Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103810**

ID профиля: **309238**

Вариант 23

№1 чистовик Вар 23. Лист №1

S-сумма арифм. прог. тогда

$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; где d-знаменатель арифм. прог. n - количество элементов

a_1 - первый элемент, тогда: ~~т.к.~~

Так как все элементы прогрессии целые, то $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ - целые и d-целое. и ~~$d>0$~~; $d \neq 0$ (т.к последовательность возрастающая).

$a_{10} \cdot a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+24a_1d+135d^2$

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+24a_1d+140d^2$

$S_6 = \frac{a_1+a_1+5d}{2} \cdot 6 = 6a_1+15d.$

Тогда т.к.

$\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S+39 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+55 \end{cases}$, то справедливо

$\begin{cases} a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39 \\ a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55. \end{cases}$

$5d^2 < 16$ (отняв из 2-го неравенства первое) $\Rightarrow$ $d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow d < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ тогда т.к. d - целое $\frac{4}{\sqrt5} < 2$; т.к.

$4 < 2\sqrt5$

$2 < \sqrt5$ $\Rightarrow$ $d>0$; $d<2$; d - целое $\Rightarrow$

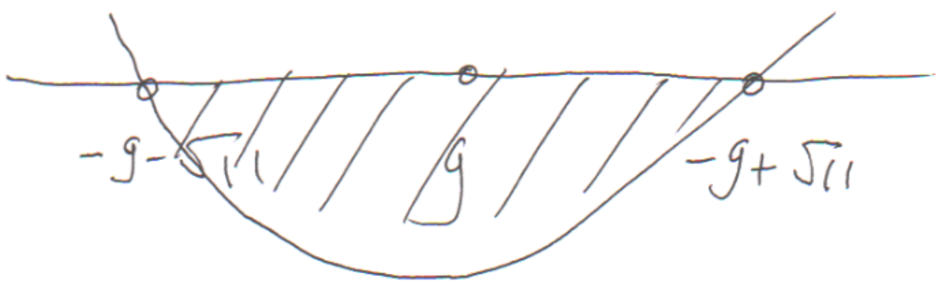
$\Rightarrow d=1$

подставим $d=1$ в $\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S+39 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+55 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 \geq 6a_1 + 15 + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 \geq 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+9)^2 \geq 0 \Rightarrow a_1 \neq -9 \\ (a_1 + 9 + \sqrt{11})(a_1 + 9 - \sqrt{11}) < 0 \end{cases}$$



$a_1 \in (-9-\sqrt{11}; 9) \cup (9; -9+\sqrt{11})$, т.к.

a_1 - целое, то оценим $-9-\sqrt{11}$ и $-9+\sqrt{11}$

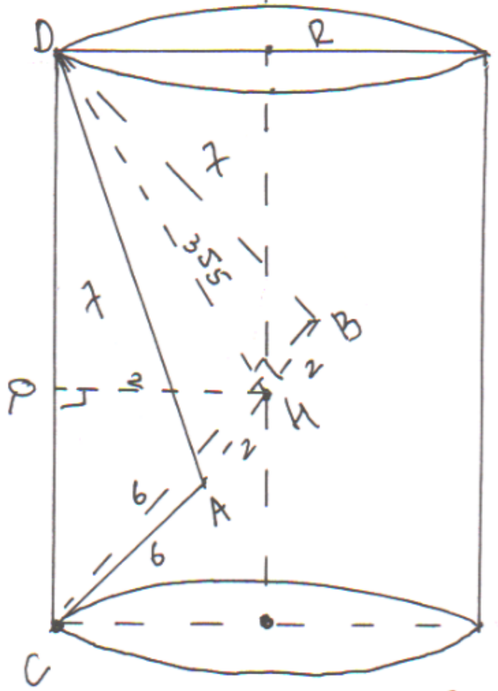
$3 < \sqrt{11} < 4 \Rightarrow -3 > -\sqrt{11} > -4 \Rightarrow -9-\sqrt{11} < -12$; $-9+\sqrt{11} < -6$

Ответ: $\{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

№2

Дано:
AB=4
AC=CB=6
AD=DB=7
ABCD - тетраэдр.
CD ∥ оси цилиндра

CD - ?



1) т.к. CD∥ оси цилиндра и все вершины лежат на боковой стороне, тогда CD лежит на боковой стороне ⊥ основанию цилиндра

2) По условию задачи, т.к. все вершины опираются на боковую сторону и радиус цилиндра - минимальный, тогда $2R = AB \Rightarrow$
$\Rightarrow R = \frac{AB}{2} = 2$.

