Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103674**

ID профиля: **884289**

Вариант 23

Чистовик №1 Вар 23

① $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$, $d > 0$ $a_i \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$

(d обязаны быть целыми, т.к. если бы d были нецелыми, то все члены АП не были бы целыми)

$S = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 15d$

$$\begin{cases} a_{10} a_{16} > S + 39 \\ a_{11} a_{15} < S + 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > S + 39 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 55 \end{matrix}$$

$a_1^2 + 15da_1 + 9da_1 + 135d^2 > S + 39$

$a_1^2 + 14da_1 + 10da_1 + 140d^2 < S + 55$

$a_1^2 + 24a_1d + 135d^2 - 6a_1 - 15d > 39$

$a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 - 6a_1 - 15d < 55$ $(-)$

$-5d^2 > -16$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$ $d < \frac{4}{\sqrt{5}} < \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 \Rightarrow 0 < d < 2 \Rightarrow d = 1$

$S = 6a_1 + 15$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 - 6a_1 - 15 - 39 > 0$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$ $(a_1 + 9)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq 9$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 - 6a_1 - 15 - 55 < 0$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$(a_1 + 9)^2 - 11 < 0$ $(a_1 + 9)^2 < 11 \Rightarrow -4 < a_1 + 9 < 4$ $-13 < a_1 < -5$

$(a_1 + 9)^2 < 11 < 16$ $-12 \leq a_1 \leq -6$

Ответ: $a_1 \in [-12; -6]$, $a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 = -12; -11; -10; -9; -8; -7; -6$

Чистовик №2 Вар 23

(3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$ - ~~[illegible]~~

1 уравнение системы - это закрашенная окружность с центром (a,b) и радиусом $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Пусть $4b-4a \le 8 \Rightarrow b-a \le 2$

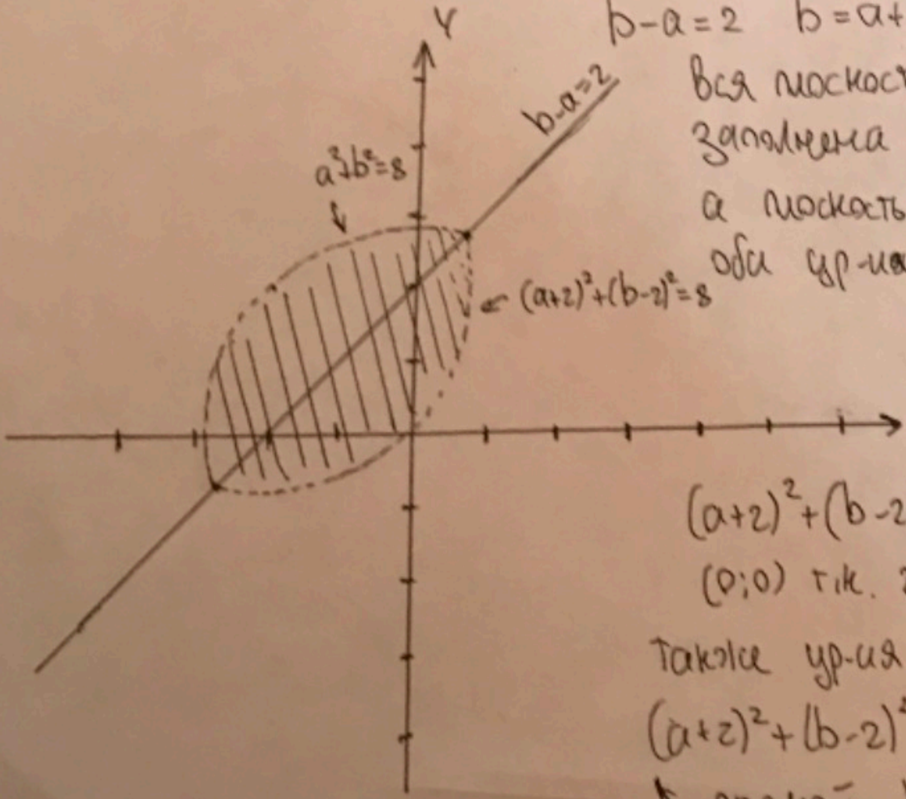
Тогда $a^2+b^2 \le -4a+4b \Rightarrow a^2+4a+b^2-4b+4+4 \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

