Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103941**

ID профиля: **164736**

Вариант 23

№1 (Черновик)

$S = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 3(2a_1 + 5d) = 6a_1 + 15d$

$\sqrt{60} =$
$= \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$

$a_{10} a_{16} > S + 39$
$a_{11} a_{15} < S + 55$

$a_{13}^2 - 9d^2 > S + 39$
$a_{13}^2 - 4d^2 < S + 55$

$\begin{array}{r} 55 \\ -39 \\ \hline 16 \end{array}$

$55 - 39 =$
$=$

$S + 39 + 9d^2 < a_{13}^2 < S + 55 + 4d^2$

$6a_1 + 15d + 39 + 9d^2 < \mathbb{Z} < 6a_1 + 15d + 4d^2 + 55$

$16 = 5d^2$
$d = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$a_{13}^2 = (a_1 + 12d)^2 = a_1^2 + 24d + 144d^2$

$a_1^2 + 24d + 144d^2 < 6a_1 + 15d + 4d^2 + 55$

$5d^2 < 16$
$\boxed{d < \frac{4}{\sqrt{5}}}$

$d \in \mathbb{Z}$, т.к $\forall a_i \in \mathbb{Z}$

$9 + 39 = 48$

$\begin{array}{r} 48 \\ +15 \\ \hline 63 \end{array}$

$\frac{4}{5}\sqrt{5} \vee 3$

$4\sqrt{5} \vee 15$

$16 \cdot 5$
$80 < 225$

$55 + 15$
$= 60 + 10$
$= 70$

$\sqrt{11} = 3{,}31$

$\begin{array}{r|l} 9 & \\ 63 & 200 \\ 3 & 189 \\ 661 & 1100 \\ 1 & 661 \end{array}$

$\begin{array}{r} 331 \\ \times 331 \\ \hline 331 \\ +993 \\ 993 \\ \hline 10{,}9561 \end{array}$

$\begin{array}{r} 332 \\ \times 332 \\ \hline 664 \\ +996 \\ 996 \\ \hline 110224 \end{array}$

$\frac{4}{5}\sqrt{5} \vee 2$

$80 < 100$

$\Rightarrow d < 2$

$\begin{array}{r} 144 \\ -63 \\ \hline 81 \end{array}$

$\begin{array}{r} 144 \\ -74 \\ \hline 70 \end{array}$

$9 - 3{,}31$

$\begin{array}{r} 9{,}00 \\ -3{,}31 \\ \hline 5{,}69 \end{array}$

$a_1 = -12$
$d = 1$

$\begin{array}{r} 57 \\ -39 \\ \hline 18 \end{array}$

$-57 + 39 =$
$= -18$

$S_6 = \frac{-12 \cdot 2 + 5}{2} \cdot 6 = 3(-24 + 5) =$

$= 3 \cdot (-19) = -(30 + 27) =$
$= -57$

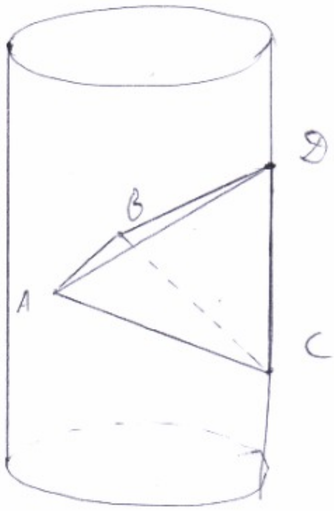
$a_{13}^2 - 9 > -18; \; a_{13}^2 > -9$

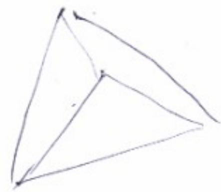
$a_{13}^2 < 59 - 57; \; a_{13}^2 < 2$

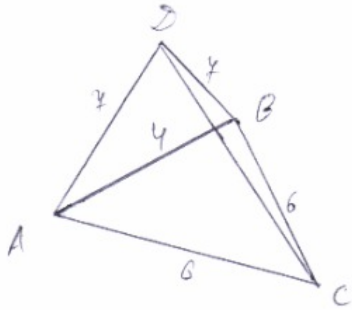
$a_{13} = a_1 + 12d = -12 + 12 = 0$

21103941 (U164736 M1300233)

Черновик







CD – параметр тетраэдра

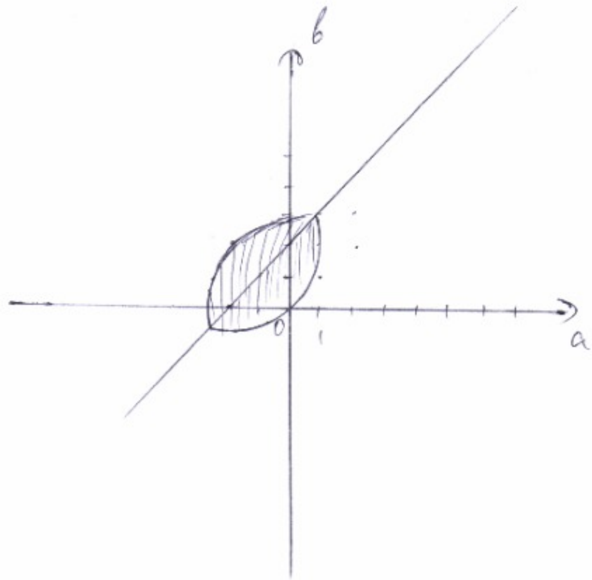
$-4a+4b \le 8$ $a^2+b^2 \le -4a+4b$

$4b < 8+4a$ $a^2+4a+b^2-4b \le 0$

$b \le a+2$ $(a+2)^2+(b-2)^2-8 \le 0$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le 8$



$b=a+2$

$(a+2)^2+a^2 \le 8$

$2a^2+4a+4=8$

$2a^2+4a-4=0$

$a^2+2a-2=0$

$(a+1)^2=3$

$a=-1\pm\sqrt{3}$

21103941 (U164736 M1300233)

$S = \frac{2a_1+5d}{2} \cdot 6 = 3(2a_1+5d)$ Черновик

$a_{10} \cdot a_{16} > S+39$ $(a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+24a_1d+915d^2 > 6a_1+15d+3$

$a_{11} \cdot a_{15} < S+55$

$(a_1+10d)(a_1+$

$a_{13} = a_1+12d$

$a_{16} = a_1+15d = a_{13}+3d$

$a_{10} = a_{13}-3d$

$a_{13}^2 - 9d^2 > S+39$; $a_{13}^2 = a_1^2+24da_1+144d^2$

$(a_{13}-2d)(a_{13}+2d) < S+55$

$a_{13}^2-4d^2 < S+55$

$\begin{cases} a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39 \\ a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55 \end{cases}$ $d>0$