3) Рассмотрим $\triangle ADB$ и $\triangle CAB$:
В этих треугольниках проведем высоты DH и CH_1 соответственно (тогда т.к. эти $\triangle$ равноб. (по усл $AC=CB$; $AD=BD$), то тогда $AH=HB$: H - середина AB и H_1 - середина $AB \Rightarrow$
$\Rightarrow$ H и H_1 совпадают.

По теореме Пиф. в $\triangle ADH$:
$AD^2 = AH^2 + HD^2$; $HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$.

По теореме Пиф. в $\triangle CAH$:

$AC^2 = AH^2 + CH^2$; $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$

4). Т.к. точка H - середина AB, ~~и AB~~ тогда точка H - лежит на оси цилиндра (т.к. ось цилиндра проходит через середину AB). Тогда из точки H проведем $HQ \perp CD$.
$\Rightarrow$ т.к. $HQ \perp CD$, то $\angle DKH = 90° \Rightarrow$ т.к. $CD \perp$ основанию цилиндра, то $HQ \parallel$ основанию цилиндра (т.к. соответственные углы равны) $\Rightarrow QH = R = 2$.

5) По теореме Пифагора в $\triangle DHQ$:

$DH^2 = HQ^2 + DQ^2 \Rightarrow DQ = \sqrt{DH^2 - HQ^2} = \sqrt{45 - 4} = \sqrt{41}$

По теореме Пифагора в $\triangle CQH$:

$CH^2 = HQ^2 + QC^2 \Rightarrow QC = \sqrt{CH^2 - HQ^2} = \sqrt{32 - 4} = 2\sqrt{7}$.

$\Rightarrow CD = QC + QD = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{41}$.

21103810 (U309238 M1301591)

лист 5 черновик

Т.к. посл. состоит из целых чисел,

то и d, тоже целое $\Rightarrow$

$d=1$; ~~$d \neq 1$~~. т.к. $d < \frac{4}{\sqrt{5}}$ $\left(\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}78\right)$

Тогда

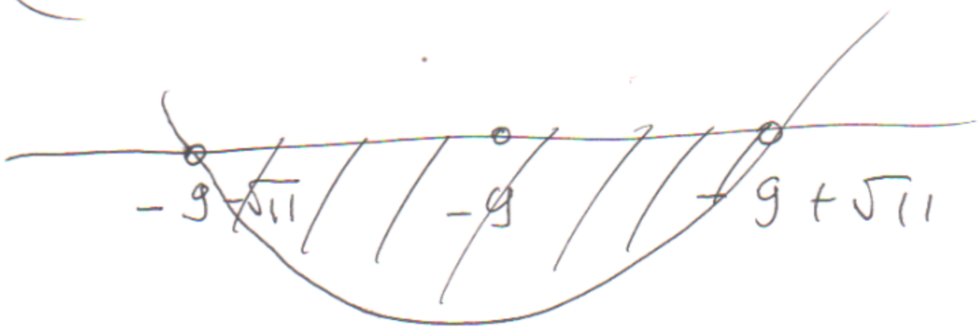
$a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+15+39$

$a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+15+55$

$a_1^2+18a_1+81 > 0$. $a_1 \neq -9$.

$a_1^2+18a_1+70 < 0$.

$(a_1+9+\sqrt{11})(a_1+9-\sqrt{11})$



$a_1 \in (-9-\sqrt{11};-9) \cup (-9;-9+\sqrt{11})$

Т.к. a_1 — целое, то $a_1 = \{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$.

21103810 (U309238 M1301591)

черновен листо

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2}\cdot 6 = (2a_1 + 5d)\cdot 3 = 6a_1 + 15d$$

$$a_{10}\cdot a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) = a_1^2 + 24a_1d + 135d^2$$
$$a_{11}\cdot a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d = a_1^2 + 24a_1d + 140d^2$$
$$a_1^2 + 24a_1d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$$
$$a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55$$

$$5d^2 < 16$$

$$d < \frac{4}{\sqrt5}$$

$$0 < d < \frac{4\sqrt5}{5}$$; т.к. посл. возр.

