2FC$ по т. П.: $FC = \sqrt{O_2C^2 - O_2F^2} = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

$S_{ADB} = \sqrt{9(9-7)(9-7)(9-4)} = \sqrt{9\cdot2^2\cdot5} = 6\sqrt{5} = \frac{1}{2}AB\,h_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow h_1 = \frac{2S}{AB} = \frac{12\sqrt{5}}{4} = 3\sqrt{5} = O_2D \Rightarrow$ в п/у $\triangle O_2FD$:
$DF = \sqrt{O_2D^2 - O_2F^2} = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$. ⇒ $CD = CF + FD = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$.

21103990 (U326449 M1303962)

№2. ~~ABCD~~-тетр Черновик Мате ...

~~AB~~=4. AC=CB=...

Математика 11кл

Черновик

№3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \quad (2) \end{cases}$

(1) ур-ие круга с ц. в т. $(a;b)$ и рад. $=\sqrt{8}$.

(2) 1. Если $-4a+4b \le 8$, т.е. $-a+b<2 \Rightarrow b \le 2+a$, то $a^2+b^2 \le -4a+4b$

$a^2+4a+b^2-4b \le 0$

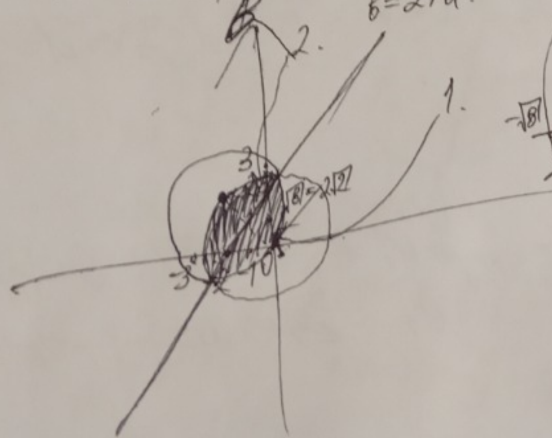
$(a+2)^2-4+(b-2)^2-4 \le 0 \Rightarrow$

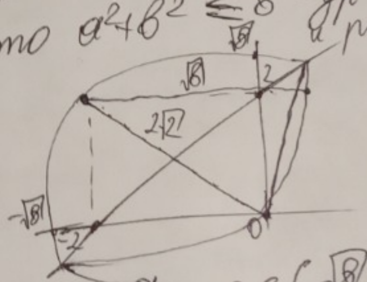
$\Rightarrow (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

ур-ие круга с ц. в т. $(-2;2)$ и рад $\sqrt{8}$.

2. Если $-4a+4b>8$, т.е. $b>2+a$, то $a^2+b^2 \le 8$ – ур-ие круга с ц в т. $(0;0)$ и рад $\sqrt{8}$.

Сим-но отн-но пр. $b=2+a$.





$a \in (-\sqrt{8}; \sqrt{8}-2)$

$b \in (-\sqrt{8}+2; \sqrt{8})$

S

21103990 (U326449 M1303962)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103990**

ID профиля: **326449**

Вариант 23

Черновик

Математика 11 кл

4 $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 22 = 2\cdot 11 \\ НОК(a,b,c) = 2^{15}\cdot 11^{19} \end{cases}$

a) $a, b, c \in \mathbb{N}$

1) $НОД(a,b,c)\cdot НОК(a,b,c) = a\cdot b\cdot c = 2^{17}\cdot 11^{20}$

(б) Выберем 2 числа (a, b), c задаётся однозначно ним.

В каждом числе ~~есть~~ ~~не должно~~ быть $2\cdot 11\cdot НОК$. Во всех числах не может быть $\geq 2^2\cdot 11$ одновременно иначе НОД был бы $2\cdot 11$.

~~НОД(3; 6; 18) = 3~~

~~НОК(3; 6; 18) = 30~~

$\Rightarrow a\cdot b\cdot c = 2^{17}\cdot 11^{20} = 2^3\cdot 11^3\cdot(2^{14}\cdot 11^{17})$

(1) Нужно распределить 31 цифру между двумя числами ~~и тремя~~

~~Максимум~~ 2^{14} и 11 не может быть одновр. из (2) от 0 до 17

комбин от 0 до 14

$15\cdot 18$

$= 15\cdot 15 + 15\cdot 3 =$

$= 225 + 45 = 270$ для а.