$\begin{cases} a_1^2+\cancel{24a_1d}\ 6a_1(4d-1)+135d^2-15d-39>0 \\ a_1^2+6a_1(4d-1)+140d^2-15d-55<0 \end{cases}$

$D/4 = 9(16d^2-8d+1)-135d^2+15d+39 = 144d^2-\cancel{54}\ 72d+9-135d^2+15d+39 = 9d^2-57d+48$

$D/4 = 144d^2-72d+9-140d^2+15d+55 = 4d^2-57d+64>0$

$\cancel{D/4}\ D = 57^2-4^2 64 = 3249-1024$

$64 \cdot 16 = 2^6 \cdot 2^4 = 2^{10}$

$57 : 3 = 19$; $27-27$; $16 \cdot 9 = 144$; $72-15=57$

$57 \cdot 57$: 399, 285, 3249

$3249 - 1024 = 2225$

$\sqrt{2225} = 47$; 76; $87 \cdot 7$: 625, 609

21103941 (U164736 M1300233)

Чистовик

№1

$$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = 3(a_1+a_1+5d) = 6a_1+15d$$

$\{a_i\}$ - возр. послед., $\forall a_i \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow d \in \mathbb{Z};\ d \geq 1$

$$\begin{cases} a_{10}\,a_{16} > S+39 \\ a_{11}\,a_{15} < S+55 \end{cases}$$

$$a_{10} = a_{13}-3d;\quad a_{16} = a_{13}+3d;\quad a_{11} = a_{13}-2d;\quad a_{15} = a_{13}+2d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{13}^2 - 9d^2 > S+39 \\ a_{13}^2 - 4d^2 < S+55 \end{cases} \Rightarrow S+9d^2+39 < a_{13}^2 < S+4d^2+55$$

$$\Downarrow$$

$$S+9d^2+39 < S+4d^2+55$$

$$5d^2 < \underset{16}{\underset{\parallel}{55-39}}$$

$$d < \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Оценим $\frac{4\sqrt{5}}{5}$:

$$\frac{4\sqrt{5}}{5} \vee 2$$

$$4\sqrt{5} \vee 10$$

$$\underset{80}{\underset{\parallel}{16\cdot 5}} < 100$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq d < 2 \quad \Leftrightarrow \boxed{d=1}$$

$$\Rightarrow \quad 6a_1+15+9+39 < a_{13}^2 < 6a_1+4+15+55$$

$$6a_1+63 < a_{13}^2 < 6a_1+74$$

$$6a_1+63 < (a_1+12d)^2 < 6a_1+74$$

$$6a_1+63 < a_1^2+24a_1+144 < 6a_1+74$$

$$63 < a_1^2+18a_1+144 < 74$$

$$\begin{cases} a_1^2+18a_1+144 < 74 \\ a_1^2+18a_1+144 > 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+18a_1+70 < 0 \\ a^2+18a_1+81 > 0 \end{cases}$$

Чистовик

$a_1^2 + 18a_1 + 70 = 0$

$D/4 = 81 - 70 = 11$

$a_1 = \dfrac{-9 \pm \sqrt{11}}{1}$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 = a_1^2 + 2\cdot 9a_1 + 81 =$

$= (a_1+9)^2$

$\Rightarrow \left(a_1 - (-9-\sqrt{11})\right)\left(a_1 - (-9+\sqrt{11})\right) < 0$

$\Rightarrow (a_1+9)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -9$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \in \left(-9-\sqrt{11};\ -9+\sqrt{11}\right) \\ a_1 \neq -9 \end{cases}$

$\sqrt{11} = 3{,}31$

```
 √11 = 3,31
  -9
63 | 2 00
 3 | 1 89
661 | 11 00
  1 |  6 61
        4 39
```

$\Rightarrow -9-\sqrt{11} \approx -9 - 3{,}31 = -12{,}31$

$-9+\sqrt{11} \approx -9 + 3{,}31 = -5{,}69$

$\begin{cases} a_1 \in (-12{,}31;\ -5{,}69) \\ a_1 \neq -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \in [-12;\ -6] \\ a_1 \neq -9 \end{cases}$

$\Rightarrow a_1 = -12; -11; -10; -8; -7; -6$

Ответ: $-12; -11; -10; -8; -7; -6$

Дано:

$ABCD$ – тетраэдр

$AB=4$

$AC=CB=6$

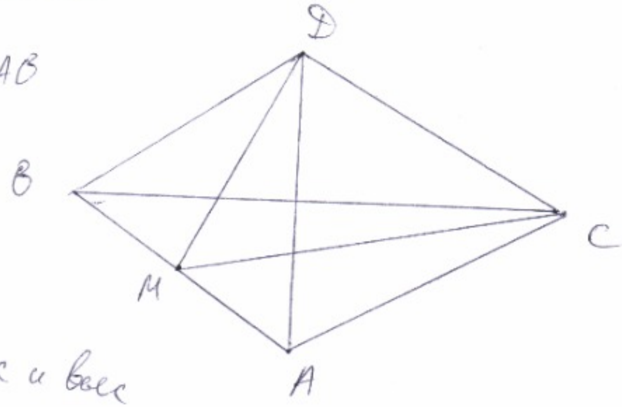
$AD=DB=7$

$CD \parallel O_1O_2$

$CD=?$

№2 (Чистовик)

1) Рассмотрим произвольный тетраэдр $ABCD$, удовлетворяющий условию:



1.1) Пусть т. M – середина AB

$AM=MB$.

1.2) В $\triangle ADB$ $AD=DB=7$

$\Rightarrow \triangle ADB$ – р/б

$\Rightarrow DM$ – медиана, бисс и выс

$\Rightarrow AB \perp DM$.

1.3) В $\triangle ACB$ $AC=CB=6 \Rightarrow \triangle ACB$ – р/б $\Rightarrow CM$ – выс, бисс и мед

$\Rightarrow CM \perp AB$.

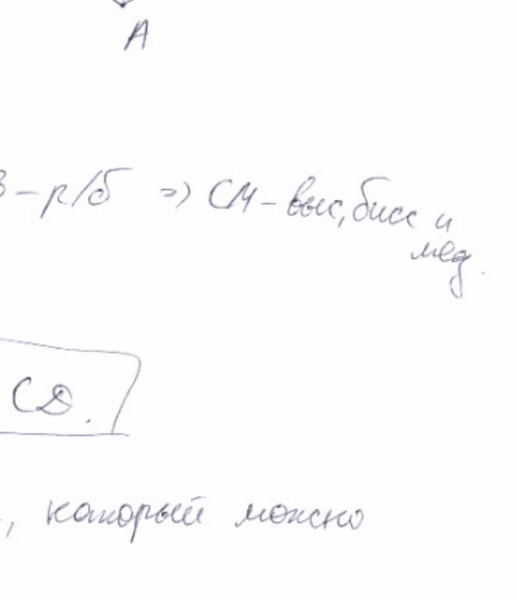
1.4) $\left.\begin{array}{l} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (CMD) \Rightarrow \boxed{AB \perp CD.}$

Таким образом, $ABCD$ – тетраэдр, который можно полностью определить, зная CD.

