Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103755**

ID профиля: **326983**

Вариант 23

ВАРИАНТ 23. Часть 1. 11 класс.
Чистовик. №1.

Прогрессия целая и возр. $\Rightarrow a_i \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$ (т.к. $a_i - a_{i-1} = d$), и $d \geq 1$.

$\overline{a_{10} a_{16}} = (a_{13}+3d)(a_{13}-3d) = a_{13} - 9d^2 > S + 39 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{13} > S + 39 + 9d^2$ (1)

$\overline{a_{11} a_{15}} = (a_{13}+2d)(a_{13}-2d) = a_{13} - 4d^2 < S + 55 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{13} < S + 55 + 4d^2$ (2)

Из (1) и (2): $S + 39 + 9d^2 < a_{13} < S + 55 + 4d^2$

$9d^2 < 16 + 4d^2$

$5d^2 < 16$

$d < \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \sqrt{3.2}$

$1 = \sqrt{1} < \sqrt{3{,}2} < \sqrt{4} = 2$

Т.к. $d \geq 1$ $\left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=2 \end{array}\right.$

I) $d=1$, $a_{13} = a_1 + 12d = a_1 + 12$

$S_6 = 6a_1 + 15d = 6a_1 + 15$

Т.к. $a_{13} < S + 55 + 4d^2$, то $a_1 + 12 < 6a_1 + 15 + 55 + 4$

$-62 < 5a_1$

$a_1 > -\frac{62}{5} = -12{,}4$

$a_1 \geq -12$

Т.к. $a_{13} > S + 39 + 9d^2$, то $a_1 + 12 > 6a_1 + 15 + 39 + 9$

$-51 > 5a_1$

$a_1 < -\frac{51}{5} = -10{,}2$

$a_1 \leq -11$

$-12 \leq a_1 \leq -11$ – противоречие

21103755 (U326983 M1299873)

ВАРИАНТ 23. Чистовик

II $d=2$ $\qquad a_{13} = a_1 + 12d = a_1 + 24$

$S_6 = 6a_1 + 15d = 6a_1 + 30$

Т.к. $a_{13} - 9d^2 > S + 39$, то: $a_1 + 24 - 9\cdot 4 > 6a_1 + 30 + 39$

$-81 > 5a_1$

$a_1 < -\frac{81}{5} = -16,2$

$a_1 \leq -17$

Т.к. $a_{13} - 4d^2 < S + 55$, то: $a_1 + 24 - 4\cdot 4 < 6a_1 + 30 + 55$

$-77 < 5a_1$

$a_1 > \frac{-77}{5} = -15,4$

$a_1 \geq -15$

$-15 \leq a_1 \leq -17$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a_1 = -15 \\ a_1 = -16 \\ a_1 = -17 \end{array}\right.$.

№3.

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 8 \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$

Переформулируем условие задачи: надо построить все значения параметров x и y, при которых система имеет хотя бы одно решение и найти площадь этой фигуры.

Построим в BOA: $a^2+b^2 \leq \min(-4a+4b, 8)$

$\left[\begin{array}{l} b-a \geq 2,\ a^2+b^2 \leq 8 \\ b-a < 2,\ (a+2)^2 + (b-2)^2 \leq 8 \end{array}\right.$

Получаем 2 склеенных одинаковых сегмента. Пусть крайние точки, леж. на $b-a=2$ будут P и K, А центры кругов O и Q; $O(0;0)$; $Q(-2;2)$.

Найдём коорд P и K: $\begin{cases} b-a=2 \\ a^2+b^2=8 \end{cases}$

$a^2 + a^2 + 4a + 4 = 8$

$(a^2+1) = 3$

$\begin{cases} a = -1 \pm \sqrt{3} \\ b = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow P(-1+\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$

