Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103878**

ID профиля: **853240**

Вариант 23

Шеговик.

① $S_6 = S$ $\quad \begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S+39 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+55 \end{cases}$ $\quad (a_n)$ · возрастающая

a_1 - ? $\quad a_n$ - целое

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$$\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2 + 24a_1d + 135d^2 > S+39 \\ a_{11} \cdot a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < S+55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 - S > 39 + 5d^2 \\ a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 - S < 55 \end{cases} \Rightarrow \quad 39 + 5d^2 < 55$$

$5d^2 < 16$

$d^2 < 3{,}2$

$|d| < \sqrt{3{,}2} < \sqrt{4} < 2$

т.к. a_n - целое, то $d = 1$

$$S = S_6 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2a_1 + 1 \cdot 5}{2} 6 = 6a_1 + 15$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a + 140 - 6a_1 - 15 - 39 - 5 > 0 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 - 6a_1 - 15 - 55 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \\ (a_1+9)^2 - 11 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \\ (a_1+9)^2 < 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 9 \neq 0 \\ |a_1+9| < \sqrt{11} < \sqrt{16} < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \neq -9 \\ -4 < a_1 + 9 < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \neq -9 \\ -13 < a_1 < -5 \end{cases}$$

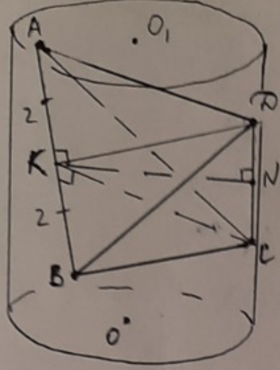
$\Downarrow$

$a_1: -12, -11, -10, -8, -7, -6$

Ответ: целые a_1 : $-12; -11; -10; -8; -7; -6$

Чистовик.

2



Дано: $AB = 4$, $AC = BC = 6$, $AD = DB = 7$, $DC \parallel OO_1$

Найти: CD при $R_{наим}$

Решение:

1. Проведу в равнобедренных $\triangle ABD$ ($DB = AD$) и $\triangle ABC$ ($AC = BC$) медианы DK и CK соответственно. Они будут являться также высотами треугольников. Следовательно, $AB \perp DK$, $AB \perp CK$.

Т.к. AB перпендикулярна 2м пересекающимся прямым, то она перпендикулярна всей плоскости, т.е. $AB \perp (DCK)$, а значит и всем прямым, содержащимся в ней $\Rightarrow AB \perp DC$.

2. Т.к. $DC \parallel OO_1$, $OO_1 \perp$ основанию цилиндра $\Rightarrow AB \parallel$ основанию цилиндра.

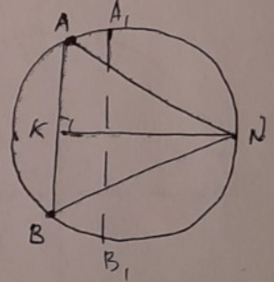
Построю плоскость α, проходящую через AB, параллельно основанию цилиндра и перпендикулярно DC

Так, α пересекает DC в точке N и соответственно $KN \perp DC$

3. Т.к $\triangle ADC = \triangle BDC$ (по 3м сторонам), то их высоты AN и BN тоже равны. Следовательно $\triangle ABH$ - равнобедренный.

Тогда радиус окружности будет наименьшим, если AB будет диаметром.

Тогда $R = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$.



Чистовик.

③ $M = \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 8 & (1) \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a+4b, 8) & (2) \end{cases}$

Найти: S_M

Решение:

(1) Круг с центром $Q(a;b)$ и $R = \sqrt{8}$

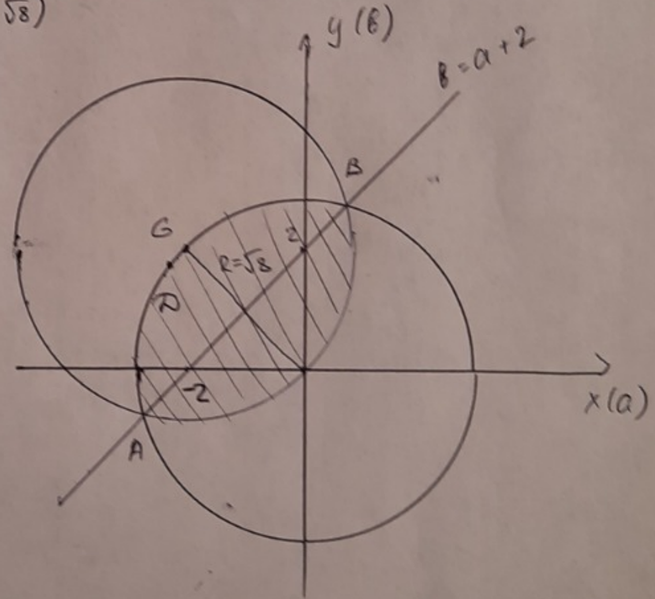
(2) задаёт область D на плоскости, где лежат всевозможные точки $Q(a;b)$. Построю D, где $a = x$, $b = y$:

1) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4a+4b \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \end{cases} \\ \begin{cases} -4a+4b > 8 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \le a+2 \\ a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8 \end{cases} \\ \begin{cases} b > a+2 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \le a+2 \\ (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \end{cases} \leftarrow \text{круг } (G(-2;2),\ R=\sqrt{8}) \\ \begin{cases} b > a+2 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \leftarrow \text{круг } (O(0;0),\ R=\sqrt{8}) \end{array} \right.$

Точки пересечения:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = a+2 \\ (a+2)^2+a^2 = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} b = a+2 \\ a^2+(a+2)^2 = 8 \end{cases} \end{array} \right) \Rightarrow A \text{ и } B$



$a^2+a^2+4a+4 = 8$

$2a^2+4a-4 = 0$

$a^2+2a-2 = 0$

$D = 4+8 = 12$

$a_{12} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

$b_{12} = 1 \pm \sqrt{3}$

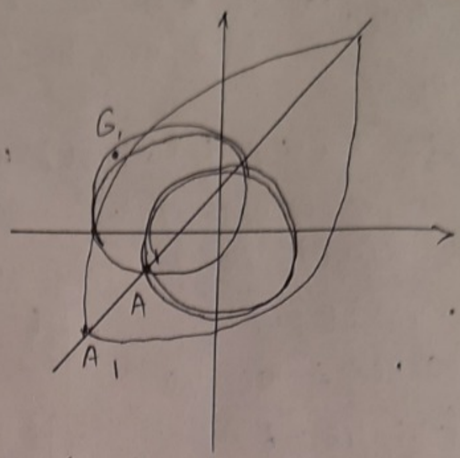
$A(-1-\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3})$

$B(-1+\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3})$

чистовик.

Область D - область ограниченная дугами AGB и AOB

$\boxed{D(AGBO)}$



Круги (1) с центрами в этой области D занимают область фигуры $M(A_1 G_1 B_1 O_1)$, состоящую из 2х равных областей $S_1 = (A_1 G_1 B_1 B)$ и $S_2\ (A_1 O_1 B_1 B)$ $AA_1 = BB_1 = GG_1 = OO_1 = \sqrt{8}$

Область $A_1 G_1 B_1 B$ - часть круга с центром $O(0;0)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103878**

ID профиля: **853240**

Вариант 23

Чистовик.

(4) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 \\ НОК(a,b,c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$ кол-во (a,b,c) - ?

a, b, c - натуральные

1. $a = 2^k \cdot 11^n$; $b = 2^m \cdot 11^p$, $c = 2^r \cdot 11^s$

$\max(k,m,r) = 16$ $\max(n,p,s) = 19$

$\min(k,m,r) = 1$ $\min(n,p,s) = 1$

2. Пусть $k_{min} = 1$, $r_{max} = 16$, m = от 2 до 15, Итого : 14 комбинаций.

Всего можно составить из k, r, m $3! = 6$ комбинаций.

Итого : $14 \cdot 6 = \underline{84}$

Если $m = 1$, $k = 1$, $r = 16$, то их перестановок 3.

Если $m = 16$, $k = 1$, $r = 16$, то их перестановок 3.