$2^{15}\cdot 11^{17}, 2\cdot 11, 2\cdot 11$

$2^{14}\cdot 11^{17}, 2^2\cdot 11, 2\cdot 11$

$2^{15}\cdot 11^{16}, 2\cdot 11^2, 2\cdot 11$

$2\cdot 11, 2^{15}\cdot 11^{17}, 2\cdot 11$

$2^m\cdot 11^n, 2^{14-m}\cdot 11^{17-n}$ $2^{x_1}\cdot 11^{x_2}$

$\cancel{2^{14-m-1}\cdot 11^{17-n}}$

$$\begin{array}{r} \times\ 31 \\ 11 \\ \hline 31 \\ 31\ \ \\ \hline 341 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 341 \\ 16 \\ \hline 2046 \\ 341\ \ \\ \hline 5456 \end{array}$$

21103990 (U326449 M1303963)

1 Черновик ~~математика~~

№5 $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23),\ \log_{(x+4)^2}(x+34),\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

Два равны, третье > на 1

~~Пусть 1=2: $\log_{x+34}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$~~

1: $2\log_{x+34}(2x+23)$

2: $\frac{1}{2}\log_{|x+4|}(x+34)$

3: $2\log_{(2x+23)}(-x-4)$

Ограничения
$$\begin{cases} x+34>0 \\ 2x+23>0 \\ x+34 \ne 1 \\ x+4 \ne 0 \\ x+4 \ne \pm 1 \\ 2x+23 \ne 1 \\ -x-4>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-34 \\ x>-\frac{23}{2} \\ x \ne -33 \\ x \ne -4 \\ x \ne -5 \\ x \ne -3 \\ x \ne -11 \\ x<-4 \end{cases}$$

$x: x, x, x+1$

$x^2(x+1) = x^3+x^2$

y^3+y^2

$x \in \left(-\frac{23}{2}; -11\right) \cup (-11; -5) \cup (-5; -4)$

Пусть 1=2: $\log_{x+34}(2x+23) = \frac{1}{4}\log_{|x+4|}(x+34) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\log_{(x+34)}|x+4|} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\log_{(x+34)}(2x+23) = \frac{1}{\log_{(x+34)}|x+4|}$ ~~$\Rightarrow 2x+23 = |x+4|$~~ $\;/\ \log_{(x+34)}|x+4| \ne 0$

$\log_{(x+34)}(2x+23)\cdot\log_{(x+34)}|x+4| = \frac{1}{4} = \log_{(x+34)}(2x+23+|x+4|)$ с уч. огр. $\Rightarrow 2x+23+|x+4| =$

1·2·3: $2\cdot\log_{x+34}(2x+23)\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_{|x+4|}(x+34)\cdot 2\cdot\log_{(2x+23)}(-x-4) =$

$= 2\cdot\log_{|x+4|}(2x+23)\cdot\log_{(2x+23)}(-x-4) = 2\cdot\log_{|x+4|}(-x-4) =$

$= y^3+y^2$.

Если $x+4>0$ ($x>-4$), то $\varnothing$, т.к. $-x-4$ не уд. огр.

Если $x+4<0$ ($x<-4$), то: $2\cdot\log_{(-x-4)}(-x-4) = 2 = y^3+y^2 \Rightarrow y^3+y^2-2=0$.

$y=1$ верно $\Rightarrow (y-1)(y^2+2y+2)=0$.

$(y+1)^2+1>0$

$$\begin{array}{l|l} y^3+y^2-2 & y-1 \\ -(y^3-y^2) & y^2+2y+2 \\ \quad 2y^2-2 & \\ -(2y^2-2y) & \\ \quad 2y-2 & \\ -(2y-2) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Если $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$, то $\sqrt{x+34}=2x+23$

$x=-9$.

~~$\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$, то $(x+4)^2 = x+34 \Rightarrow x=-9$~~

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1 \Rightarrow \sqrt{2x+23} = -x-4 \Rightarrow x =$