2) Рассмотрим $ABCD$, вписанный в цилиндр как в условии:

$O_{1,2}$ – центры оснований цилиндра

$\Rightarrow O_1O_2$ – ось симметрии;



$\left.\begin{array}{l} O_1O_2 \perp \text{основаниям цилиндра} \\ \left.\begin{array}{l} O_1O_2 \parallel CD \\ CD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow O_1O_2 \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB$ ~~лежит в плоскости~~, ∥ основаниям цилиндра

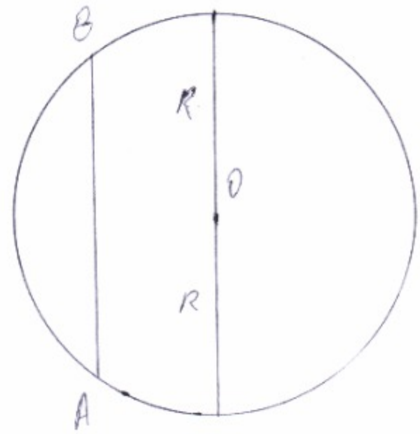
$\Rightarrow$ через AB проходит ~~на~~ плоскость $\alpha \mid \alpha \parallel$ основаниям цилиндра $\Rightarrow$ сечение цилиндра пл-ю α – окружность с радиусом основания.

21103941 (U164736 M1300233)

Чистовик

3) Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью α:

O – центр окр-ти; R – её радиус



Тогда AB – это хорда окружности,

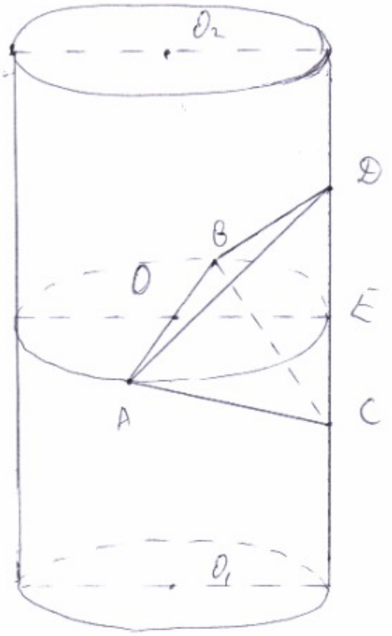
а как мы знаем:

хорда $\leq$ диаметр

$\Rightarrow$ $AB \leq 2R$; $2R \geq AB$

$\Rightarrow$ $\boxed{R_{min} = \frac{AB}{2} = 2.}$

$\Rightarrow$ $O \in AB$, $AO = OB \Rightarrow O \equiv M$.



4) В $\triangle ADB$: $DO \perp AB \Rightarrow \triangle AOD$ – ~~р/б~~ прямоуг

$\Rightarrow$ По т. Пифагора $\triangle AOD$:

$$\left.\begin{aligned} &AD^2 = AO^2 + DO^2 \\ &AD = 7 \\ &AO = \frac{AB}{2} = R = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow DO = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

5) В $\triangle ACB$: $CO \perp AB \Rightarrow \triangle AOC$ – прямоуг

$\Rightarrow$ По т. Пифагора $\triangle AOC$:

$$\left.\begin{aligned} &AC^2 = AO^2 + CO^2 \\ &AO = R = 2 \\ &AC = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow CO = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

6). Пусть $CD \cap \alpha = E \Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} &CD \perp \text{осн. цил-ра} \\ &\alpha \parallel \text{осн. цил-ра} \end{aligned}\right\} \Rightarrow CD \perp \alpha \Rightarrow CD \perp OE$. $OE = R = 2$

$\Rightarrow$ $\triangle DEO$ и $\triangle CEO$ – прямоуг

$\Rightarrow$ По т. Пифагора:

$\triangle DEO$: $DO^2 = OE^2 + DE^2$

$DE = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

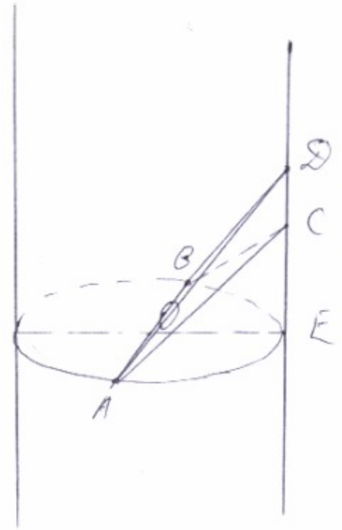
$\triangle CEO$: $CO^2 = OE^2 + CE^2$

$CE = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

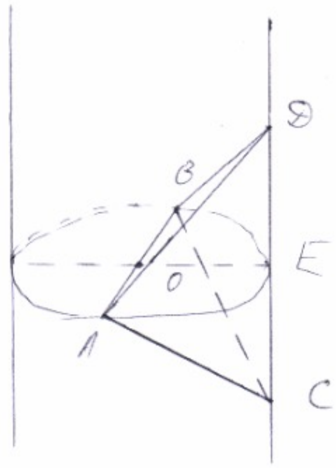
7) Возможно 2 случая ~~Рас~~ расположения CD отн. т. E:

Чистовик

I



II



$CД = ДE - CE = \sqrt{41} - 2\sqrt{7}$

$(41 > 28 \Rightarrow \sqrt{41} > 2\sqrt{7})$

$CД = ДE + CE = \sqrt{41} + 2\sqrt{7}$

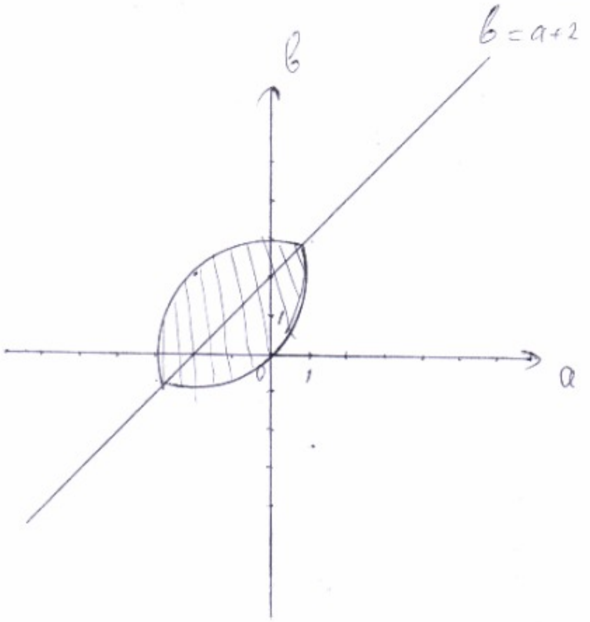
Ответ: $CД = \sqrt{41} \pm 2\sqrt{7}$

21103941 (U164736 M1300233)

(Чистовик)

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 & ① \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b; 8) & ② \end{cases}$$



Исследуем выражение ②:

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b; 8)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4a+4b \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \end{cases} \\ \begin{cases} -4a+4b > 8 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \le a+2 \\ (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \end{cases} \\ \begin{cases} b > a+2 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \end{array} \right.$$ – решим графически

неравенство ① для фиксированных a и b – ~~площа~~ все точки, которые находятся внутри окружности радиуса $2\sqrt{2}$ и центром $O(a; b)$.