Пусть $4b-4a > 8 \Rightarrow b-a > 2$

Тогда $a^2+b^2 \le 8$

Начертим наши примеры на окружности, $a \in O_x$; $b \in O_y$



$b-a=2$ $b=a+2$

Вся плоскость ниже $b-a=2$ заполнена ур-ием $(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$ а плоскость выше ур-ием $a^2+b^2 \le 8$ оба ур-ия - ур-ия окружности с радиусом $2\sqrt{2}$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$ проходит через $(0;0)$ т.к. $2^2+(-2)^2=8$

Также ур-ия $a^2+b^2=8$ и $(a+2)^2+(b-2)^2=8$ пересекаются на прямой $b-a=2$ в одних и тех же точках т.к. $a^2+b^2=-4a+4b=8$

21103674 (U884289 M1302330)

Чистовик №3

Вар 23

(3) Продолжение:

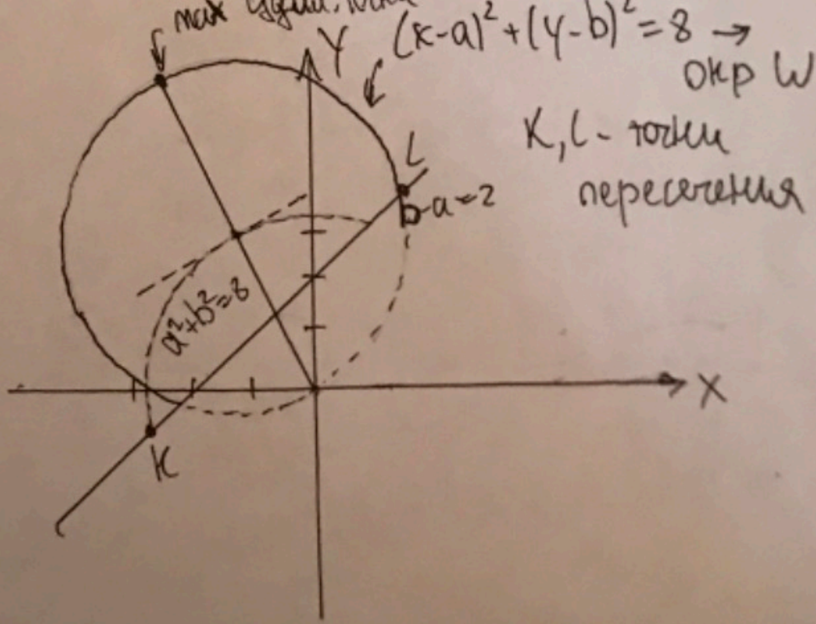
наша окружность $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ будет ездить по окрайнам представленной фигуры (иными словами, ее центр будет находится в закрашенной области.

Но так как нам надо рассмотреть все множество, будем рассматривать центр на окрайнах ~~...~~ закрашенной фигуры.

Рассмотрим сначала верхнюю полуокружность. Тогда заметим, что нам надо рассматривать именно множество точек окружности $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$, которые располагаются дальше всего от $a^2+b^2=8$

Заметим также, что части окружностей находятся симметрично относительно $b-a=2$ и равны друг другу (потому что центры наших окружностей находятся симметрично относительно ~~...~~ $b-a=2$ $(-2;2)$ и $(0;0)$ и из каждой из них мы проводим полуокружность с одинаковым радиусом $= 2\sqrt{2}$ => обе части одинаковые).

Заметим, что максимальная ~~...~~ удаленная точка на окр ω будет лежать на прямой, проходящей через $(0;0)$ (т.к. радиус ω должен быть $\perp$ касат в центре окр ω, а радиус $a^2+b^2=8$ $\perp$ той касат по св-ву => получается прямая)