$K(-1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$ $\quad$ лист 2

ВАРИАНТ 23 Чистовик

~~$\overrightarrow{OP}\{-1+\sqrt{3}+2;\ 1+\sqrt{3}-2\}$~~ $\angle\alpha = \angle KOP$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OK} = |\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OK}|\cos\alpha = (-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) =$$
$$= -\sqrt{3}^2 + 1 + 1 - \sqrt{3}^2 = -4$$

$$\cos\alpha = \frac{-4}{(-1+\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} = \frac{-4}{8} = -0{,}5$$

$$\alpha = 120^\circ$$

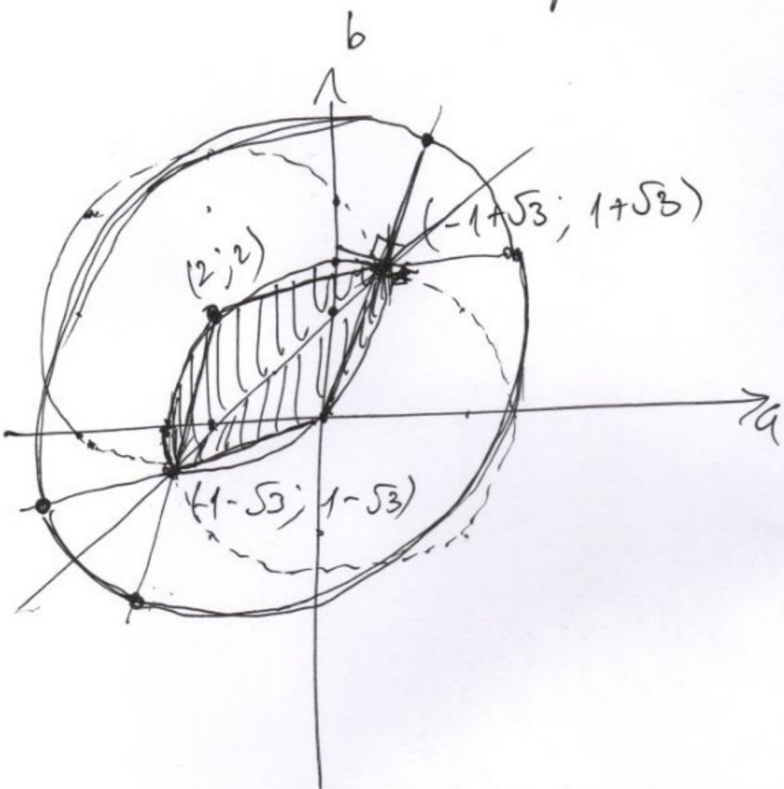
Из рисунка видно, что фигура симметрична относительно $b-a=2$. Искомое множество x, y это центры кругов с $R=\sqrt{8}$, ~~поэтому~~ таких, что с $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b;\ 8)$ есть хотя бы одна общ. точка. Поэтому искомое множество, это два сектора с центрами Q и O с углом α, которые имеют общие треугольники ΔKOP и ΔKQP с радиусами: $\sqrt{8}+\sqrt{8} = 2\sqrt{8}$ и еще 2 малых ~~малых~~ сектора с центрами P и Q радиусами $\sqrt{8}$ и углом $\beta = 180-\alpha = 60^\circ$.

$$S_{\Delta KOP} = \frac{KO\cdot OP}{2}\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8 = 2\sqrt{3} = S_{\Delta KQP}$$

$$S = \pi\cdot(2\sqrt{8})^2\cdot\frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot 2 - 2\sqrt{3}\cdot 2 + 2\cdot\pi\cdot(\sqrt{8})^2\cdot\frac{60^\circ}{360^\circ} =$$

$$= \pi\cdot\frac{64}{3} - 4\sqrt{3} + \pi\cdot\frac{16}{6} = \frac{64\pi + 8\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{72\pi}{3} - 4\sqrt{3} = 24\pi - 4\sqrt{3}$$

Черновик



$x_1x_2+y_1y_2$

$a^2+b^2\le 8$

$b-a=2$

$b=a+2$

$a^2+a^2+4a+4\le 8$

$2a^2+4a\le 4$

$a^2+2a-2\le 0$

$a^2+2a+1\le 3$

$(a+1)^2\le 3$

$a=-1\pm\sqrt3$

$b=1\pm\sqrt3$

$\vec n\cdot\vec m=|n||m|\cos\alpha=$

$=(-1+\sqrt3)(-1-\sqrt3)+(1+\sqrt3)(1-\sqrt3)=$

$=1-3+1-3=-4=|n|^2\cos\alpha$

$|n|^2=\sqrt{(-1+\sqrt3-2)^2+(1+\sqrt3-2)^2}=$

$=(\sqrt3-3)^2+(\sqrt3-1)^2=$

$=3+9-6\sqrt3+3+1-2\sqrt3=$

$=16-8\sqrt3=8(2-\sqrt3)$

$\cos\alpha=\dfrac{-4}{8(2-\sqrt3)}=\dfrac{4}{(\sqrt3-1)}$

$(+1+\sqrt3)(+1+\sqrt3)=1+\sqrt3-3-\sqrt3=$

$=-2$

$=\cancel{(1^2-(\sqrt3)^2)}$

$=(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)$

$=$

21103755 (U326983 M1299873)