$$\cancel{a_1^2 + a_1(24d-6) + 135d^2 - 15d - 39 > 0}$$
$$\cancel{a_1^2 + a_1(24d-6) + 140d^2 - 15d - 55 < 0}$$
$$D = \cancel{24d^2}$$

$$S = 6a_1 + \underbrace{15d}_{(15;\,12\sqrt5)}$$

$$a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 - 6a_1 - 15d - 55 < 0$$

$$D = (24d-6)^2 - 4(140d^2 - 15d - 55) =$$

$$= 16d^2 - 228d + 256 =$$

$$\left(d - \frac{57 - 5\sqrt{89}}{8}\right)\left(d - \frac{57 + 5\sqrt{89}}{8}\right)$$ 1,22 13,02

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103810**

ID профиля: **309238**

Вариант 23

черновик лист №1

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{x+34}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$= \log$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$2 \quad 7$

$44 = 2 \cdot 11$

$88 = 4 \cdot 11$

НОД $(a;b;c) = 22$

НОК $(a;b;c) = 2^{16} \cdot 19^{19}$

$2 \cdot 11^{18}$

$+\,16 \cdot 19 \cdot 3$

$15 \cdot 18 \cdot 3$

$+\,15 \cdot 18 \cdot 6$

$14 \cdot 17 \cdot 6$

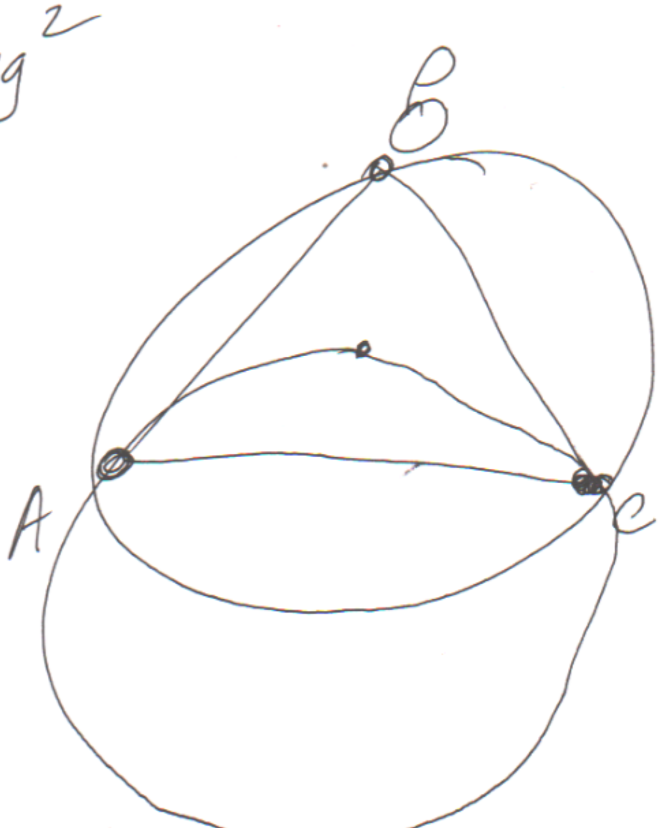
$=$

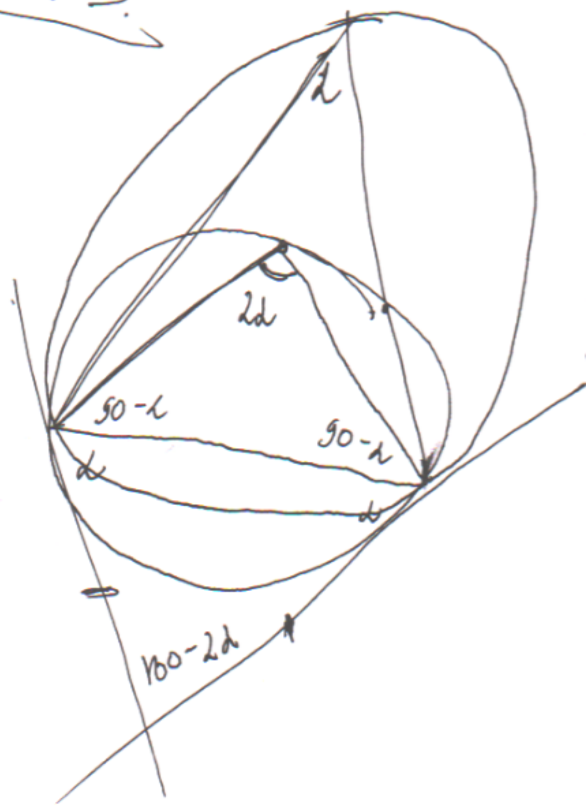
$6($

22

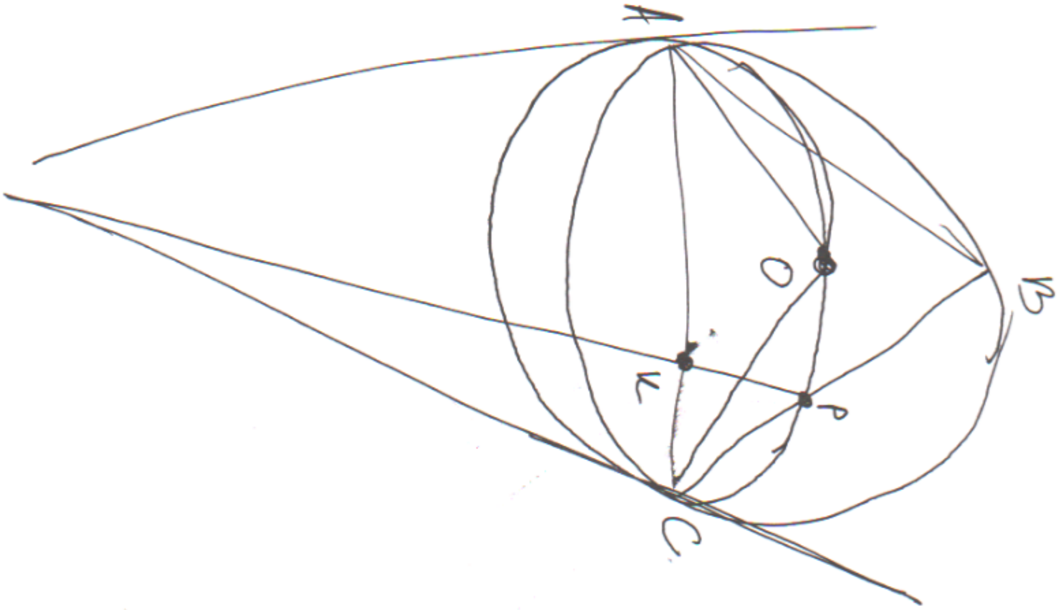