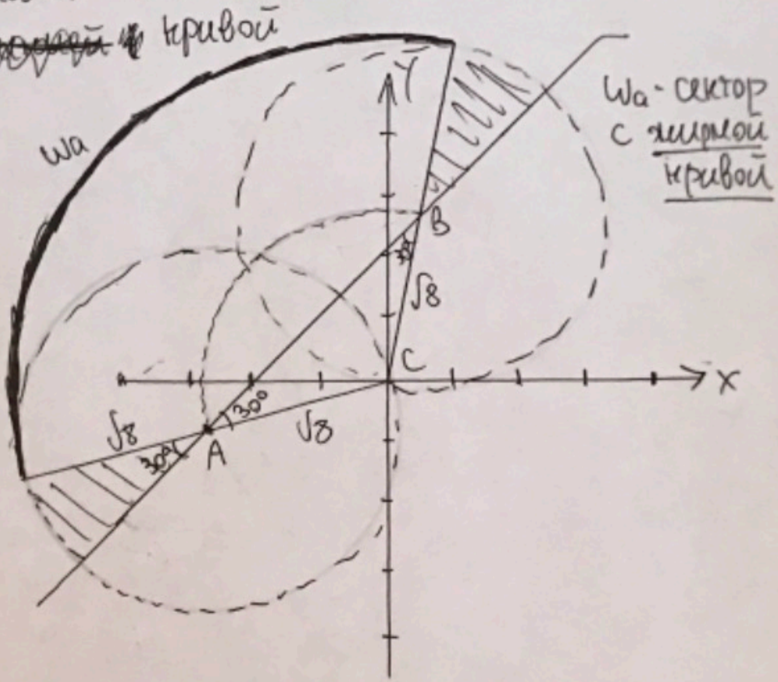
Длина такой прямой =

$= \sqrt{8}+\sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

21103674 (U884289 M1302330)

③ Чистовик №4 Вар 23

Тогда множество наших точек есть множество точек, обозначенной жирной ~~[illegible]~~ кривой (точнее точки, которые ниже данной кривой) и еще 2 сектора окружностей с радиусом 8 (заштрихована)



Имеем:

$$\begin{cases} b-a=2 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \quad b=2+a$$

$$a^2+(a+2)^2=8$$

$$2a^2+4a+4=8$$

$$2a^2+4a-4=0$$

$$D=16+4\cdot 2\cdot 4=3\cdot 16$$

$$a_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16\cdot 3}}{4}=\frac{-4\pm 4\sqrt{3}}{4}=-1\pm\sqrt{3}$$

$$a=-1-\sqrt{3} \Rightarrow b=1-\sqrt{3}$$

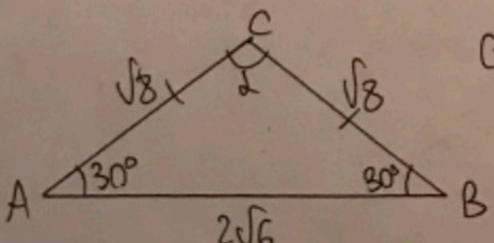
$$a=-1+\sqrt{3} \Rightarrow b=1+\sqrt{3}$$

~~$AC=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$~~ ~~$BC=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$~~

~~$AB=$~~

$$AC=BC=\sqrt{8} \qquad AB=\sqrt{(-1-\sqrt{3}+1-\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4\cdot 3+4\cdot 3}=$$

$$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$



$$\cos\alpha=\frac{8+8-24}{2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}=\frac{-8}{2\cdot 8}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=120^\circ$$

$$S_{Wa}=\frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\left(2\sqrt{8}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot 32\pi=\frac{32\pi}{3}$$

Другие углы по 30° градусов

Вар 23

③ Чистовик №5

Углы закрашенных секторов $= 30°$. Тогда их площади

$S = \frac{30°}{360°} \cdot \pi (\sqrt{8})^2 = \frac{1}{12} \cdot 8\pi = \frac{2\pi}{3}$. Сумма $S + S = \frac{4\pi}{3}$

Тогда вся площадь верхнего сектора $= W_a + 2S =$

$= \frac{32\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$

В нижней части ситуация повторяется аналогично в силу симметрии $\Rightarrow$ искомая площадь множества