Черновик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases}$$

a, b

$$\left[\begin{array}{l} b-a\ge 2,\ a^2+b^2\le 8\\ b-a<2,\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8\end{array}\right.$$

$4(\min(b-a,2)$

$b=a$ $\quad$ x и y

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases}$$

$2a^2\le 0$

$b=a=0$

$x^2+y^2\le 8$

$4\min(b-a,2)$

$b-a\ge 2$

$b\ge a+2$

если $b>a+2$, то

$a^2+b^2\le 8$

$b-a\le 0$

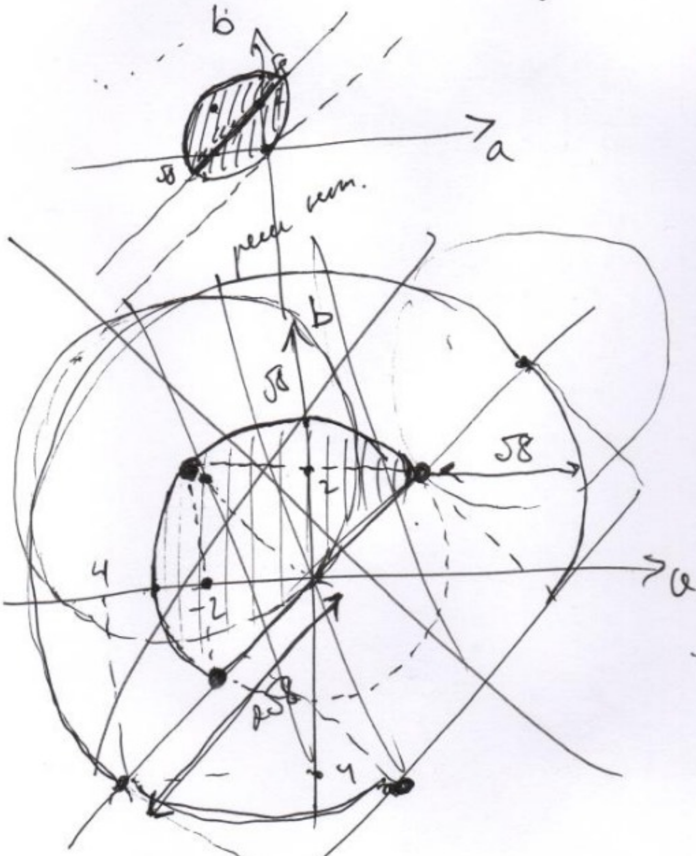
если $0\le b-a<2$,

то

$a^2+b^2\le 4b-4a$

$a^2+4a+b^2-4b\le 0$

$(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$



если $b-a\ge 2$,

то $a^2+b^2\le 8$

если $b-a<2$, то

$(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$

$a^2-2ab+b^2+4a-4b+ab\le 0$

$$\frac{\pi(2\sqrt8)^2}{2}+2\frac{\pi(\sqrt8)^2}{4}+\sqrt8\cdot 2\sqrt8 = 16\pi+4\pi+16=20\pi+16.$$

Черновик

$a_{10} a_{16} > S+39$

$a_{11} a_{15} < S+55$

$a_n - a_k = d(n-1) - d(k-1) = d(n-k)$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$S_6 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d \ldots + a_1 + 5d =$

$= 6a_1 + d(1+2+\ldots 5) = 6a_1 + d\frac{5\cdot6}{2} = 6a_1 + 15d = a_1 + 9d + 5a_1 + 6d = a_{10} + (5a_1 + 6d)$

$a_{10} a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) = a_1^2 + 24da_1 + 9\cdot15d^2$