$2 \cdot 11 \quad 2 \cdot 11 \quad 2^{16} \cdot 11^{19}$

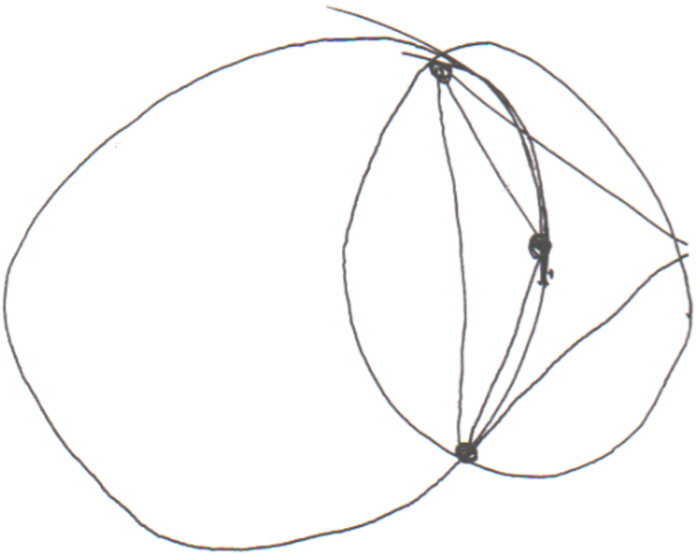
$16^2 \cdot 19^2$





черновен лист №2





21103810 (U309238 M1301592)

черновик
лист №3

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_a b^2$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{c^2} a^2 = \log_c a$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \log_b c$

$\log_a b^2$

$\left.\begin{matrix}\log_c a \\ \log_b c\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}\log_c a = \log_b c \\ \log_c a - \dfrac{1}{\log_c b} = 0\end{matrix}$

$\log_c a + \log_b c = \log_a b^2$

21103810 (U309238 M1301592)

черновик лист №4

$a \,/\, b \; c \longrightarrow 16^{x} \cdot 19^{x} \cdot 3.$

$22 \,\big\lfloor\, 16 \cdot 19$

a

16

$22 \quad \underline{2}^{16} \cdot 11^{19} \quad \underline{2 \cdot} 11^{k}$

$44 \quad \underline{2 \cdot 11}^{16 \; 19} \quad \underline{2 \cdot 11}^{k}$

$18 \cdot 15 \cdot 3$

$16 \cdot 19 \cdot 3 + 18 \cdot 15 \cdot 3.$

$\log_a b^2$

$\log_a b = 2\log_b a$

$\log_{c^2} \cancel{a}^{2}$

$\log_a b = \pm\sqrt{2}.$

$\log_b a$

21103810 (U309238 M1301592)