В силу того, что решение ② – непрерывная область, то и фигура M будет непрерывна

$\Rightarrow$ ~~Построим~~ Найдём и построим оболочку M:

I. $(a+2)^2+(b-2)^2=8$
$b \le a+2$

II. $a^2+b^2=8$
$b > a+2$

(GPG)

На графике $b(a)$ ~~каждой точке дуги~~ каждая точка дуги представляет собой пару $(a; b) \Rightarrow$ Если взять $y(x)$ и положить его в масштабе $1 \kappa 1$ на $b(a)$, то дуги графика $b(a)$ – это множество ~~центро~~ центров окружностей $y(x)$ (т.е ① выр-я)

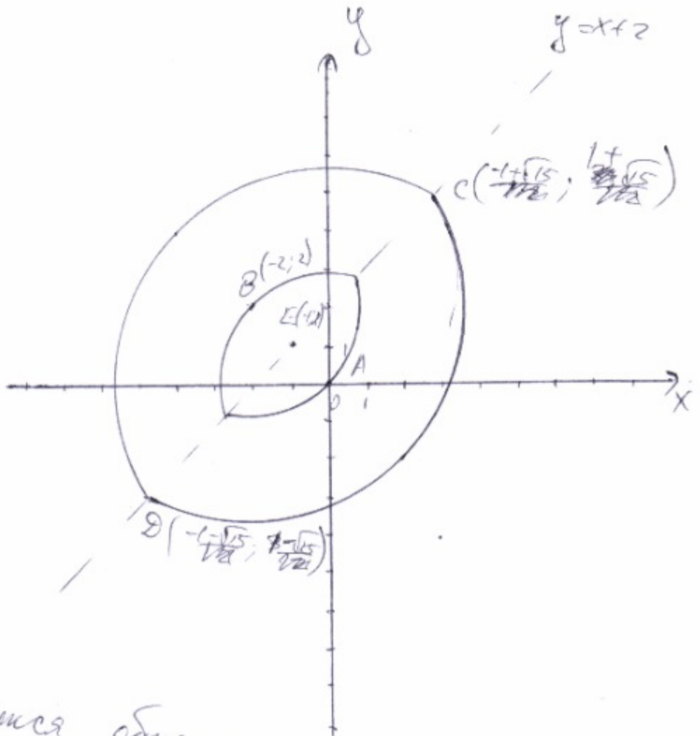
Чистовик

Построим $y(x)$:

Положим

$a = x;\ b = y$, тогда

фигура M сост из дуг окружностей, чей радиус равен $2\cdot\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$, а центры совпадают с центрами $b(a)$:



$\Rightarrow$ контур M описывается объединением:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \le x+2 \\ (x+2)^2+(y-2)^2 = 32 \end{cases} \\ \begin{cases} y > x+2 \\ x^2+y^2 = 32 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y = x+2 \\ (x+2)^2+(y-2)^2 = 32 \end{cases}$$

$x^2+4x+4+x^2 = 32$

$2x^2+4x-28 = 0$

$x^2+2x-14 = 0$

$D/4 = 1+14 = 15$

$x = -1 \pm \sqrt{15}$

$y = -1 \pm \sqrt{15} + 2 = 1 \pm \sqrt{15}$

Найдём площадь половины M:

$$\frac{S}{2} = S_{\text{сектор } \angle CBD} - S_{\Delta CBD}$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{15}}{2} - \frac{-1-\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{15}}{2} - \frac{3-\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{15}+1+\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \sqrt{30}$$

$BC = BD = R = 4\sqrt{2}$

$BE \perp CD$, $BE = \sqrt{32 - \left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2} = \sqrt{32 - \frac{30}{4}} = \sqrt{\frac{64-15}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} BE \cdot CD = \frac{7\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{30} = \frac{7}{4}\sqrt{60} = \frac{7}{2}\sqrt{15}$

По Th cos:

$30 = 32+32-2\cdot 32\cos\alpha;\quad \cos\alpha = \frac{64-30}{2\cdot 32} = \frac{34}{2\cdot 32} = \frac{17}{32}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{17}{32}\right) \Rightarrow S_{\text{сек}} = \frac{\alpha\cdot R^2}{2} = \frac{\alpha\cdot 32}{2} = 16\alpha$

$\Rightarrow S = 32\alpha - 7\sqrt{15} = 32\arccos\left(\frac{17}{32}\right) - 7\sqrt{15}$

Ответ: $S = 32\arccos\left(\frac{17}{32}\right) - 7\sqrt{15}$

Стр 7

21103941 (U164736 M1300233)

Чистовик

$CD = \sqrt{(-1+\sqrt{15}+1+\sqrt{15})^2+(1+\sqrt{15}-1+\sqrt{15})^2} = \sqrt{4\cdot 15+4\cdot 15} =$
$= 2\sqrt{30}$.

$BC = BD = R = 4\sqrt{2}$.

$BE \perp CD \Rightarrow BE = \sqrt{32-30} = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} BE \cdot CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{30} = 2\sqrt{15}$.