$\cancel{a_{10} a_{16} = a_{10}(a_1 + 15d) = a_{10}(a_{10} + 6d)}$

$\cancel{a_{11} a_{15} = (a_{10} + d)(a_{10} + 5d) =}$

$a_1^2 + 24da_1 + 9\cdot15d^2 > 6a_1 + 15d$

$24-36$

$-12-69=$

$=-81$

$a_1^2 + 6a_1(4d-1) + 9\cdot15d^2 - 15d$

$15d(9d-1) > 0$

$77\cdot2$

$=154$

$19^2 - 4\cdot9 <$

$400 - 40 + 1 - 36 =$

$= 400 - 75 =$

$= 325$

$\frac{D}{4} = 9(4d-1)^2 - 15d(9d-1) =$

$= 3(3(16d^2 - 8d + 1) - 5d(9d-1)) =$

$= 3(48d^2 - 24d + 3 - 45d^2 + 5d) =$

$= 3(3d^2 - 19d + 3)$

$24-16=$

$=8$

$8-85=$

$=-77$

$\sin(90-\alpha) = -0{,}5$

$\sin(\alpha - 90) = +0{,}5$

$\alpha - 90 = 30^\circ$

$\alpha = 120^\circ$

$a_{10} a_{16}$

$70+4$

$74-12=62$

$a_{15} a_{11} = (a_{10} + d)(a_{16} - d) =$

$a_{10} a_{16} + a_{16}d - d\cdot a_{10} - d^2 =$

$15+11=26$

a_{13}

$= a_{10} a_{16} + d(a_{16} - a_{10}) - d^2 =$

$= a_{10} a_{16} + 6d^2 - d^2 =$

$= a_{10} a_{16} + 5d^2 < S+55$

$-12{,}4 \quad -12$

8

5

3

$S = 6a_1 + 15d = 3(3a_1 + 5d)$

$S + 39 < a_{10} a_{16} < S + 55 - 5d^2$

$a_{13} = a_1 + 12d$

$a_1 +$

$12 -$

$< a_1$

39

15

9

63

-12

51

21103755 (U326983 M1299873)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103755**

ID профиля: **326983**

Вариант 23

Вариант 23. Чистовик.

№4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 2\cdot 11 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

$a\cdot b\cdot c = \text{НОД}\cdot\text{НОК} = 2^{17}\cdot 11^{20}$

Пусть $a = 2^{a_2}\cdot 11^{a_{11}}$, $b = 2^{b_2}\cdot 11^{b_{11}}$, $c = 2^{c_2}\cdot 11^{c_{11}}$,

$\{a_2; b_2; c_2; a_{11}; b_{11}; c_{11}\} \subset \mathbb{N}$, тогда $\begin{cases} a_2+b_2+c_2 = 17 \\ a_{11}+b_{11}+c_{11} = 20 \end{cases}$

$a_2 = 1$, $b_2 = 1$ $c_2 = 15$
$b_2 = 2$ $c_2 = 14$
$b_2 = 3$ $\vdots$ $c_2 = 13$
$b_2 = 15$ $c_2 = 1$ $\} 15$

$a_2 = 2$, $b_2 = 1$ $\vdots$ $c_2 = 14$
$b_2 = 14$ $c_2 = 1$ $\} 14$

$\vdots$

$a_2 = 15$, $b_2 = 1$ $c_2 = 1$ $\} 1$

$\Bigg\} 1+2+\ldots+15 = \frac{15\cdot 16}{2} = 120$

Аналогично для a_{11}, b_{11} и c_{11}: $\frac{19\cdot 18}{2} = 171$

Итого: $120\cdot 171 = 19.520$

Ответ: 19520.

№5.

$$\begin{cases} n = \log_a b^2 = 2\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{2}{m\cdot k} \\ m = \log_{c^2} a^2 = \log_c a \\ k = \log_b c = \frac{1}{\log_c b} \end{cases}, \quad a = \sqrt{x+34},\ b = \sqrt{2x+23},\ c = (-x-4)$$

ОДЗ: $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \\ a\neq 1 \\ b\neq 1 \\ c^2\neq 1 \\ x+34\geq 0 \\ 2x+23\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-34 \\ x>\frac{-23}{2}=-11{,}5 \\ x<-4 \\ x\neq -33 \\ x\neq -22 \\ x\neq -3 \\ x\neq -5 \end{cases}$

$x\in(-11{,}5;-5)\cup(-5;-4)$

I. $\begin{cases} n = \frac{2}{mk} = m+1 \\ m = k \end{cases}$ $\frac{2}{m^2} = m+1$, $m\neq 0$

$m^3+m^2-2=0$

$(m-1)(\underbrace{m^2+2m+2}_{D<0})=0$

$m=1$

$\begin{cases} n=2 \\ m=k=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_a b^2 = 2 \\ \log_c a = 1 \end{cases}$ $a=b\neq c$;

$a^2=b^2$: $x+34=2x+23$

$x=11$,

но тогда $a=b\neq c$,

противоречие.