чистовик вар 23 лист №1

№4

1) НОД $(a;b;c)=22 \Rightarrow a \vdots 22;\ b \vdots 22;\ c \vdots 22;$

$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots 2 \\ a \vdots 11 \end{cases};\ \begin{cases} b \vdots 2 \\ b \vdots 11 \end{cases}\ \begin{cases} c \vdots 2 \\ c \vdots 11 \end{cases}$

Тогда числа a, b, c имеют вид

$\left.\begin{aligned} a &= 2^{x_1} \cdot 11^{y_1} \\ b &= 2^{x_2} \cdot 11^{y_2} \\ c &= 2^{x_3} \cdot 11^{y_3}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ найдутся такие x_i и y_j где

$x_i = 1;\ y_i > 1$

$y_j = 1;\ x_j > 1$

2) НОК $(a;b;c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \Rightarrow a;b$ или $c = 2^{16} \cdot 2^{19}$,

т.к. НОД $(a;b;c)=22 \Rightarrow$ все эти числа имеют общий множитель 22.

Тогда рассмотрим случай

① $2^{x};\ 2^{1};\ 2^{16};$

$\left.\begin{aligned} &\text{Для } x=1 \text{ ; 3 варианта} \\ &\text{Для } x \in [2;15]\ 14 \cdot 6 = 84 \text{ вар} \\ &\text{Для } x = 16 \text{ : 3 варианта} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ всего $84+3+3=90$ вар

~~всего~~ да

② $11^{y};\ 11^{1};\ 11^{19}$

21103810 (U309238 M1301592)

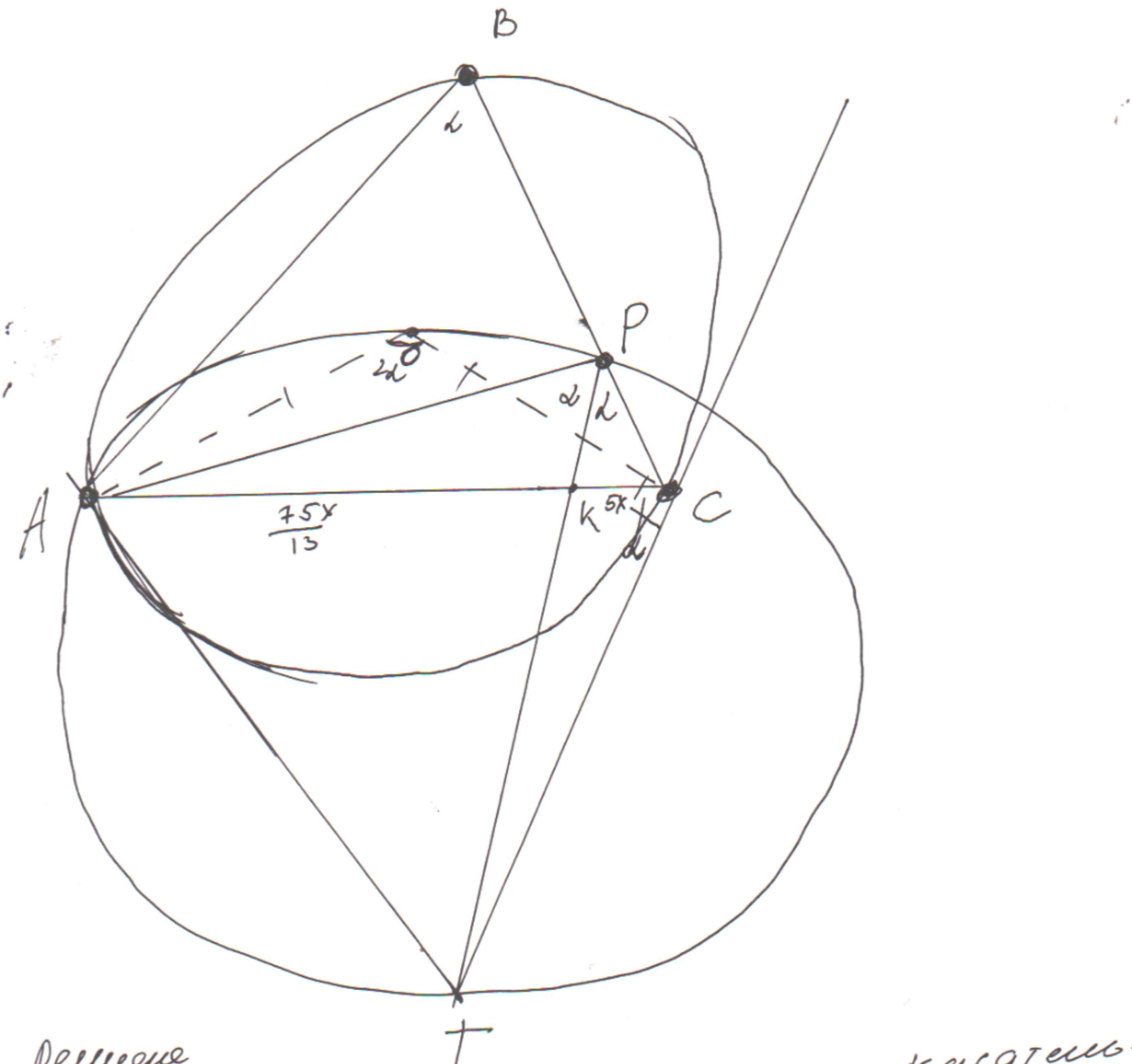
Для $y=1$; 3 вар.