$S_{\text{сектора}} = \frac{\alpha R^2}{2} = 16\alpha$, где $\alpha = \angle CBD$

По th cos:

$4 \cdot 30 = 32+32-2\cdot 32 \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{64-120}{2\cdot 32} = \frac{32-60}{32} = \frac{8-15}{8} = \frac{-7}{8}$

$\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$

$\Rightarrow S = 32 \arccos\left(-\frac{7}{8}\right) - 4\sqrt{15}$

Ответ: $S_M = 32 \arccos\left(-\frac{7}{8}\right) - 4\sqrt{15}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103941**

ID профиля: **164736**

Вариант 23

Черновик

$НОД(a,b,c) = 22$

$НОК(a,b,c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$ $\Rightarrow$ $a = 22k$

$b = 22f$ $\to$

$c = 22e$

$НОК(a,b,c) = 2 \cdot 11 \cdot 2^{15} \cdot 11^{18} = 22 \cdot 2^{15} \cdot 11^{18}$

$16 \cdot 19 = 20 \cdot 16 - 16 = 320 - 16 = 304$ - кол-во чисел таких, что

$n = 22 \cdot 2^{\alpha} \cdot 11^{\beta}$, α

I. Одно из чи

~~a = 22~~ $НОД(a,b,c) = 22$

$\Rightarrow НОД(k,f,e) = 1 \Rightarrow$ ~~только 2~~ не более 2х чисел имеют $НОД > 1$

$\Rightarrow$ I. $a = 22 \cdot 2^{15}$

$b = 22 \cdot 11^{18}$, ~~$\beta \in [$~~

$c = 22 \cdot 11^{\gamma}$, $\gamma \in [0; 19]$

$\Rightarrow$ 20

II $a = 22 \cdot 11^{18}$

$b = 22 \cdot 2^{15}$

$c = 22 \cdot 2^{\gamma}$

$\gamma \in [0; 15]$

$\Rightarrow$

$k = 2^{\alpha} \cdot 11^{\beta}$

$f = 2^{\gamma}$

$e = 11^{\varphi}$

2

21103941 (U164736 M1300234)

Черновик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \cdot \log_{(x+34)}(x+4)^2 = 1$

$\log_{x+34}(2x+23)^2 \cdot \log_{(x+34)}(x+4)^2 = 1$

$\left((2x+23)^2\right)^{\log_{(x+34)}(x+4)^2}$

$= (x+34)$

$f(x) = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$f'(x) = \frac{1}{(2x+23)\cdot \ln\sqrt{x+34}} \cdot 2 \cdot \uparrow$

$f(x) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$f'(x) = \frac{1}{(x+34)\ln(x+4)^2}$

$\alpha = 2x+23$

$\beta = x+34$

$\gamma = x+4$

$\beta+\gamma = 2x+38 = \alpha+15$

$2\log_\beta \alpha \qquad \log_{\gamma^2}\beta \qquad 2\log_\alpha(-\gamma)$

$\frac{1}{2}\log_{|\gamma|}\beta$

$2\log_\beta = 2\log_\alpha(-\gamma)$

$2\log_\beta \alpha = 2\log_\alpha(-\gamma) = \frac{1}{2}\log_{-\gamma}(\beta)+1$

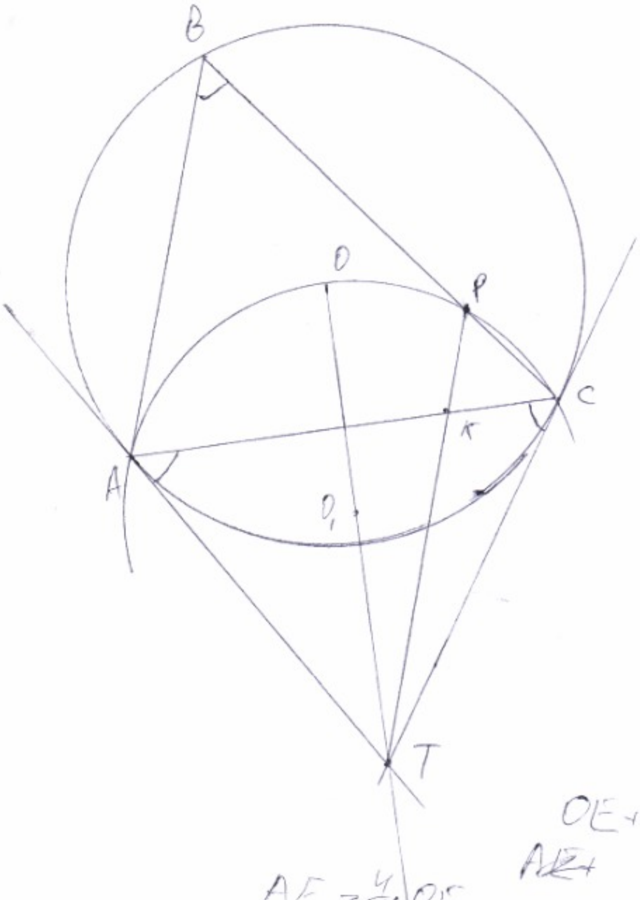
$\frac{1}{\log_\alpha \beta} = \log_\alpha(-\gamma)$

$1 = \log_\alpha(-\gamma)\cdot\log_\alpha \beta$

$\alpha^{\log_\alpha(-\gamma)} = -\gamma$

$\alpha^{\log_{\alpha}(\beta)} = \beta$

Черновик



$S_{APK}=15=\frac{1}{2}h\cdot AK$

$S_{CPK}=13=\frac{1}{2}h\cdot KC$ $\Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{15}{13}$