лист 1

Чистовик

II $\begin{cases} n = \frac{2}{mk} = k \\ m = k+1 \end{cases}$ $\quad \frac{2}{(k+1)k} = k, \; k \neq 0 \neq -1$

$k^3 + k^2 - 2 = 0$

$(k-1)(k^2+2k+2) = 0$

$D < 0$

$k = 1$

$\begin{cases} n = k = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_a b^2 = \log_b c = 1 \\ \log_c a = 2 \end{cases} \Rightarrow a = b^2 = c^2;$

$b^2 = c^2$:

$2x + 23 = (x+4)^2$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$(x-1)(x+7) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x \neq 1, \text{ по ОДЗ} \\ x = -7, \; a \neq b^2 = c^2, \end{array}\right.$ противоречие.

III $\begin{cases} n = \frac{2}{mk} = m \\ k = m+1 \end{cases}$ $\quad \frac{2}{m(m+1)} = m, \; m \neq 0 \neq -1$

$m^3 + m^2 - 2 = 0$

$(m-1)(m^2+2m+2) = 0$

$m = 1$

$\begin{cases} n = m = 1 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_a b^2 = \log_c a = 1 \\ \log_b c = 2 \end{cases} \Rightarrow a = c = b^2$

$b^2 = c$:

$2x + 23 = -x - 4$

$-3x = 27$

$x = -9$

[illegible] $\sqrt{34-9} = 5 =$

$= $ [illegible] $-(-9) - 4 =$

$= 2 \cdot (-9) + 23$

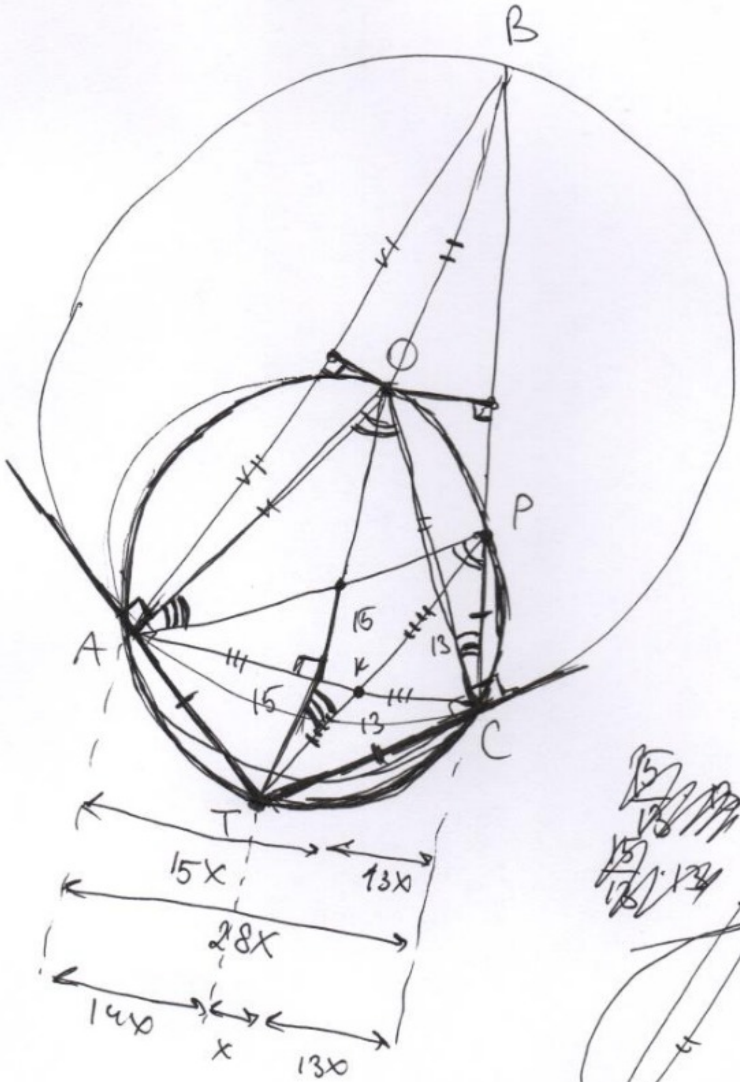
$x = -9$ – подходит.