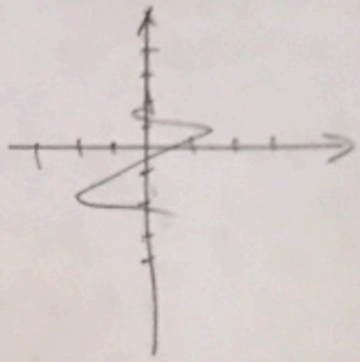
$= 12\pi + 12\pi = 24\pi$

Ответ: 24π

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

$-4a+4b \geq 8$ $\qquad$ $a^2+b^2<8$

$b-a \geq 2$ $\qquad$ $b<a+2$



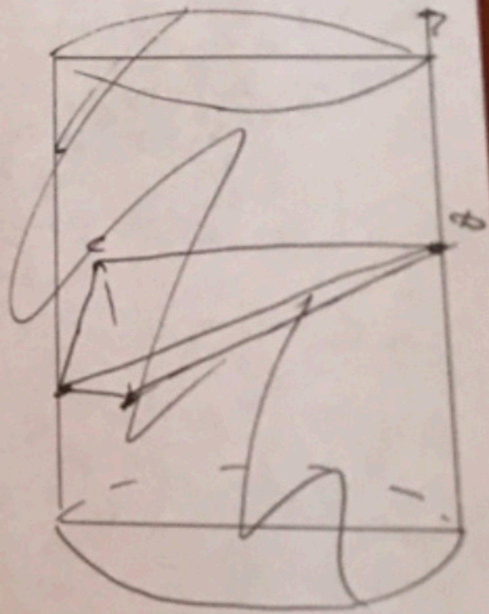
$b-a<2$ $\qquad$ $a^2+b^2 \le -4a+4b$

$a^2+4a+b^2-4b+8 \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

$|a-b|-a+b$

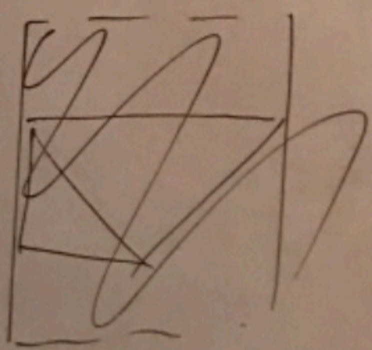
$\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$



$$a^2+b^2 \le \frac{8-4a+4b-|8+4a-4b|}{2}$$

$$2a^2+2b^2+4a-4b \le 8-|8+4a-4b|$$

$$a^2+b^2+(a+2)^2+(b-2)^2 \le 16-|8+4a-4b|$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103674**

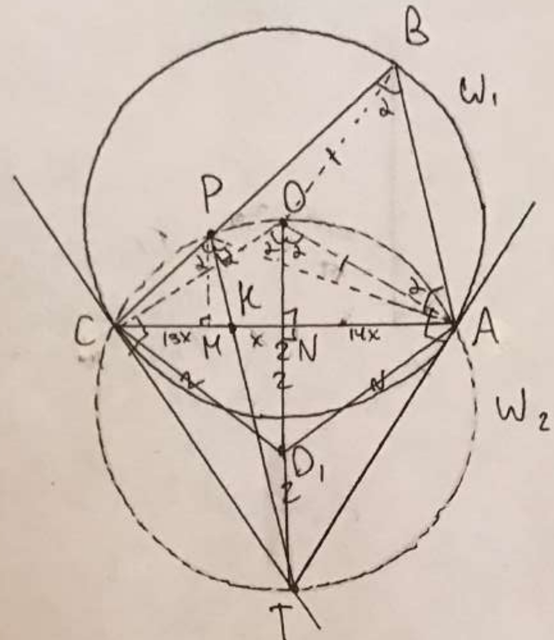
ID профиля: **884289**

Вариант 23

Чистовик №1 Вар 23

6) $\triangle ABC$, O - центр ω,

O_1 - центр ω_2



TA, TC - касат.

$S_{APK} = 15$ $S_{CPK} = 13$

$\angle ABC = arctg\left(\frac{4}{7}\right)$

Найти: S_{ABC}, AC

точки, $A, O, C \in \omega_2$ и

$\angle OAT + \angle OCT = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$

$OATC$ - впис. четырехуг. $\Rightarrow$

т.к. $A, O, C \in \omega_2 \Rightarrow O, A, T, C \in \omega_2 \Rightarrow T \in \omega_2$

PM - общая высота в $\triangle PAK$ и $\triangle CPK$ $\Rightarrow$ $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot PM}{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot PM} = \frac{AK}{CK} = \frac{15}{13}$

т.к. COA - р/б, то центр O_1 лежит на оси симметрии $\triangle COA$ (на продолж. высоты, биссектр., медианы.