$S_{APC}=28=\frac{1}{2}h\cdot AC$

$\Rightarrow$

$k=2^{15}\cdot 11^{18}$

$f=1$

$e=1$

2^{15}

$\cancel{2^{18}}\ 11^{18}$

$1,\ \le 2^{15},\ \le 11^{18}$

$16\cdot 19=304$

$OE+ET=2R$

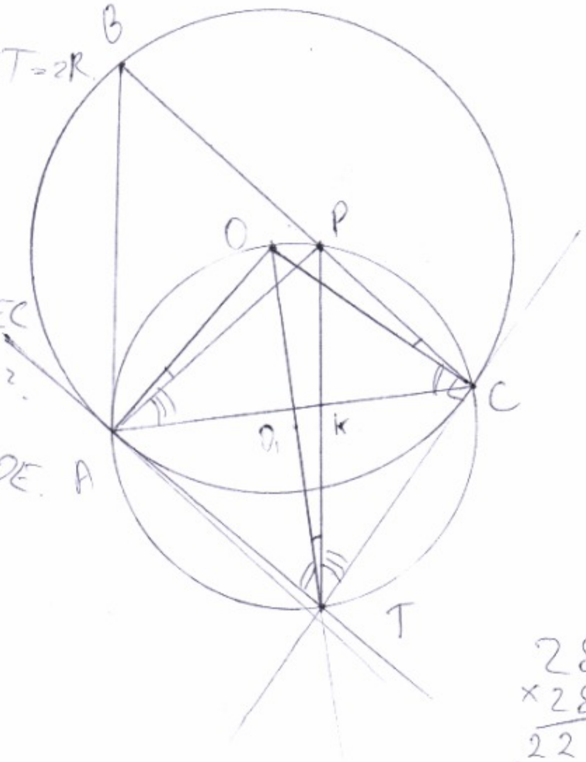
~~AE+~~

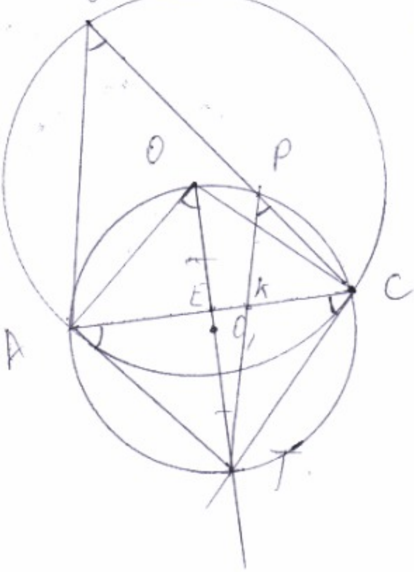
$AE=\frac{4}{7}OE$

$\frac{4}{7}=\frac{AE}{OE}=\frac{ET}{EC}$

$OE\cdot ET=AE\cdot EC = AE^2$

$ET=\frac{16}{49}OE$





C_3^2

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ +56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$\sqrt{784}=28$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 384 \\ 8 & 384 \\ \hline & 0 \end{array}$$

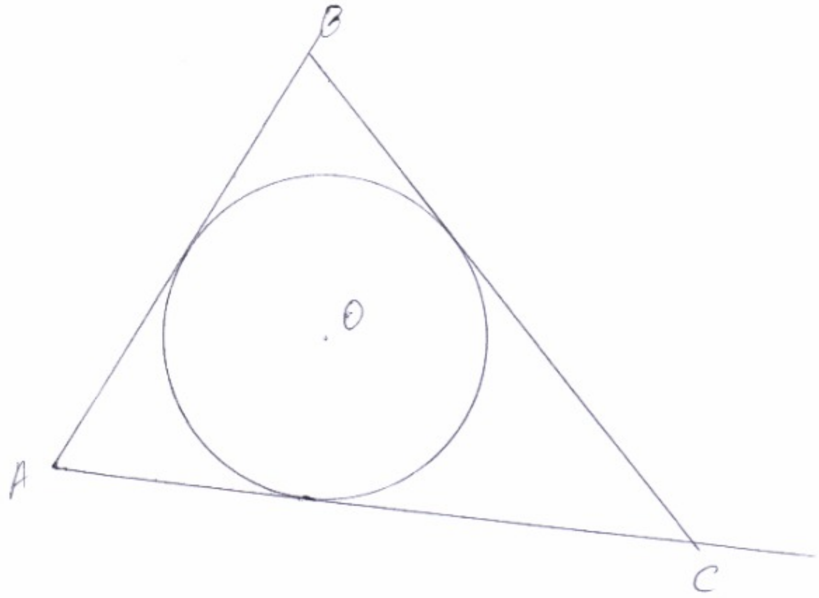
$AT=R_1\cdot\frac{4}{7}$

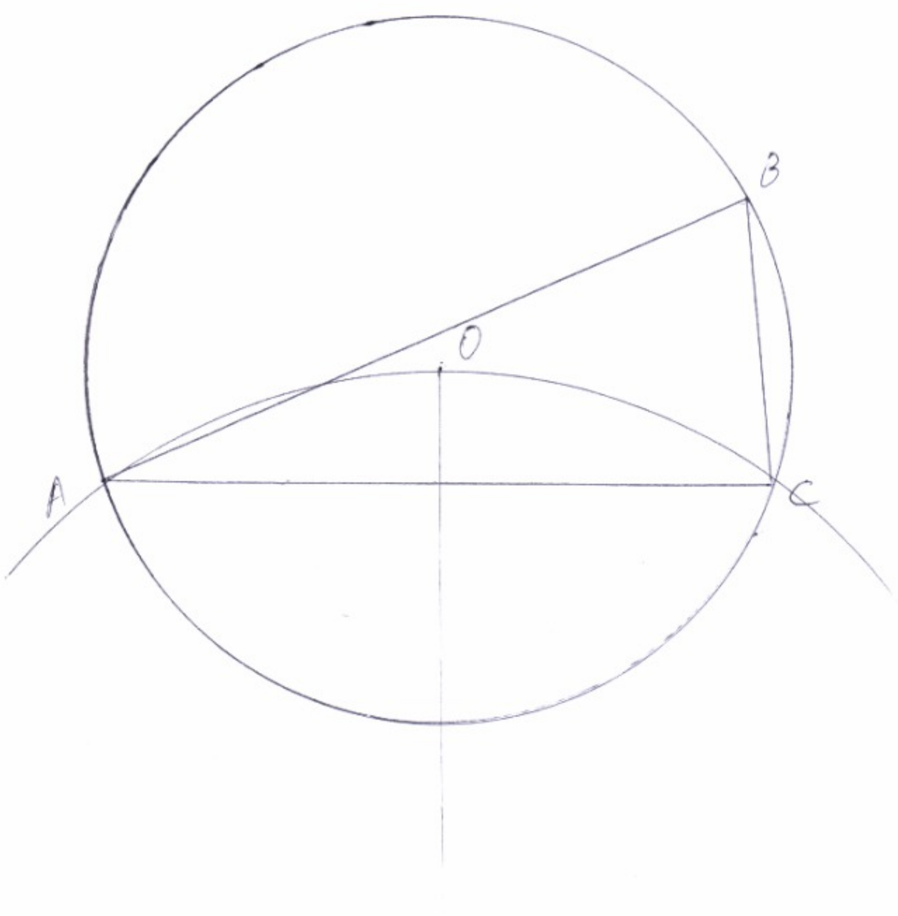
$$\begin{array}{r|l} 65 & 5 \\ 5 & 13 \\ \hline 15 & \end{array}$$