$\left.\begin{aligned} &\text{Для } y \in [2;18]\ 6 \cdot 17 = 102 \text{ вар} \\ &\text{Для } y = 19 \quad 3 \text{ вар} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 102+6=108 \Rightarrow$ Ответ: 9720

всего вариантов: ...

чистовик вар23 лист №2.

№6.



Решение

1) В △ ACT: т.к. AT = TC (как касательные из одной точки) => ∠TAC = ∠TCA = α

2) Рассмотрим 4-уг AOCT: ∠OAT = ∠OCT = 90° => ∠AOC + ∠ATC = 180° => вокруг AOPCT можно описать окр. => они лежат на одной окружности => ∠ATC = 180° − 2α; ∠AOC = 2α => ∠APT = ∠ACT = α (как углы опираются на одну дугу. Аналогично для

$\angle TPC = \alpha \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{15}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = \frac{15}{13} PC$; Пусть $PC = x$,

3) $\angle APB = 180 - 2\alpha = \angle ATC$, $\angle ABC = \frac{1}{2} AC =$

$= \frac{1}{2} \angle AOC = \alpha \Rightarrow \angle BAP = \alpha$, тогда $\triangle ABP \sim$

$\triangle ACT$ по 2-м углам.

4) $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{15}{13} \Rightarrow AK = \frac{15}{13} KC$

5) $S_{\triangle ABP} = \frac{BP \cdot AP \cdot \sin(180 - 2\alpha)}{2} = \frac{\frac{225}{169} x^2 \cdot \sin 2\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ т.к. $S_{\triangle APC} = \frac{\frac{15}{13} x \cdot x \cdot \sin 2\alpha}{2} = 15 + 13 = 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABP} = \frac{15}{13} \cdot S_{\triangle APC} = \frac{28 \cdot 15}{13} \Rightarrow S_{\triangle ABC} =$

$= 28 + \frac{28 \cdot 15}{13} = \frac{28 \cdot 28}{13} = 60 \frac{4}{13}$.

Ответ: а) $60 \frac{4}{13}$.

6). $\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{7}$

По теореме синусов $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$

7) $\frac{AT}{AO} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow AT = \frac{4}{7} AO = \frac{4}{7} R$

$\angle ACP = 90 - \alpha$; $\angle CPK = \alpha \Rightarrow \angle PKC = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow PK$ высота $\Rightarrow$ т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7} = \frac{KC}{KP} \Rightarrow KP =$

$= \frac{7}{4} KC$.

чистовик лист А4 вар 23

№7 (продолжение)

10) $S_{\triangle KPC} = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot KC = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} KC^2 \Rightarrow KC = \sqrt{\frac{8 \cdot 13}{7}} =$

$= \frac{4\sqrt{26}}{\sqrt{7}} \Rightarrow AC = \frac{190}{23} \cdot \frac{4\sqrt{26}}{7} = \frac{760\sqrt{182}}{161}$

21103810 (U309238 M1301592)