Всего получается : $84 + 3 + 3 = \underline{90}$

3. Пусть $n_{min} = 1$, $s_{max} = 19$, p = от 2 до 18, Итого : 17 комбинаций

Всего можно составить из n, p, s $3! = 6$ комбинаций

Итого $17 \cdot 6 = \underline{102}$

Если $p = 1$, $n = 1$, $s = 19$, то их перессановок 3

Если $p = 19$, $n = 1$, $s = 19$, то их перестановок 3

Всего получается : $102 + 3 + 3 = \underline{108}$

Всего упорядоченных троек : $90 \cdot 108 = 9180$

Чистовик.

5 ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+23>0 \\ -x-4>0 \\ x+34>0 \\ \sqrt{x+34}\neq 1 \\ (x+4)^2\neq 1 \\ \sqrt{2x+23}\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-11,5 \\ x<-4 \\ x>-34 \\ x\neq -33 \\ x\neq -5 \\ x\neq -3 \\ x\neq -11 \end{cases} \quad \begin{cases} -11,5\leq x<-4 \\ x\neq -5 \\ x\neq -11 \end{cases}$$

$a=\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$; $b=\log_{(x+4)^2}(x+34)$; $c=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

I. $a=b$, $c=a+1=b+1$

II. $a=c$, $b=a+1=b+1$ $\quad x-?$

III. $b=c$, $a=b+1=c+1$

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\ln(2x+23)}{\ln(x+34)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\ln(2x+23)}{\ln(x+34)}=\frac{2y}{z} \\ b&=\frac{\ln(x+34)}{\ln(-x-4)^2}=\frac{\ln(x+34)}{2\ln(-x-4)}=\frac{z}{2p} \\ c&=\frac{\ln(-x-4)}{\ln(2x+23)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\ln(-x-4)}{\ln(2x+23)}=\frac{2p}{y} \end{aligned}\right\} \to \text{где} \quad \begin{aligned} y&=\ln(2x+23) \\ z&=\ln(x+34) \\ p&=\ln(-x-4) \end{aligned}$$

I сл. $\begin{cases} a=b \\ c=b+1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2y}{z}=\frac{z}{2p} \\ \frac{2p}{y}=\frac{z}{2p}+1 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=4py \\ 4p^2=y(z+2p) \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=4py \\ 4p^2=yz+2yp \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{2y}{z} \\ b&=\frac{z}{2p} \\ c&=\frac{2p}{y} \end{aligned}\right\} abc=2$$

I. $\begin{cases} a=b \\ c=b+1 \end{cases}$ $\quad b^2(b+1)=2$

$b^3+b^2-2=0$

$b=1$, $\quad b^3-b^2+b^2-b+2b-2=0$

$b^2(b-1)+b(b-1)+2(b-1)=0$

$(b-1)(b^2+b+2)=0$

$b=1$ или $b^2+b+2=0$

$D<0$

корней те

$a=1$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$

$2x+23=\sqrt{x+34}$

$x+34=4$

Чистовик

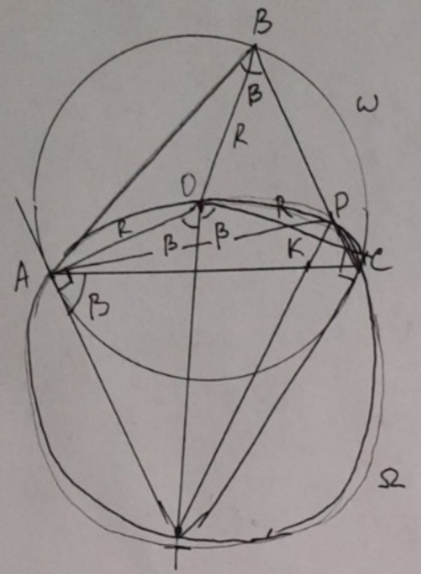
6

$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

Найти: а) S_{ABC}

Решение:



т.к. AT и CT - касательные к окружности ω то $\angle OAT = \angle OCT = 90°$.

Следовательно, △OAT и △OCT - прямоугольные, а значит около них можно описать окружность с диаметром OT. Эта окружность описана около △AOC. Назовём её Ω