т.к. $\triangle CTA$ - р/б, то O_1 ~~также~~ также лежит на оси симметрии. т.к. AC - общее основание, то оси симметрии совпадают и лежат на OT $\Rightarrow$ $O_1 \in OT$

т.к. $CT = TA$, то PT - биссектриса $\angle CPA$ по св-ву хорд

Пусть $CM = 13x$, $AK = 15x$ $\Rightarrow$ $CN = NA = \frac{AC}{2} = \frac{13x + 15x}{2} = 14x$, $MN = 14x - 13x = x$

Пусть $\angle CPT = \angle TPA = \alpha$. Тогда $\angle CPA = \angle COA = 2\alpha$ (опир. на одну дугу)

и $\angle COT = \angle TOA = \alpha$, $\angle CBA = \frac{\angle COA}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ (по св-ву цент. угла)

Тогда $\angle BPA = 180° - \angle CPA = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = 180° - \alpha - (180° - 2\alpha) = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PBA = \angle BAP = \alpha \Rightarrow \triangle BPA$ - р/б $\Rightarrow AP = PB$

По св-ву биссектр: $\frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PA} = \frac{13}{15} \Rightarrow CP = 13y, AP = 15y, PB = 15y$

Чистовик №2 Вар 23

(6) $S_{ABC}=S_{CPA}+S_{PBA}=\frac{1}{2}\cdot CP\cdot PA\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cdot PA\cdot PB\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)=$

$=\frac{1}{2}\cdot 13y\cdot 15y\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cdot 15y\cdot 15y\cdot\sin 2\alpha=\frac{y^2}{2}\sin 2\alpha(13\cdot 15+15\cdot 15)=$

$=\frac{y^2}{2}\sin 2\alpha\cdot 420=210\sin 2\alpha y^2=210\cdot\frac{28\cdot 2}{195}=\frac{42\cdot 28\cdot 2}{39}=\frac{14\cdot 28\cdot 2}{13}=\frac{784}{13}$

Также: $S_{CPA}=S_{CPK}+S_{APK}=13+15=28=\frac{1}{2}\cdot 13y\cdot 15y\sin 2\alpha=\frac{195y^2}{2}\sin 2\alpha$

$y^2\sin 2\alpha=\frac{28\cdot 2}{195}$

$S_{ABC}=\frac{784}{13}$

Имеем: $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{7}>0\Rightarrow\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{7}{4}$ $\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\frac{49}{16}=\frac{65}{16}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin^2\alpha=\frac{16}{65}$ $\quad\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{65}}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{65}}=\sqrt{\frac{49}{65}}=\frac{7}{\sqrt{65}}$

~~$S_{BPA}=\frac{1}{2}\cdot 15y\cdot 15y\cdot\sin 2\alpha=\frac{225y^2}{2}\sin 2\alpha$~~

$y^2\sin 2\alpha=\frac{56}{195}$ $\quad y^2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=y^2\cdot 2\frac{4}{\sqrt{65}}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}}=\frac{56}{195}$

$y^2\cdot\frac{56}{65}=\frac{56}{195}\Rightarrow y^2=\frac{1}{3}$

$y=\sqrt{\frac{1}{3}}$

По т. косинусов:

$AC^2=CP^2+PA^2-2CP\cdot PA\cos 2\alpha=169y^2+225y^2-2\cdot 13y\cdot 15y(1-2\sin^2\alpha)=$

$=169\cdot\frac{1}{3}+225\cdot\frac{1}{3}-390\cdot\frac{1}{3}\left(1-2\cdot\frac{16}{65}\right)=\frac{394}{3}-\frac{390}{3}\left(1-\frac{32}{65}\right)=$

$=\frac{4}{3}+\frac{390}{3}\cdot\frac{32}{65}=\frac{4}{3}+2\cdot 32=\frac{4}{3}+64=\frac{196}{3}$ $\quad AC=\frac{14}{\sqrt{3}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $S_{ABC}=\frac{784}{13}$, $AC=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

Чистовик №3

(4) $\begin{cases} НОД(a,b,c)=22=2^1\cdot 11^1 \\ НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$

Имеем:

$a=2^{a_1}\cdot 11^{a_2}$ $\quad a_1;a_2;b_1;b_2;c_1;c_2\in N\geq 1$

$b=2^{b_1}\cdot 11^{b_2}$

$c=2^{c_1}\cdot 11^{c_2}$

Для НОК:

$НОК=2^{\max(a_1;b_1;c_1)}\cdot 11^{\max(a_2;b_2;c_2)}=2^{16}\cdot 11^{19}$

Для НОД:

$НОД=2^{\min(a_1;b_1;c_1)}\cdot 11^{\min(a_2;b_2;c_2)}=2^1\cdot 11^1$

Тогда:

$\min(a_1;b_1;c_1)=1$

$\max(a_1;b_1;c_1)=16$ $\quad\Rightarrow 1\leq a_1;b_1;c_1\leq 16$ => хотя бы 1 из чисел =16 и хотя бы 1 равно 1