$AE=EC=AT\cdot\cos\angle=$

$=\frac{4}{7}R_1\cdot\frac{7}{\sqrt{65}}=\frac{4R_1}{\sqrt{65}}$

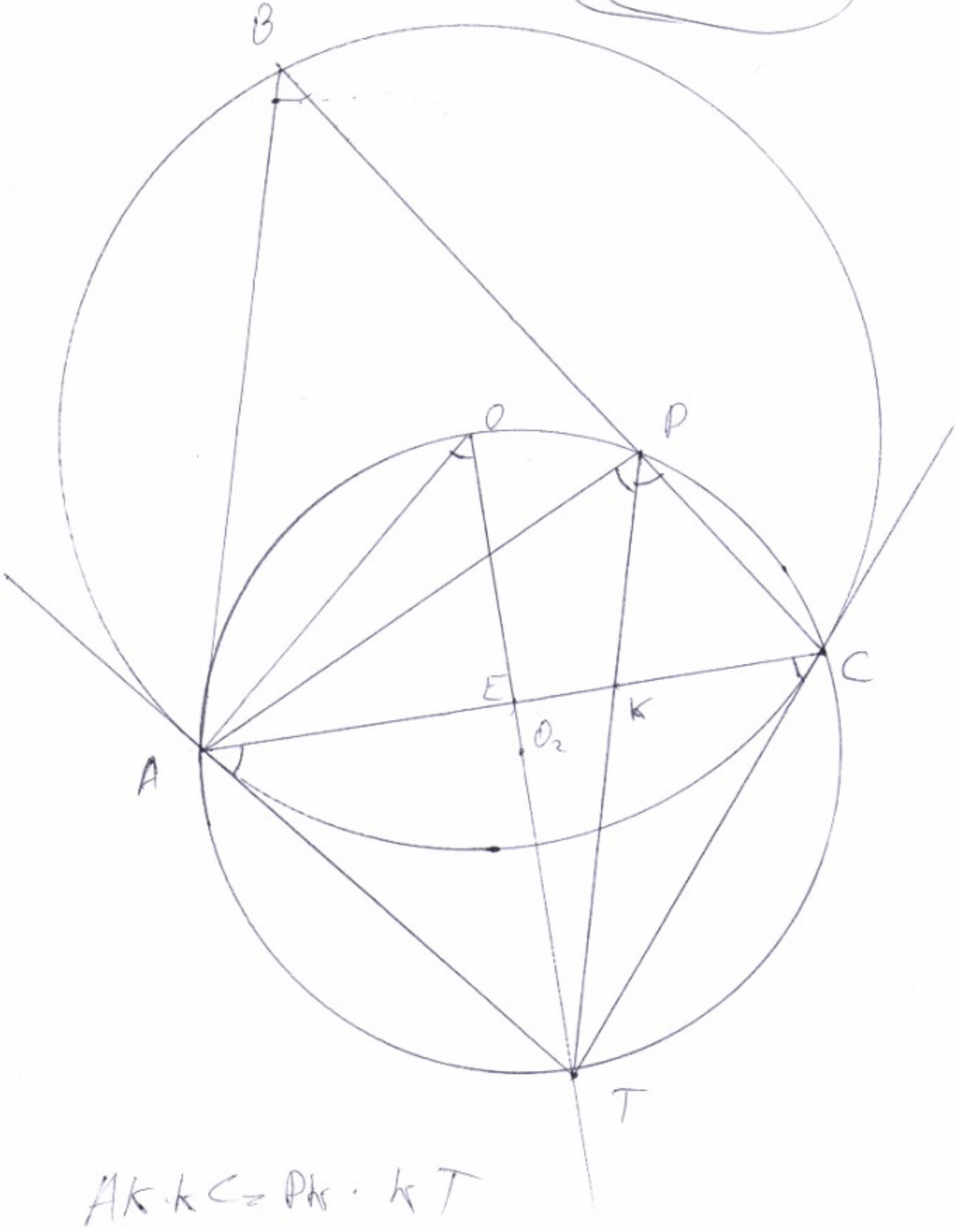
Черновик





21103941 (U164736 M1300234)

Черновик



$AK \cdot KC = PK \cdot KT$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7}$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$

$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$\cancel{\frac{KC}{\sin\alpha} = 2R_2}$

$\cancel{KC = 2R_2 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{8R_2}{\sqrt{65}}}$

$\cancel{AC = \frac{28}{13} \cdot \frac{8R_2}{\sqrt{65}} = \frac{28 \cdot 8 R_2}{13\sqrt{65}}}$

$$\begin{array}{r|l} 112 & 4 \\ -8 & 28 \\ \hline 32 & \\ -32 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$AT = 2R_2 \cdot \sin\alpha = KC$

$28 = \frac{1}{2} h \cdot AC$; $h = \frac{2 \cdot 28}{AC} = \frac{2 \cdot 28}{28 \cdot 16 R_2} \cdot \sqrt{65} = \frac{\sqrt{65}}{2R_2}$

$13 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{65}}{2R_2} \cdot KC$

21103941 (U164736 M1300234)

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=22 & (1) \\ НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} & (2) \end{cases}$$

Из (1) следует, что
$a=22k$
$b=22f$, $НОД(k,f,e)=1$
$c=22e$

Из (2) следует, что хотя бы в 1м числе есть множители 2^{16}, 11^{19} (или 2^{15}, 11^{18}, если не учитывать 22)

$$\Rightarrow \begin{cases} НОД(k,f,e)=1 \\ НОК(k,f,e)=2^{15}\cdot 11^{18} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ~~Возможны случаи:~~

~~$k=2^{15}\cdot 11^{18}$~~ ~~$k=2^{15}$~~

~~$f=\le 2^{15}, \le 11^{18}$~~ ~~$f=11^{18}$~~

~~$e=\le 11^{18}, \le 2^{15}$~~ ~~$e=$~~

Возможны случаи:

$k=2^{15}\cdot 11^{18}$

$f=\ldots$

$e=\ldots$

$k=2^{15}\cdot\ldots$

$f=11^{18}\cdot\ldots$

$e=\ldots$

21103941 (U164736 M1300234)

Gp1

Чистовик

№3

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

ОДЗ: $\sqrt{x+34}>0$ $\Rightarrow x\neq -34$

$\sqrt{x+34}\neq 1$

$x\neq -33$

$x\in(-34;-33)\cup$

$\cup(-33;+\infty)$

$x+34>0$

$x>-34$

$(x+4)^2>0$

$\Rightarrow x\neq -4$

$\begin{cases}\sqrt{2x+23}>0\\ -x-4>0\\ \sqrt{2x+23}\neq 1\end{cases}$

$\begin{cases}2x+23>0\\ \sqrt{x+34}>0\\ \sqrt{x+34}\neq 1\end{cases}$

$\begin{cases}x+34>0\\ (x+4)^2>0\\ (x+4)^2\neq 1\end{cases}$

$\begin{cases}x>-\frac{23}{2} \quad (-11{,}5)\\ x<-4\\ 2x+23\neq 1;\ 2x\neq -22\\ x\neq -11\end{cases}$

$x\in(-11{,}5;-11)\cup(-11;-4)$

$\begin{cases}x>-34\\ x\neq -4\\ x+4\neq \pm 1;\\ x\neq -5;-3\end{cases}$

$\begin{cases}x>-\frac{23}{2}\\ x>-34\\ x\neq -33\end{cases}$

$x\in(-34;+\infty)\setminus\{-3;-4;-5\}$

$\Rightarrow x\in(-\frac{23}{2};+\infty)$

$\Rightarrow \begin{cases}x\in(-\frac{23}{2};+\infty)\\ x\in(-34;+\infty)\setminus\{-3;-4;-5\}\\ x\in(-11{,}5;-11)\cup(-11;-4)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-11{,}5;-11)\cup(-11;-5)\cup$
$\cup(-5;-4)$

$\Rightarrow$ Пусть $\alpha=2x+23;\ \beta=x+34,\ \gamma=-(x+4)$, тогда числа равны

$2\log_\beta\alpha$, $\frac{1}{2}\log_\gamma\beta$, $2\log_\alpha\gamma$

Чистовик

№3.