Ответ: $x = -9$.

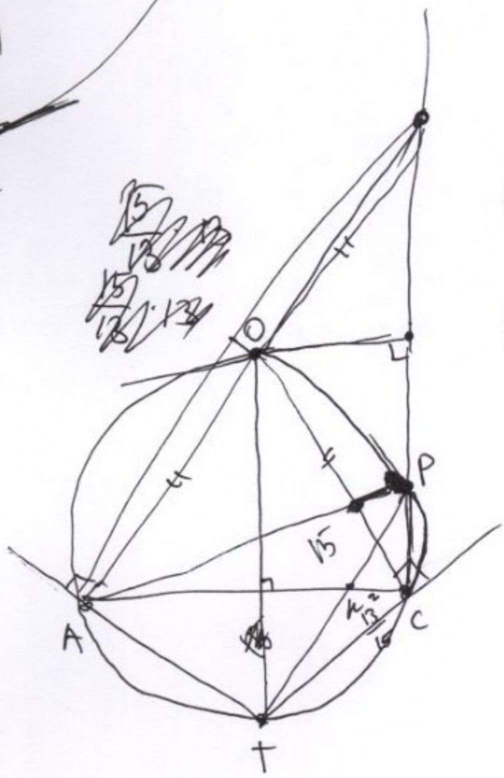
21103755 (U326983 M1299874)

Лист 2.

Черновик



$$\frac{13^2}{15^2}\cdot 15=\frac{13^2}{15}$$

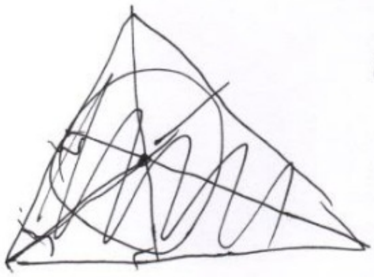


Черновик.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 22 = 2\cdot 11 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

$a \vdots 2\cdot 11 \quad b \vdots 11 \quad c \vdots 2\cdot 11$

$2^{16}\cdot 11^{19} \vdots a \quad 2^{16}\cdot 11^{19} \vdots b \quad 2^{16}\cdot 11^{19} \vdots c$



$abc = 2^{17}\cdot 11^{20}$

$\cancel{a = 2^n \cdot 11^m}$

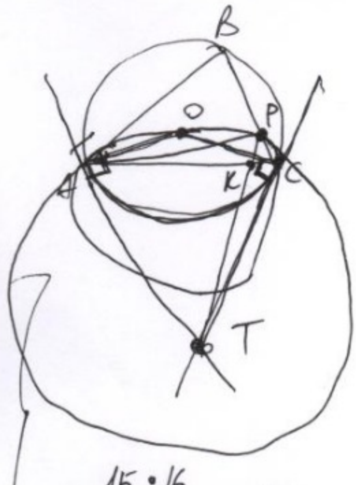
$\cancel{b = 2^k \cdot 11}$

$\cancel{c = 17-n-k}$

$17 = 1+1+15 =$

$= 1+2+14 =$

$= 1+3+13$



$a_2 = 1 \quad b_2 \quad c_2$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 15 \\ 2 & 14 \\ \vdots & \\ 15 & 1 \end{matrix}\right\} 15$$

$a_2 = 2,$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 14 \\ 2 & 13 \\ 3 & 12 \\ \vdots & \\ 14 & 1 \end{matrix}\right\} 14$$