$\min(a_2;b_2;c_2)=1$

$\max(a_2;b_2;c_2)=19$ $\quad\Rightarrow 1\leq a_2;b_2;c_2\leq 19$ => хотя бы 1 из чисел = 19 и хотя бы 1 равно 1

расставить 2 числа (1;16) среди 3 чисел: C_3^2

Аналогично: с (1;19) C_3^2

Значение последнего из чисел $\in[2;15]$ => 14 вариантов, всего $C_3^2\cdot 14$

Аналогично с (1;19): $C_3^2\cdot 17$

последнее $\in[2;18]$

Теперь, если последнее число = 1 или 16 или 1;19 для другого варианта

Чистовик №4

(4) Имеем:

(1; 1; 16); (1; 16; 1); (16; 1; 1), (1; 16; 16), (16; 1; 16), (16; 16; 1) - 6 вариантов

~~Ана~~ Аналогично с 1 и 19 - 6 вариантов

~~Тогда имеем:~~

~~$(C_3^2 \cdot 14 + 1)(C_3^2 \cdot 17 + 1) =$~~

~~$= 43 \cdot 52 = 2236$~~

~~Ответ: 2236 вариантов~~

(1; 1; 19); (1; 19; 1); (19; 1; 1); (19; 19; 1); (19; 1; 19); (1; 19; 19)

Имеем: $C_3^2 \cdot 14 \cdot C_3^2 \cdot 17 = 9 \cdot 14 \cdot 17 = 2142$

Из 6 вариантов способа отбрасываем те, которые повторяют в себе 2 подряд идущие цифры

Всего вариантов: 36

Ответ: $(C_3^2 14 + 6)(C_3^2 \cdot 17 + 6) =$ ~~2736~~ $48 \cdot 57 = 2736$

Ответ: ~~2236~~ 2736

5

Чистовик №5

$$\overset{a}{\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)} = \overset{b}{\log_{(x+4)^2}(x+34)} = \overset{c}{\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)-1}$$

$2x+23>0,\ -x-4>0 \qquad x\neq-11,\ x>-\frac{23}{2} \quad x<-4$

$2x+23\neq1 \quad (x+4)^2\neq1 \quad \Rightarrow x\neq-5;-3$

$\sqrt{x+34}\neq1 \quad x+34>0 \qquad x>-34$

$x\neq-33 \qquad x+4<0 \Rightarrow$

$|x+4|=-(x+4)$

Заметим

$a\cdot b\cdot c = \frac{1}{2}\log_{x+34}(2x+23)\cdot 2\log_{-x-4}(x+34)\cdot\frac{1}{2}\log_{2x+23}(-x-4) =$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2=\frac{1}{2}$

1) $a=b=c-1 \quad\Rightarrow abc=a^2(a+1)=\frac{1}{2} \quad a^3+a^2=\frac{1}{2}$

2) $a=c=b-1$

3) $c=b=a-1$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34)$

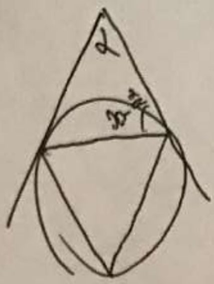
$\frac{1}{2}\log_{x+34}(2x+23)=2\log_{-(x+4)}(x+34)=\frac{2}{\log_{(x+34)}(-(x+4))}$

$\log_{x+34}(2x+23)\cdot\log_{x+34}(-(x+4))=4$

$2^1 \cdot 7^1$

$2^{17} \cdot 7^{18}$

$(C_3^2) \cdot 15 \cdot 16 =$



$a \quad b \quad c$

$a \cdot b \cdot c =$

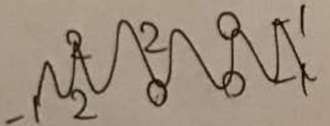
$=$

$-(x+4) > 0$

$x+4 < 0$

$2a^3 + 2a^2 = 1$

$2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$



$\frac{1}{2} \log_{x+34}(2x+23) \cdot 2\log_{-x-4}(x+34) \cdot$

$\frac{1}{2} \log_{2x+23}(-x-4) =$

$= \frac{1}{2}$

$abc = \frac{1}{2}$

$a^2 c = \frac{1}{2}$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \cdot \log_{\sqrt{x+34}}(-x-4) = 1$