$x^2+8x+16$

$2x+23 = (x+4)^2 = x^2+8x+16 \Rightarrow x^2+6x-7=0$

$\begin{cases} x=-7 \\ x=1 \end{cases}$

Математика 11кл

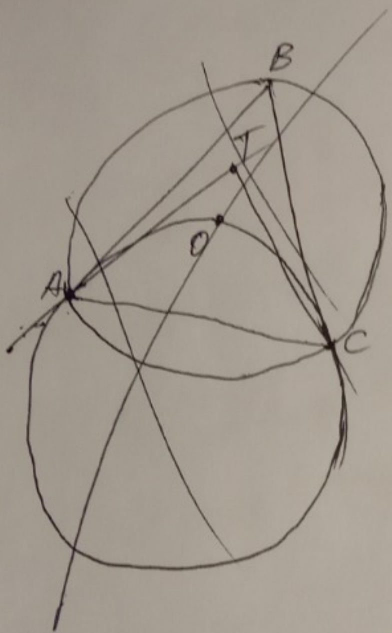
Черновик

№6. $\triangle ABC$ – о/у; $\omega_1 \in A, O, C$; $\cap BC = P$

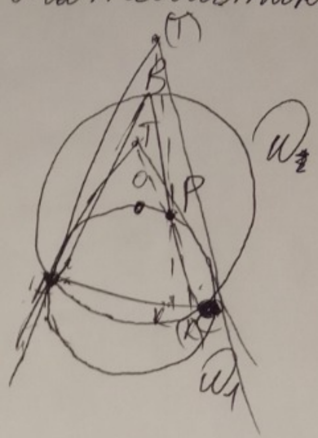
$S_{\triangle APK} = 15$, $S_{\triangle CPK} = 13$

а) $S_{ABC} = ?$; б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$; $AC = ?$

$S_{APK} + S_{CPK} = S_{APC} = 28$.



Математика 11кл



21103990 (U326449 M1303963)

Математика 11кл

Числовик

№5 $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$.

Два числа равны, а третье больше их на 1.

Ограничения $\begin{cases} x+34>0 \\ 2x+23>0 \\ x+34\neq 1 \\ x+4\neq 0 \\ x+4\neq 1 \\ x+4\neq -1 \\ 2x+23\neq 1 \\ -x-4>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(-\frac{23}{2};-11\right)\cup(-11;-5)\cup$
$\cup(-5;-4)$.

Пусть два числа равны y, тогда третье равно $y+1$.

Их произведение: $y\cdot y\cdot(y+1)=y^3+y^2$.

Произведение логарифмов: $2\cdot\log_{x+34}(2x+23)\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_{|x+4|}(x+34)\times$
$\times 2\cdot\log_{2x+23}(-x-4)=2\cdot\log_{|x+4|}(-x-4)$

~~Если~~ С учётом ограничений: $2\log_{|x+4|}(-x-4)=2\cdot\log_{(-x-4)}(-x-4)=2$.

$y^3+y^2=2\Rightarrow y^3+y^2-2=0$. Если $y=1$, то верно $\Rightarrow y^3+y^2-2=$
$=(y-1)(y^2+2y+2)=0$. $y^2+2y+2=(y+1)^2+1>0 \Rightarrow y=1$ – решение.

Если $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$, то $\sqrt{x+34}=2x+23\Rightarrow x=-9$ – уд. огр.

Если $\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$, то $(x+4)^2=x+34\Rightarrow x^2+7x-18=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=2 \text{ – не уд. огр.}\end{array}\right.$

Если $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1$, то $\sqrt{2x+23}=-x-4\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=-7 \text{ – уд. огр.} \\ x=1 \text{ – не уд.}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$ при $x=-9$. тогда

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=\log_{\sqrt{-18+23}}(9-4)=\log_{\sqrt{5}}5=2=1+1\Rightarrow$ верно.

При $x=-7$: $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1$, $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{\sqrt{27}}(9)=\log_{3^{3/2}}3^2=$
$=\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\log_3 3=\frac{4}{3}\neq 1$ и не отличается на 1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не подходит.

Ответ: $x=-9$.

1

21103990 (U326449 M1303963)

Чистовик Математика 11кл

№4 $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 22 = 2\cdot 11 \\ НОК(a,b,c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$
$a, b, c \in \mathbb{N}$

1) $НОД(a,b,c)\cdot НОК(a,b,c) = a\cdot b\cdot c = 2^{17}\cdot 11^{20}$.

2) В каждом числе есть $2^1\cdot 11^1$ и во всех числах одновременно не может быть $2^2\cdot 11^2$, т.к. $НОД = 2\cdot 11$.

3) Из (1)-(2) $\Rightarrow a\cdot b\cdot c = 2^{17}\cdot 11^{20} = 2^3\cdot 11^3\cdot(2^{14}\cdot 11^{17})$

4) Если выбрать два числа, то третье задаётся однозначно.

5) Комбинаций для первого числа (a): степень 2 от 0 до 14, степень 11 от 0 до 17 $\Rightarrow$
$\Rightarrow 15\cdot 18 = 270$.

6) Вариантов распределить $15+18=33$ цифры в трёх числах: $C_3^{33} = \frac{33!}{3!\,30!} = \frac{31\cdot 32\cdot 33}{6} = \frac{31\cdot 32\cdot 11}{2} = 11\cdot 31\cdot 16 = 5456$ вариантов.

2

21103990 (U326449 M1303963)