Дано:

$\triangle ABC \in \omega(O;R)$

$\omega_2(O_2, R_2) \ni \triangle AOC$

$\omega_2 \cap BC = P$

AT, CT - касат к ω

$TP \cap AC = K$

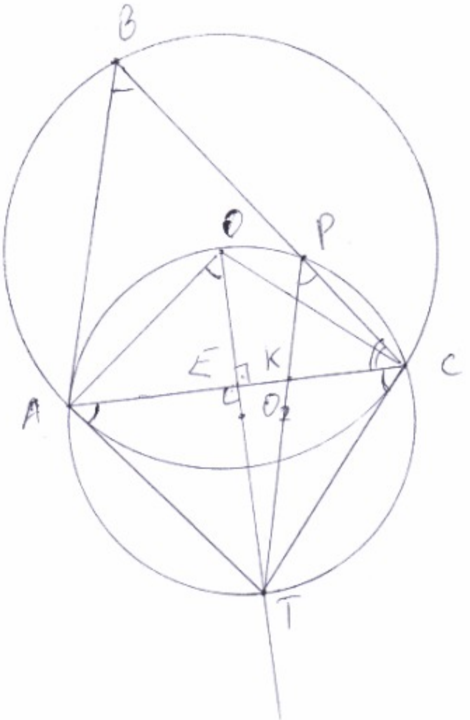
$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

а) $S_{ABC} = ?$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{4}{7}$

$AC = ?$



1) $\triangle ABC \in \omega \Rightarrow$ т. O лежит на серпере AC

2) $\triangle AOC \in \omega_2 \Rightarrow$ т. O_2 лежит на серпере AC

$\Rightarrow OO_2$ ~~хх~~ - серпер к AC ; $OO_2 = R_2$

3) $\triangle AOC \in \omega_2 \Rightarrow O_2$ лежит на серпере к OA, OC

$AT \perp OA$

$CT \perp OC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ серперы к OA и OC $\parallel AT$ и CT соотв $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_2T}{OO_2} = \frac{CX}{XO}$, где X - осн. серпера к OC

$\frac{CX}{XO} = 1$

$\Rightarrow O_2T = OO_2 = R_2 \Rightarrow T \in \omega_2$, OT - диаметр ω_2

4) $\angle TAC = \angle TPC$ (как впис. $\angle$)

$\angle TAC = \angle ABC$ (угол между кас. и хордой) $\Rightarrow \angle ABC = \angle TPC$

$\angle ACB$ - общ

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по 2м $\angle$)

Стр 3

Чистовик

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2.$$

$$\left.\begin{aligned} &S_{CPK} = \frac{1}{2}h\cdot KC = 13 \\ &S_{APK} = \frac{1}{2}h\cdot AK = 15 \\ &S_{APC} = S_{APK} + S_{CPK} = 28 = \frac{1}{2}h\cdot AC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{28}{13}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = S_{CPK}\cdot\left(\frac{28}{13}\right)^2 = 13\cdot\frac{28^2}{13^2} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$$

б) 5) Пусть $\angle ABC = \alpha$.

$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{4}{7}$; $\quad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{49}}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{65}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$

$AT = 2R_2\cdot tg\,\alpha$ $\left(\angle AOT = \underset{(впис)}{\angle ACT} = \underset{(между\ хорд\ и\ касат)}{\angle ABC} = \alpha\right)$

$(\angle OAT = 90^\circ$, т.к. OT – диаметр$)$

$AT = \frac{8}{7}R_2$.

$\Rightarrow$ 6) $AC \cap OT = E$. $\quad AC \perp OT$

$\Rightarrow AE = EC = \cancel{R_2}\ AT\cdot\cos\alpha = R_2\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{8}{\sqrt{65}}R_2$.

$\Rightarrow AC = \frac{16}{\sqrt{65}}R_2$.

$\Rightarrow KC = \frac{13}{28}AC = \frac{13}{28}\cdot\frac{16}{\sqrt{5\cdot 13}}\cdot R_2 = \frac{52}{7\sqrt{65}}R_2$

7) ~~По т. sin $\triangle CPK$~~

$\cancel{\frac{KC}{\sin\alpha} = 2R_2}$ $\quad \cancel{\frac{S_{ABC}}{S}}$

$ET = AT\cdot\sin\alpha =$

21103941 (U164736 M1300234)

GP4

Чистовик

$AT = 2R_2 \cdot \sin\alpha = 2R_2 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{8R_2}{\sqrt{65}}$.

$ET = \cancel{2R_2}\ AT \cdot \sin\alpha = \cancel{A}\frac{8R_2}{\sqrt{65}} \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{32R_2}{65}$.

$\Rightarrow OE = 2R_2 - \frac{32R_2}{65} = \frac{130 - 32R_2}{65} = \frac{98R_2}{65}$.

$\cancel{OP}\ \cancel{R}\ \frac{OT}{ET} = \frac{OP}{EK} \Rightarrow OP = EK \cdot \frac{\cancel{2R_2} \cdot 65}{\cancel{32R_2}_{16}} = \frac{65}{16} EK$.

$\Rightarrow PT = \sqrt{\cancel{OP^2} - 4R_2^2 - OP^2}$

$EK = AC - KC - AE = \frac{AC}{2} - KC. = \frac{AC}{2} - \frac{13}{28}AC =$

$= \frac{1}{28}AC. =$

$AE = \frac{AC}{2} = AT\cos\alpha = \frac{8R_2}{\sqrt{65}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{56R_2}{65}$

$AC = \frac{112R_2}{65}$

$\Rightarrow EK = \frac{1}{28} \cdot \frac{112R_2}{65} = \frac{4 \cdot \cancel{28}R_2}{\cancel{28}65} = \frac{4}{65}R_2$

$\Rightarrow OP = \frac{4}{65}R_2 \cdot \frac{65}{16\cancel{R}} = \frac{R_2}{4}$

$\Rightarrow PT = \sqrt{4R_2^2 - \frac{R_2^2}{16}} = \frac{R_2}{4}\sqrt{64-1} = \frac{R_2\sqrt{63}}{4}$

$\cancel{\frac{KT}{PK}} = \quad \cancel{\frac{AK}{K}}\ AK \cdot KC = PK \cdot \cancel{PT}\ KT.$

$AK = \frac{112R_2}{65} - \frac{13}{28}AC =$

21103941 (U164736 M1300234)

Стр 5