$\vdots$

$a_2 = 15, \quad 1 \quad 1 \quad \} 1$

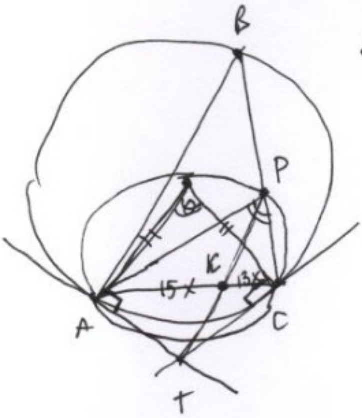
$a_{2} = 1$

$\frac{15\cdot 16}{2} = 120$

$$\begin{array}{r} 171 \\ \times\ 120 \\ \hline 342 \\ 171 \\ \hline 19520 \end{array}$$

$S_{CPK} = 13$

$S_{APK} = 15$

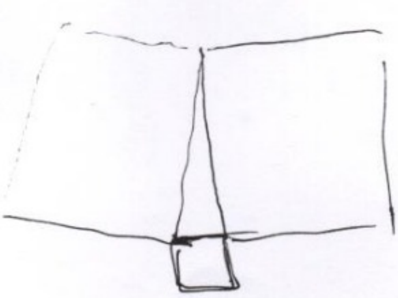


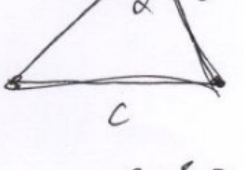
$\frac{19\cdot 18}{2} = 171$

$120 \cdot 171$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$S = \frac{ab\sin\alpha}{2}$





$2ab = \frac{4S}{\sin\alpha}$

$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{4S}{tg\alpha} = a^2 + b^2 - 4S$

$\frac{y}{y}$

21103755 (U326983 M1299874)

черновик.

$n = \log_{\sqrt{x+34}}^{=a} (2x+23)^{=b^2}$

$m = \log_{(x+4)^2}^{=c^2} (x+34) = a^2$

$k = \log_{\sqrt{2x+23}}^{=b} (-x-4)^{=c}$

ОДЗ:
$2x+23 \geq 0$
$\sqrt{x-34} > 0 \neq 1$
$x+34 > 0$
$(x+4)^2 \neq 1$
$\sqrt{2x+23} >$

$n = \log_a b^2 = 2\log_a b = 2\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{2}{mk}$

$m = \log_{c^2} a^2 = \log_c a =$

$k = \log_b c = \log_b c = \frac{1}{\log_c b}$

$\log_c a = \log_b c$

$\log_c a = \frac{1}{\log_c b}$

$\log_c b \log_c a = 1$

$n = \frac{2}{mk}$

1) $\begin{cases} n = \frac{2}{mk} = m+1 \\ m = k \end{cases}$

$\frac{2}{m^2} = m+1$

$m^3 + m^2 - 2 = 0$

$m^3 - 1 + m^2 - 1 = 0$

$(m-1)(m^2+m+1) + (m-1)(m+1) = 0$

$(m-1)(m^2+2m+2) = 0$

$\begin{cases} k = m = 1 = \log_c a = \log_b c \\ n = 2 = \log_a b^2 = 2\log_a b \end{cases}$

$\begin{cases} n = \frac{2}{mk} = k \\ m = k+1 \end{cases}$

$\begin{cases} n = k = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

$-x-4 = \sqrt{x+34}$

$2x = -18$

$x = -9$

$\begin{cases} n = \frac{2}{mk} = m \\ k = m+1 \end{cases}$

$\frac{2}{m(m+1)} = m$

$2 = m^3 + m^2$

$n = m = 1$

$k = 2$

$\log_a b^2 = \log_c a = 1$

$c = a = b^2$

$\log_b c = 2, \; b^2 = c$

$(-x-4) = \sqrt{x+34} = 2x+23$

$-3x = 27$

$x = -9$

$-x-4 > 0$

$-x > +4$

$x < -4$

$a = c$

$b = c$

$a = b$

$a = b = c$

$\sqrt{x+34} = \sqrt{2x+23} = (-x-4)$

$x+34 = 2x+23$

$11 = x$, ложь

$x+34 = (x+4)^2$

$(-x-4)^2 = 2x+23$

$(2x+23)^2 = \sqrt{x+34}$

$a = b^2 = c^2$

$\sqrt{x+34} = 2x+23 = (x+4)^2$

$2x+23 = x^2+8x+16$

$x^2+6x-7=0$

$(x-1)(x+7)=0$

$x=1$ по ОДЗ.

$x=-7$

не подх.